Math. A.
253 b/2
Wenz

Die

Mathematische Geographie

in Verbindung mit der

Landkarten-Projektion.

Für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet

von

Gustav Wenz.

Mit 187 in den Text eingedruckten Figuren.

München.
R. Oldenbourg,
Inhaber der
Expedition des königlichen Zentral-Schulbücher-Verlages.
1883.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von R. Oldenbourg in München.

Inhalt.

Seite

Vorwort . IX

I. Teil.

Einführung in verschiedene Thesen der Elementar-Mathematik und der analytischen Geometrie.

Thesen der ebenen Geometrie.

Vom Winkel . 3
Die Entstehung des Winkels 3
Nebenwinkel und Scheitelwinkel 4
Parallellinien . 5

Vom Dreieck . 6
Das Dreieck im allgemeinen 6
Ähnlichkeit der Dreiecke 8
Die Proportionalität der Dreiecksseiten 9
Höhen- und Entfernungsbestimmungen unter Anwendung der Proportionalität der Dreiecksseiten 11

Vom Viereck . 13
Das Viereck im allgemeinen 13
Die Höhe eines Parallelogrammes und die Diagonale oder Ecklinie in demselben . 14

Vom Kreis . 15
Der Kreis im allgemeinen 15
Tangente, Zentri-, Peripherie-, Tangential- und Sekantenwinkel 17
Der Kreisumfang . 21

Die mittlere Proportionale und der Pythagoräische Lehrsatz . 22

Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren . . 23

Thesen der Stereometrie.

Berechnung der Körperoberflächen 26

Vom Kegel und der Kugel insbesondere 28
Der Kegel . 28
Die Kugel . 30

Seite

Oberflächenberechnung der Kugel 32
Berechnung des körperlichen Inhalts 34

Thesen der ebenen Trigonometrie.

Was Sinus und Kosinus ist 36
Wie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und auch dessen Hypotenuse durch Sinus und Kosinus zu finden sind 37
Wie man auf die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes kommt 38
Was Tangente und Kotangente ist 39
Wie man durch die Tangente und Kotangente auf die beiden Katheten kommt . 40
Wie man durch Tangente und Kotangente zu den spitzen Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks gelangt 41
Entfernungs- und Höhenberechnung unter Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks . 41
Der Sinus und Kosinus eines stumpfen Winkels 42
Der Sinus und Kosinus eines negativen Winkels 43
Was Sinus- und Kosinusregel ist 43
Entfernungs- und Höhenberechnung unter Anwendung des schiefwinkligen Dreiecks . 45
Flächenberechnung des rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks . . 46

Thesen aus der sphärischen Trigonometrie.

Erläuternde Sätze aus der räumlichen Geometrie 47
Das rechtwinklige sphärische Dreieck 49
Wie man auf die spitzen Winkel und die Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes kommt 50
Das schiefwinklige sphärische Dreieck 51

Thesen der analytischen Geometrie.

Wie man die Lage eines Punktes zu bestimmen sucht 53
Die gerade Linie . 54
Der Kreis . 55
Der Kreisbogen . 56
Die Ellipse . 57
Die Gleichung der Ellipse 59
Konstruktionsarten der Ellipse 61
Flächenberechnung der Ellipse 67
Hyperbel und Parabel (Kegelschnitte) 68

II. Teil.

Mathematische Geographie und die Projektionslehre.

A. Mathematische Geographie.

Gestalt und Gröfse der Erde 75
Horizont . 75
Einteilung des Horizontes 75
Die Mittagslinie . 77
Die Gestalt der Erde, der scheinbare und wahre Horizont 78

Seite
Beweise für die Kugelgestalt der Erde 79
Einteilung der Erde . 82
Die Bestimmung der geographischen Länge und Breite oder der geographischen Koordinaten . 85
Die Gröfsenbestimmungen und Gröfsenverhältnisse der Erde 89

B. Projektionslehre.

I. Kugelbilder.

Der Globus . 93
Die perspektiven Projektionen 94
Der Standort des Zeichners 94
Der Mittelpunkt des Gradnetzes 97
Polar- oder Äquatorialprojektion 98
Orthographische Polarprojektion 98
Zentrale Polarprojektion 99
Stereographische Polarprojektion 101
Meridianprojektion 102
Orthographische Meridianprojektion 102
Die stereographische Meridianprojektion 104
Rechnende Bestimmung der Parallel- und Meridian-Mittelpunkte und Radien 110
Horizontalprojektion 111
Stereographische Horizontalprojektion 111
Rechnende Bestimmung der Parallel- und Meridianmittelpunkte und Radien 114
Die nicht perspektivischen Projektionen 117
Globularprojektion . 117
Rechnende Bestimmung der Meridian- und Parallelmittelpunkte und Radien 120
Merkators Projektion . 122
Stereographisch-äquivalente Projektion modifiziert von E. Collignon . . 126
Projektion von Mollweide 130
Die Sternprojektion 137

II. Zonenbilder.

Der Kartenmafsstab . 138
Cylinderprojektion mit quadratischen Maschen 143
Merkators Projektion 144
Sanson-Flamsteed'sche Projektion 144
Mollweide'sche Projektion 146
Cylinderprojektion mit rechteckigen Maschen 148
Projektion mit trapezförmigen Maschen 149
Stereographisch-äquivalente Projektion modifiziert von E. Collignon . . 150
Kegelprojektion 152
Merkators Kegelprojektion 153
Murdoch'sche Kegelprojektion 157
Bonne'sche Kegelprojektion 161

III. Terrainbilder.

Höhen- oder Kurvennetze 165
Berechnung des Flächeninhaltes auf Karten 171

III. Teil.

Astronomisch-mathematische Geographie.

Seite

Die Erde im Weltenraum 177
In welchem Verhältnis sich die Erde zur Sonne, der Spenderin von Licht und Wärme, befindet . 183
In welchen Bahnen die Planeten die Sonne umkreisen 186
Die Kepler'schen Gesetze . 188
Die scheinbare Sonnenbahn ist die wirkliche Bahn der Erde 189
Die Hauptstationen der Erdbahn 191
Die Stellung der Erdachse zur Erdbahn 192
Das Himmelsgewölbe und die himmlischen Kreise. Der Himmelsglobus. Die verschiedenen Sphären 195
Der Schattenwurf . 199
Gegenfüfsler, Gegenwohner, Nebenwohner 199
Die Zeiteinteilung. Der Kalender 200
Sterntag und Sonnentag . 201
Der höchste oder mittägige Stand der Sonne über dem Horizont in den vier Jahreszeiten. Die Bestimmung der geographischen Breite. Die Tages- und Nachtlängen 202
Bestimmung des längsten Tages und der Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien durch Konstruktion. Die Refraktion oder Strahlenbrechung 207
Rechnende Bestimmung der Tageslänge, der Dauer der Dämmerung, der Höhe eines Gestirnes, der Deklination der Sonne, der Äquatorhöhe und Ekliptikschiefe, der Lichtklimate, der Morgen- und Abendweite, des Sonnenaufganges . 210
Angewandte Beispiele . , . 218
Die Wärmezonen der Erde. Das mathematische Klima 221
Der Mond . 223
Die Achsendrehung des Mondes 225
Die Bahn des Mondes . 226
Sonnen- und Mondfinsternisse 227
Rechnende Bestimmung der Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde, ferner der Entfernungen der Fixsterne von der Sonne . . 229
Die Gröfsenverhältnisse des Mondes und der Sonne 233
Ebbe und Flut . 234
Das Planetensystem . 236
Die Sonne und das Sonnensystem 238
Kometen und Asteroiden. Zodiakallicht. Arten der Sterne 240
Das Weltall . 243

IV. Teil.

Mathematische Geographie in Ziffern.

(Vierundzwanzig Tabellen.)

Einige Worte über das Rechnen mit Logarithmen 251
Tab. I. Logarithmen oft vorkommender Zahlen 257
Tab. II. Längen- und Breitengrade der Gradabteilungen der Erde. (Nach den Bessel'schen Dimensionen berechnet von Bremiker) 258

Seite

Tab. III. Geographische Längen und Breiten wichtiger Orte 259

Tab. IV. $r' = 1 . \cos\lambda = 1 . \cos\varphi$. (Orthographische Polarprojektion; Sanson-Flamsteed'sche Projektion; Bonne'sche Projektion) 262

Tab. V. $r' = 1 . \cot\varphi$. (Zentrale Polarprojektion; Kegelprojektion von Ptolemäus; Bonne'sche Projektion) 263

Tab. VI. $r' = 1 . \tan(45 - {}^1/_2\,\varphi)$. (Stereographische Polarprojektion) . . 263

Tab. VII. a) $b = 1 . \sin\lambda = 1 . \cos(90 - \lambda) = 1 . \cos\varphi$.
b) $y = 1 . \cos\varphi . \cos\varphi$.
(Orthographische Meridianprojektion) 264

Tab. VIII. a) $x = 1 . \cot\lambda = PR = 1 . \cot\varphi$.
b) $y = 1 . \operatorname{cosec}\varphi = MR = 1 . \operatorname{cosec}\lambda$.
(Stereographische Meridianprojektion) 265

Tab. IX. a) $p = 1 . \tan({}^1/_2\,\varphi' - 25^0)$.
b) $y = {}^1/_2 . \cos 50 : [\sin(25 + {}^1/_2\,\varphi') \cos({}^1/_2\,\varphi' - 25)]$.
c) $R = \sin 70 : \cos 50 . \cos 20$.
d) $x = 1 . \cot\lambda . \sin 70 : \cos 50 . \cos 20$.
(Stereographische Horizontalprojektion) 266

Tab. X. a) $MR = {}^1/_2 \sec\vartheta . \operatorname{cosec}\vartheta$
$x = {}^1/_2 \sec\vartheta . \operatorname{cosec}\vartheta - \lambda . \frac{2}{\pi}$.
b) $PR = {}^1/_2 \cos\varphi . \sec\psi . \operatorname{cosec}\psi$
$y = {}^1/_2 \cos\varphi . \sec\psi . \operatorname{cosec}\psi + \varphi . \frac{2}{\pi}$.
(Globularprojektion) 267

Tab. XI. $y = 2{,}30259 \lg\tan(45 + {}^1/_2\,\varphi)$. (Merkators Projektion) . . . 269

Tab. XII. $y_1 = 1 - \sqrt{2} \sin(45^0 - {}^1/_2\,\varphi)$. (Stereographisch - äquivalente Projektion, modifiziert von E. Collignon) 270

Tab. XIII. a) $y = 1 . \sin\chi$, fortschreitend von 5 zu 5 Grad.
b) $Y = 1 . \sqrt{1 - \sin\chi^2}$
$y = {}^1/_{18} \sqrt{1 - \sin\chi^2}$.
(Mollweide'sche Projektion) 270

Tab. XIV. Die auf Millimeter reduzierten Bogenlängen von 1, 5, 15 Minuten; 1, 5, 10 und 20 Graden 272

Tab. XV. a) $y = 1 . \sin\chi$ von Grad zu Grad fortschreitend.
b) $y = {}^1/_{90} . \sqrt{1 - \sin\chi^2}$. (Mollweide'sche Projektion) . . . 274

Tab. XVI. $JA = \frac{1 . \cos\varphi}{\sin {}^1/_2 (\varphi + \varphi')}$; $JB = \frac{1 . \cos\varphi'}{\sin {}^1/_2 (\varphi + \varphi')}$
$\lambda' = 1 . \sin {}^1/_2 (\varphi + \varphi')$.
(Merkators Kegelprojektion) 275

Tab. XVII. $JC = \frac{360}{\pi(\varphi'' - \varphi')} . \sin {}^1/_2 (\varphi'' - \varphi') . \cot {}^1/_2 (\varphi' + \varphi'')$
$\lambda' = 1 . \sin {}^1/_2 (\varphi' + \varphi'')$. (Murdochs Kegelprojektion) . . 275

Tab. XVIII. Winkel λ' für die Breite φ, für die Drehung während einer Stunde . 277

Tab. XIX. Die Dauer des Tages am 21. Juni für Orte unter verschiedenen Breiten a) nach den Ergebnissen der Konstruktion, b) nach denen der rechnenden Bestimmung 277

Seite

Tab. XX. Die Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien und Solstitien für Orte unter verschiedenen Breiten 277
Tab. XXI. Die Deklination der Sonne für die einzelnen Tage des Jahres 280
Tab. XXII. Lichtklimate, wobei der Zuwachs der Tageslänge von Stunde zu Stunde d. i. von 1^h bis 12^h fortschreitet 280
Tab. XXIII. Verhältniszahlen zur Bestimmung des mathematischen Klimas 281
Tab. XXIV. Entfernungen entsprechend den Parallaxen von 1″ bis 0,1″ . 281

Nachtrag:

A. Horizontalprojektion in einfacher Konstruktionsweise 283
B. Konstruktion der Kreisbogen ohne Zirkel für die auf S. 108 bis 122 besprochenen Hemisphären 285
C. Äquinoktialpunkte. Solstitialpunkte. Kolur der Solstitien 288

Alphabetisches Register 289
Berichtigungen . 298

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch, für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet, versucht die *Kartographie* mit der *mathematischen Geographie* in Verbindung zu bringen, da sich mehr und mehr das Bedürfnis geltend macht, die Landkarten nicht blofs ablesen, sondern nach *Entwurf* und *Zeichnung* auch beurteilen zu können. Und wo könnte die Landkartenprojektion schicklicher untergebracht werden als bei der mathematischen Geographie, die es gleichfalls mit mathematischen Lehrsätzen zu thun hat, die nicht wohl umgangen werden können. Geht man denselben aus übertriebener Scheu vor der Mathematik aus dem Wege, so entbehrt dieser Lehrgegenstand seine sicherste Stütze und verdient alsdann kaum noch die Bezeichnung „*mathematisch*“. Mangelt der Projektionslehre die Basis der Mathematik, so artet sie geradezu zu einer mechanischen Konstruktionsanweisung aus, bei welcher man sich für sein Verfahren in den meisten Fällen keine Rechenschaft zu geben weifs. Solche Arbeiten erlahmen den Geist und lassen ihn unbefriedigt. *Sicherheit in seinem Thun und Lassen* allein nur gewährt dem denkenden Menschen Befriedigung. Wenn nun die mathematischen Lehrsätze in besagten Disziplinen eine Sicherheit, die befriedigt, zu bieten vermögen, so wäre es übel gethan, wenn wir sie von uns wiesen und sprächen: „Hinweg mit dem mathematischen Apparat aus der mathematischen Geographie.“ Viel besser fahren wir, wenn wir die Scheu vor ihm ablegen und uns mit ihm zu befreunden suchen. Mit ihm ausgerüstet können wir an die Lösung von Problemen der mathematischen Geographie und der Landkartenprojektion getrosten Mutes gehen. Damit aber dieser mathematische Apparat für unsere Zwecke in einfacher Fassung gleich zu Gebote stehe, wurden die erforderlichen mathematischen Thesen als Einleitung in die mathematische Geographie dem Werke vorangestellt. Hiedurch erwuchs

auch noch der Vorteil, dafs man sich der möglichsten Kürze befleifsigen konnte, indem ein blofser Hinweis auf sie für ihre Anwendungen und allenfallsigen Umformungen schon genügend war.

Eine weitere Beigabe bildet der vierte Teil, der 24 Tabellen enthält. Derselbe kann für ein Schatzkästlein gelten, in dem die Kartennetze und andere Wertsachen ziffermäfsig niedergelegt sind. Nach Belieben kann der Eingeweihte dies oder jenes Wertstück herausnehmen, einen Kartenentwurf rasch bethätigen und damit Unterricht und Studium beleben, ohne sich selbst mit umständlichen Berechnungen abgeben zu müssen.

Der Verfasser erfüllt zugleich eine ihm angenehme Pflicht, indem er einerseits Herrn *Joseph Ritz,* Hauptlehrer für Mathematik und Physik an der städt. Handelsschule zu München, seinen aufrichtigen Dank für die freundlichen Winke und die teilweise Durchsicht des Manuskriptes vom zweiten Teil ausspricht, andernteils der Werke gedenkt, welche ihm Anregung, Belehrung und Unterstützung geboten haben. Dieselben sind vornehmlich folgende:

Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie; der Trigonometrie und analytischen Geometrie von *Dr. Joh. Müller.* Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojektion von *Anton Steinhauser.* Lehrbuch der Kartenprojektion von *Dr. H. Gretschel.* Die stereographische Projektion von *E. Reusch.* Leitfaden für den theoretischen Unterricht im Planzeichnen von *H. v. Plehwe.* Das militärische Planzeichnen und die Militär-Kartographie von *A. Wichura.* Handbuch der Erdkunde von *Dr. G. A. v. Klöden.* Allgemeine Himmelskunde von *Eduard Wetzel.* Astronomische Geographie von *H. C. E. Martus.* Himmel und Erde von *Dr. Zech.* Lehrbuch der kosmischen Geographie von *Dr. Joh. Müller.* Geschichte der Astronomie von *Rudolf Wolf.*

Möge dieses Lehrbuch eine wohlwollende Aufnahme finden, und dazu geeignet sein, einen Beitrag zur Förderung der mathematischen Geographie in Verbindung mit der Landkartenprojektion zu liefern.

München, den 27. Mai 1883.

Der Verfasser.

I. Teil.

Einführung

in verschiedene Thesen der Elementar-Mathematik und der analytischen Geometrie.

»Vis superba formae.«
Johannes secundus.

»Die Form will so gut verdaut sein als der Stoff, ja sie verdaut sich viel schwerer.«
Wolfgang v. Goethe.

Thesen der ebenen Geometrie.

Vom Winkel.

Die Entstehung des Winkels.

Durch einen Punkt können eine Unzahl von geraden Linien verschiedener Richtung gezogen werden; niemals aber zwei von derselben Richtung. Treffen zwei Gerade *ab* und *ac* in dem Punkte *a* (Fig. 1) aufeinander, so müssen sie von verschiedener Richtung sein. Der Raum, der zwischen ihnen zu liegen kommt oder besser der Richtungsunterschied zweier Geraden heifst ein Winkel. Der Punkt, in dem sie sich treffen, wird Treffpunkt oder Scheitel des Winkels genannt, die ihn einschliefsenden Geraden benennt man Schenkel (Zeichen $\measuredangle$).

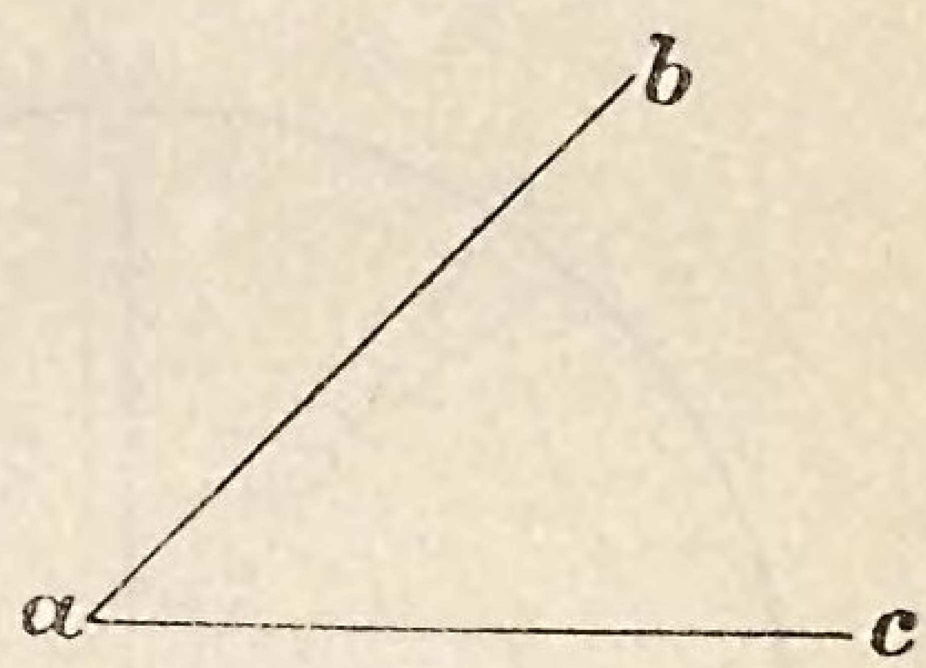


Fig. 1.

Um 12 Uhr steht der grofse Uhrzeiger über dem kleinen, beide decken sich, sie halten eben ein und dieselbe Richtung ein. Nach kurzer Zeit ist es mit ihnen anders, sie stehen in verschiedener Richtung zu einander. Der grofse Zeiger hat sich weiter gedreht und durch diese Drehung ist ein Richtungsunterschied oder Winkel hervorgerufen worden. So entsteht der Winkel nicht blofs durch das Aufeinandertreffen zweier Geraden von verschiedener Richtung, sondern auch durch Drehung. Würde der kleine Zeiger auf 12 Uhr so lange verharren, bis der grofse sich wieder über ihm befindet, so hätte der letzte eine Kreisumdrehung zuwege gebracht. Diese nennt man eine volle Umdrehung, einen vollen Richtungsunterschied oder einen vollen Winkel. Bei einer halben Drehung bilden die Zeiger eine gestreckte Linie, weshalb man diesen Richtungsunterschied einen gestreckten oder flachen Winkel nennt. Selbstverständlich ist, dafs die Gröfse des Winkels immer nur von der Gröfse der Drehung, niemals von der Länge der Geraden abhängig ist. Wie das Zifferblatt einer jeden Uhr in zwölf Teile gebracht

wird, so rechnet man auf eine volle Umdrehung oder einen Kreis, ob er nun grofs oder klein ist, 360 Teile, die man Grade (Zeichen ^{0}) nennt. Demnach ist:

360^0 = ein voller Winkel oder ein Kreis;
180^0 = ein flacher Winkel oder ein Halbkreis;
90^0 = ein rechter Winkel (Zeichen R) oder ein Viertelskreis oder ein Quadrant.

Trägt man auf einen Halbkreis 180^0 auf, so erhält man ein bequemes Instrument, mittelst dessen man Winkel messen und abtragen kann. Dasselbe ist unter dem Namen Transporteur bekannt.

Einen Grad teilt man in 60 Minuten (Zeichen ') und eine Minute in 60 Sekunden (Zeichen ") ein.

Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Der Halbkreis $a\,e\,d\,b$ (Fig. 2) ist durch die Senkrechte $c\,d$ in zwei Viertelkreise geteilt. Winkel $a\,c\,d = 90^0$, und $\sphericalangle\, b\,c\,d$ ist wiederum 90^0. Beide nebeneinander liegende Winkel sind sich gleich und betragen zusammen 180^0. Dieselben haben den Schenkel $c\,d$ gemein, die Schenkel $a\,c$ und $c\,b$ bilden eine gestreckte Linie. Winkelpaare von dieser Eigenschaft und die zusammen 180^0 ausmachen, heifsen Nebenwinkel. Sind sie einander gleich, so mifst jeder 90^0 und ist also jeder von ihnen ein rechter; sind sie ungleich, so ist der eine gröfser und der andere kleiner als ein R. Den ersteren nennt man einen stumpfen Winkel ecb, den anderen einen spitzen Winkel $a\,c\,e$.

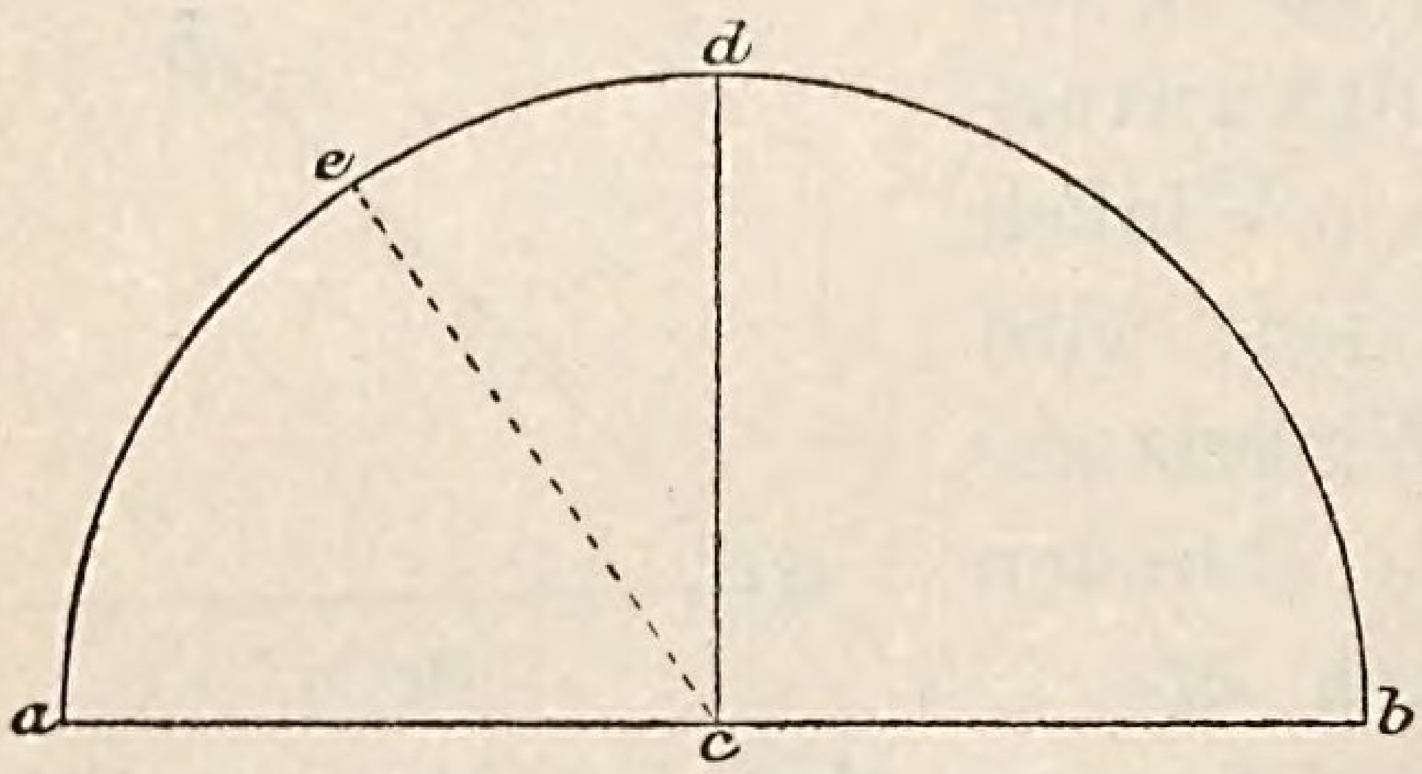


Fig. 2.

Verlängert man die Schenkel eines Winkels α*) über den Scheitel hinaus, so erhält man noch drei neue Winkel β, γ, δ (Fig. 3). Winkel,

*) Zur Bezeichnung der Winkel verwendet man nicht nur das lateinische, sondern auch das griechische Alphabet. Dessen kleine Buchstaben und deren Namen sind:

α	a	alpha	η	ē	ēta	ν	n	ny	τ	t	tau
β	b	beta	ϑ	th	theta	ξ	x	xi	υ	ü	ypsīlon
γ	g	gamma	ι	i	ïota	o	ŏ	ŏmīkron	φ	ph	phi
δ	d	delta	$\varkappa$	k	kappa	π	p	pi	χ	ch	chi
ε	ĕ	ĕpsīlon	λ	l	lambda	ϱ	r	rho	ψ	ps	psi
ζ	z	zeta	μ	m	my	σ, s	ſ, s	sigma	ω	ō	ōmĕga.

die nur den Scheitel nicht aber die Schenkel gemein haben, heifsen Scheitelwinkel. Solche sind hier α und β; γ und δ. Je zwei von ihnen, also α und γ; dann β und γ sind Nebenwinkel. Mithin ist

$$\alpha + \gamma = 2\,R$$
$$\beta + \gamma = 2\,R,$$

also ist $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$,

woraus folgt, dafs

$$\alpha = \beta \text{ ist.}$$

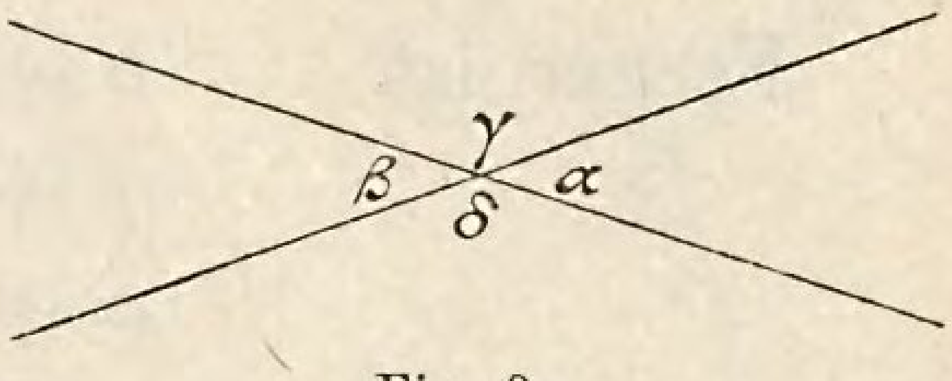


Fig. 3.

Scheitelwinkel sind sonach einander gleich.

Zugleich gewahren wir, dafs Winkel um einen Punkt herum immer nur 360^0 oder $4\,R$ betragen können.

Zu gleichen Winkelpaaren gelangt man auch, wenn man auf jedem Schenkel eines gegebenen Winkels eine Senkrechte errichtet (Zeichen für senkrecht ist $\perp$). Der gegebene Winkel sei bei Fig. 4 α; seine Schenkel sind dann $a\,z$ und $b\,z$. Auf $a\,z$ steht $d\,z$ und auf $b\,z$ $e\,z$ senkrecht, alsdann ist $\sphericalangle\,\alpha = \sphericalangle\,\beta$.

Beweis:

$$\alpha + \gamma = 1\,R$$
$$\beta + \gamma = 1\,R$$
$$\overline{\alpha + \gamma = \beta + \gamma}$$
$$\alpha = \beta$$

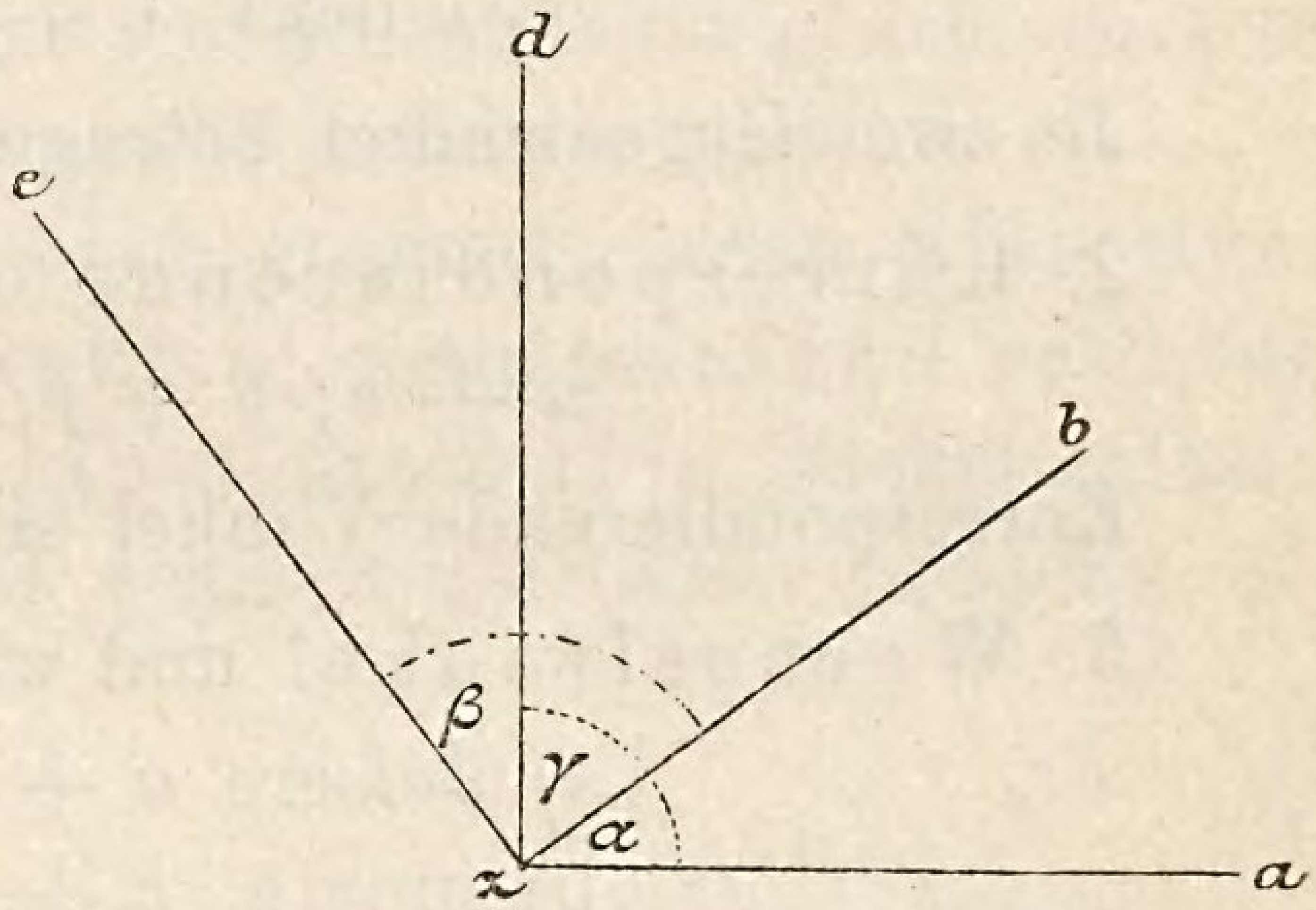


Fig. 4.

Parallellinien.

Die Linie $l\,q$ (Fig. 5) sei gegeben. In der Richtung des Winkels a ist $i\,k$ gezogen. Mit dem Winkel a sind alle Winkel um den Schnittpunkt m bestimmt. Bei dem Punkte n soll die Linie $o\,p$ so gezogen werden, dafs der Winkel e dem $\sphericalangle\,a$ zu entsprechen hat. Damit erhält die Gerade $o\,p$ den gleichen Abstand von $i\,k$ als wie $l\,q$ und beide Linien werden hierdurch gleichlaufend oder parallel. Linien aber, die eine gleiche Richtung verfolgen, heifsen Parallellinien. Dieselben können sich nie treffen oder schneiden.

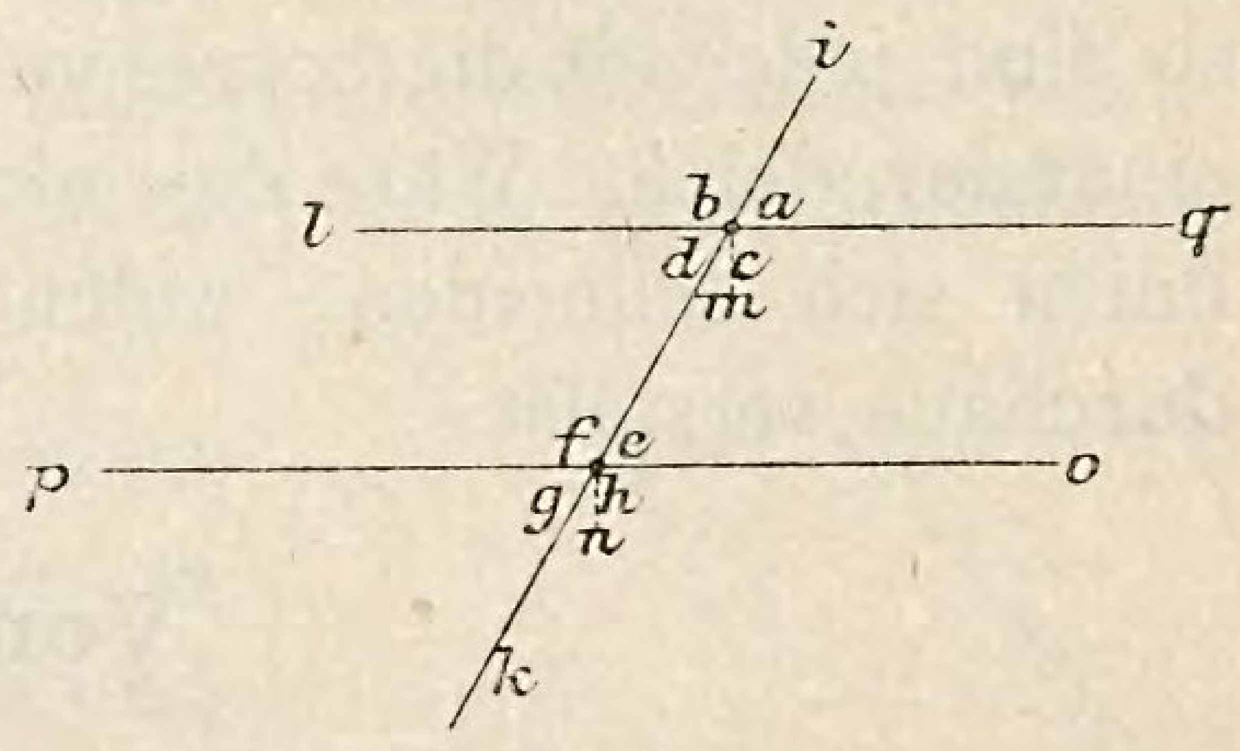


Fig. 5.

Stellt man einen Vergleich unter den acht Winkelpaaren an, so gelangt man zu nachfolgendem Resultat.

Gegeben $a = e$,
dann ist $g = e = a = d$.
Gegeben $b = f$,
dann ist $h = f = b = c$.

Ferner ist
$$b + d = f + d = 2R$$
$$f + g = b + g = 2R$$
$$a + c = e + c = 2R$$
$$e + h = a + h = 2R.$$

Da diese dargelegten Winkelverhältnisse gar häufig vorkommen und vielfach zu Beweisführungen benützt werden, so hat man sie klassifiziert und je zwei Winkelpaare eigens benannt.

1. Gegenwinkel und zwar
 a) äufsere $a + h$ und $b + g$
 b) innere $c + e$ und $d + f$.

Je zwei Gegenwinkel betragen zusammen $2R$.

2. Korrespondierende oder gleichliegende Winkel
 $a + e$; $b + f$; $c + h$; $d + g$.

Korrespondierende Winkel sind einander gleich.

3. Wechselwinkel und zwar
 a) äufsere $a + g$ und $b + h$
 b) innere $c + f$ und $d + e$.

Die Wechselwinkel sind ebenfalls einander gleich.

4. Gegenwechselwinkel
 $a + f$; $b + e$; $c + g$; $d + h$.

Je zwei derselben betragen $2R$.

Werden demnach Parallellinien von einer dritten geschnitten, so sind jederzeit die korrespondierenden oder gleichliegenden Winkel einander gleich. Wäre dies nicht der Fall, so müfsten beide Parallellinien sich schneiden, welche Thatsache gegen den Parallelismus durchaus verstöfst.

Vom Dreieck.

Das Dreieck im allgemeinen.

Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien begrenzte ebene Figur (Zeichen $\triangle$).

Linie op sei parallel zur Linie mn (Fig. 6). Zieht man rs, so gewinnt man die Wechselwinkel $a + e$ und zieht man tu,

alsdann ergeben sich die Wechselwinkel $b + d$. Durch diese Linien rs und ut, welche die Parallelen mn und op schneiden, erhält man das Dreieck rtu mit den Dreieckswinkeln $a + b + c$. Die Winkel $e + c + d$ machen mit einander einen flachen Winkel oder $2\,R$ aus. Da man für $\sphericalangle e$ den $\sphericalangle a$ und für $\sphericalangle d$ den $\sphericalangle b$ setzen kann, so läfst sich auch sagen $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c$ betragen $2\,R$. Diese Winkel sind aber die Dreieckswinkel selbst, woraus erhellt, dafs die Winkel eines Dreiecks zusammen $2\,R$ oder 180^0 betragen. Wenn demnach zwei Winkel eines Dreiecks bekannt sind, so findet man den dritten durch Berechnung: $c = 180 - (a + b)$. Sind also zwei Winkel in zwei Dreiecken einzeln einander gleich, so sind auch die dritten Winkel dieser Dreiecke einander gleich.

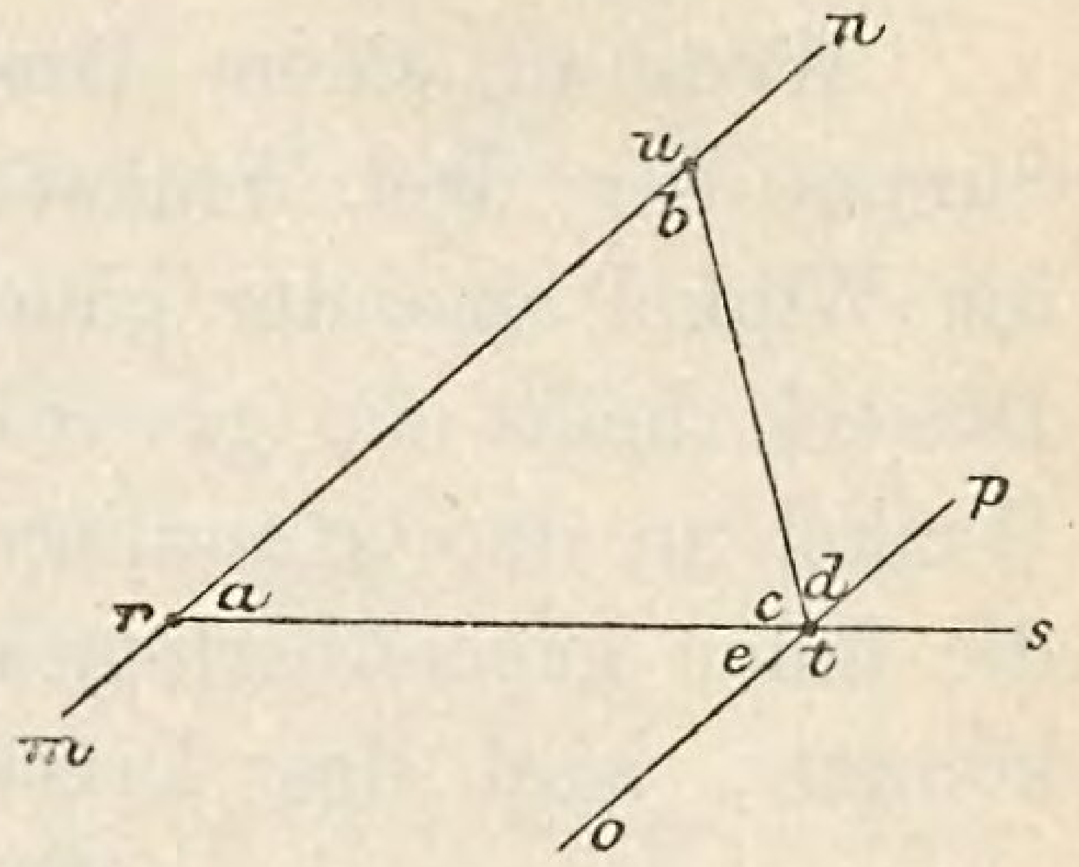


Fig. 6.

Ein Dreieck wird spitzwinklig genannt, wenn alle drei Winkel spitze sind; rechtwinklig, wenn es einen rechten und stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält.

Bestimmt ist ein Dreieck und seine Konstruktion alsdann ermöglicht, wenn gegeben sind:

1. seine drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und der der längeren Seite gegenüber liegende Winkel,
4. eine Seite und die derselben anliegenden Winkel,
5. eine Seite, ein anliegender und ein ihr gegenüberliegender Winkel. (Diese Bestimmung kann auf die unter 4 rubrizierte gebracht werden. Der anliegende unbekannte Winkel ergibt sich, wenn man von $2\,R$ die Summe der gegebenen Winkel in Abzug bringt).

Stimmen zwei Dreiecke in irgend einem der verzeichneten fünf Punkte überein, so decken sie sich nach Gröfse und Form und man sagt, sie sind kongruent (Zeichen $\cong$).

Verlängert man eine Dreiecksseite, so entsteht ein Aufsenwinkel. Derselbe ist so grofs, wie die beiden ihm gegenüberliegenden Winkel. Nach Fig. 7 ist der Aufsenwinkel x.

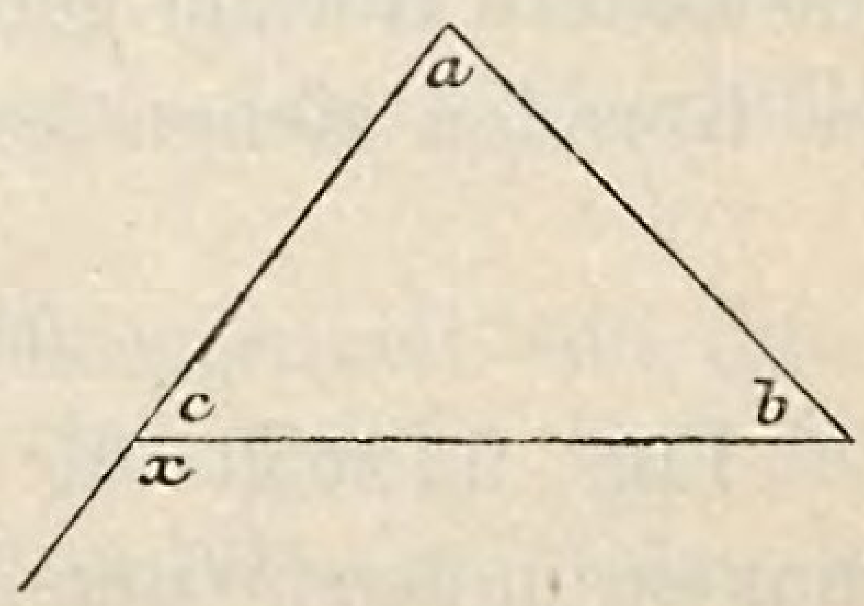


Fig. 7.

Es ist aber $a + b + c = 2\,R$

$x + c = 2\,R$

also $x + c = a + b + c$

woraus folgt, daſs $x = a + b$ ist.

Wenn in einem Dreieck $\sphericalangle a = \sphericalangle b = \sphericalangle c$ ist, so ist die Summe der drei Winkel gleich $3\,a = 180^0$; a selbst 60^0. Sind die Winkel einander gleich, so sind es auch die Seiten und das Dreieck heiſst ein gleichseitiges. In dem Fall jedoch, daſs die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind und demgemäſs nur die ihnen gegenüberliegenden zwei Seiten auch einander gleich sein können, wird das Dreieck ein gleichschenkliges genannt (Fig. 8). Halbiert man in einem solchen Dreieck den Winkel c und zieht man von der Spitze durch den Teilpunkt eine Gerade, so bringt die gerade Linie das Dreieck nicht nur in zwei gleiche Hälften, sondern sie bewirkt auch, daſs sie zur Grundlinie im rechten Winkel steht. Da nämlich die beiden Teildreiecke, indem sie in den zwei Seiten rs und st und den ihnen anliegenden Winkeln übereinstimmen, sich decken, so decken sich auch die Nebenwinkel d und e. Sind sich diese gleich, so muſs jeder von ihnen 90^0 betragen oder ein rechter Winkel sein. Diese Senkrechte oder dieses Perpendikel steht den spitzen Winkeln a und b gegenüber; es ist kleiner als die den rechten Winkeln gegenüber befindlichen Geraden rs und st. Aus dieser Thatsache geht hervor, daſs dem gröſseren Winkel die gröſsere Seite und dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenübersteht. Würde man z. B. von s nach q oder p oder o u. s. f. Linien ziehen, so würden sie sämtlich als dem rechten Winkel gegenüberliegend länger ausfallen als sz, und so ist hiermit noch dies eine dargethan, daſs eine Senkrechte oder ein Perpendikel, d. i. eine Linie im Abstande von 90^0, auf eine andere Gerade gefällt, stets die kürzeste Linie ist, die man nach der Geraden ziehen kann.

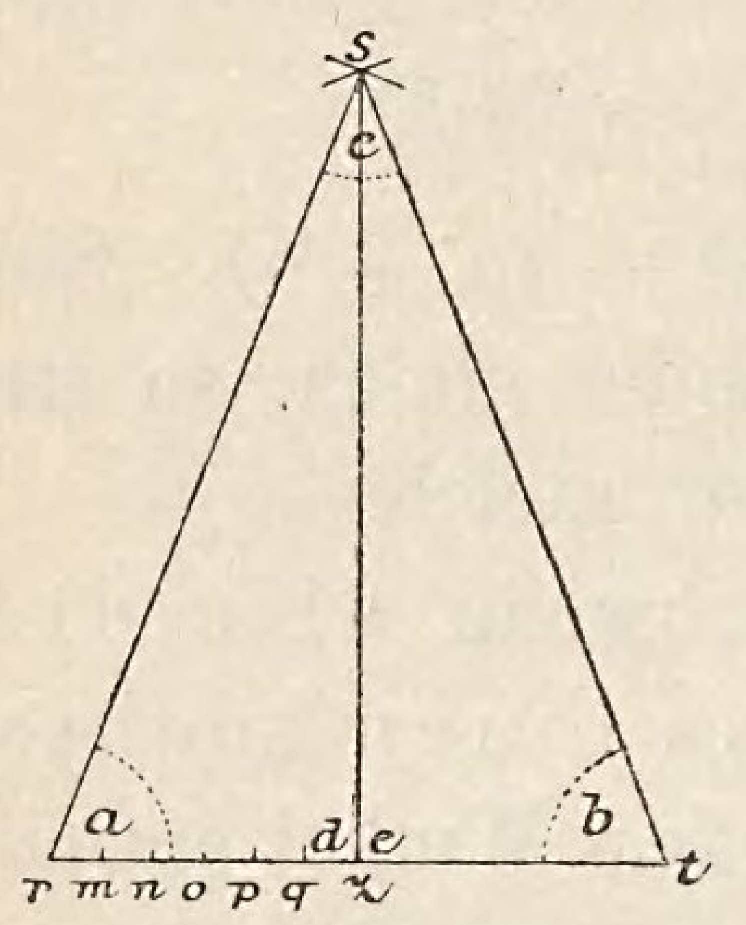


Fig. 8.

Ähnlichkeit der Dreiecke.

Fig. 9 zeigt die zwei Dreiecke $s\,m\,n$ und $s\,r\,t$. Dieselben stimmen in den Winkeln, nicht aber in der Gröſse der Seiten überein. Da rt zur Grundlinie mn parallel gezogen wurde, so ist offenbar $\sphericalangle b = \sphericalangle d$ und $\sphericalangle c = \sphericalangle e$. Winkel a ist bei den Dreiecken gemeinschaftlich, so daſs alle Winkel in beiden Dreiecken der Gröſse

nach sich gleichen. Die Dreiecke selbst sind der Form, aber nicht der Gröfse nach einander gleich; sie sind eben einander formgleich oder, wie man sich hier auszudrücken pflegt, einander **ähnlich** (Zeichen ∾). Um die Ähnlichkeit zweier Dreiecke darzulegen gehört nichts weiteres dazu, als die Gleichheit der gleichliegenden Winkel zu beweisen.

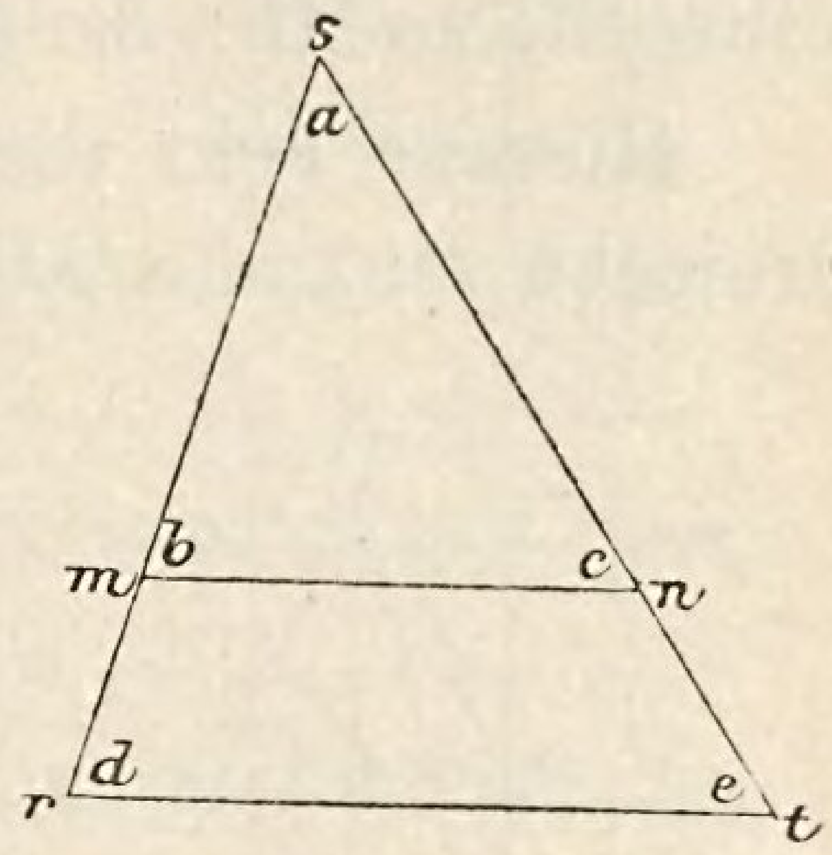


Fig. 9.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke birgt in sich die Harmonie der gleichgelegenen oder homologen Seiten. Ihre Proportionalität spielt in der Mefskunst eine grofse Rolle, auf ihr beruht das Geheimnis der Landes-, Erd- und Himmelsvermessung.

Die Proportionalität der Dreiecksseiten.

Fig. 10 führt uns zwei ähnliche Dreiecke vor, ihre Seiten sind ja in gleich grofsen Winkeln aneinander gefügt. Die Seiten des Dreiecks I seien *a b c* und die des Dreiecks II *A B C*. Wenn *b*

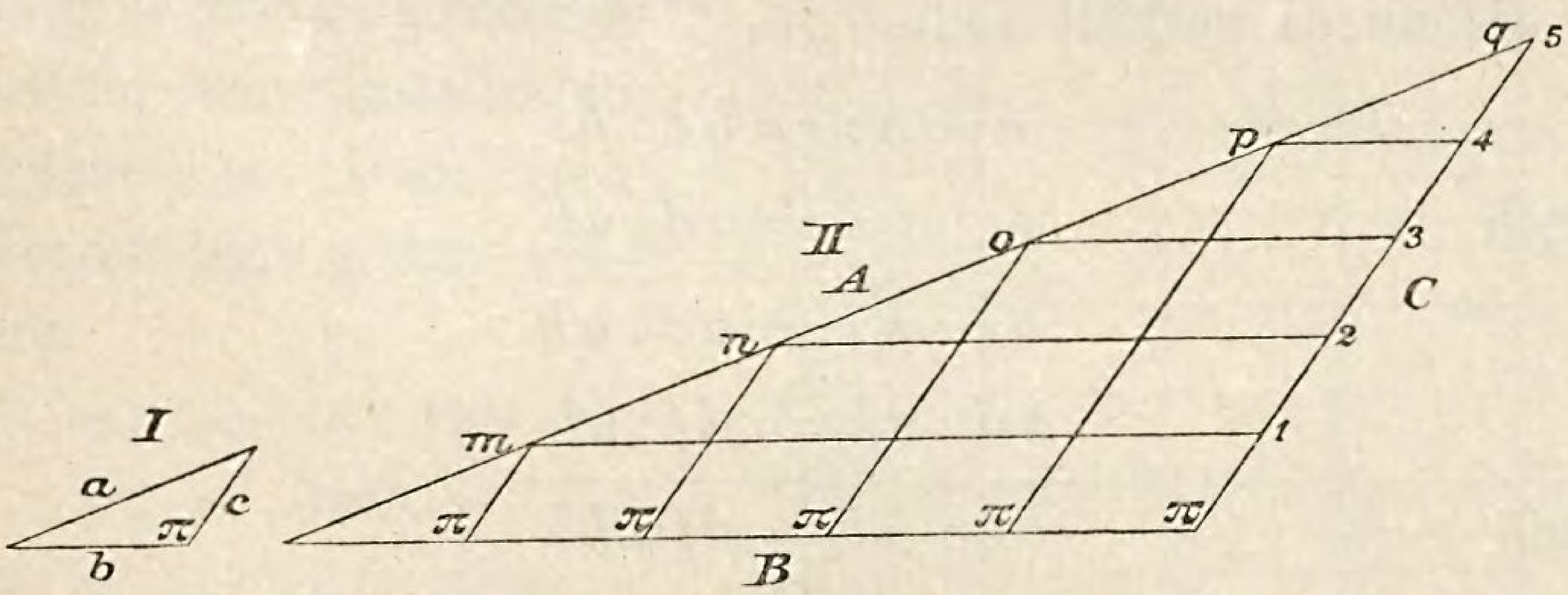


Fig. 10.

als die Einheit angenommen wird und wir dieselbe auf *B* etwa 5 mal abtragen können, so herrscht zwischen *b* und *B* das Verhältnis

$$1 : 5.$$

Zieht man im Winkel π durch die fünf Teilpunkte der Grundlinie *B* gleichlaufende Linien, so bringen wir *A* ebenfalls in fünf Abschnitte, von denen jeder so grofs als *a* ist. Dann steht *a* zu *A* gleichfalls im Verhältnis $1 : 5.$

Die Treffpunkte *m, n, o, p* auf *A* bieten Gelegenheit von ihnen aus zur Grundlinie Parallelen zu ziehen. Der Erfolg ist, dafs auch *C* in fünf gleiche Teile gebracht wird, von denen jeder so grofs als *c* ist. Daraus erhellt, dafs auch *c* zu *C* im Verhältnis von

$$1 : 5$$

steht.

Nun ist, wie der Augenschein lehrt, a gröfser und c kleiner als b; aber auch A ist gröfser und C kleiner als B; denn $A = 5a$, $C = 5c$ und $B = 5b$.

Wie sich nun $b : a : c$ verhält, so $5b : 5a : 5c$ oder was dasselbe ist, so $B : A : C$.

Hieraus geht die unumstöfsliche Wahrheit hervor: Wenn zwei Dreiecke einander ähnlich sind, so sind die homologen Seiten zu einander proportional, d. h. so viel mal die eine Seite gröfser oder kleiner als die gegebene gleichliegende Seite ist, in derselben Weise sind die zugehörigen Dreiecksseiten gröfser oder kleiner als die des gegebenen oder bekannten Dreieckes.

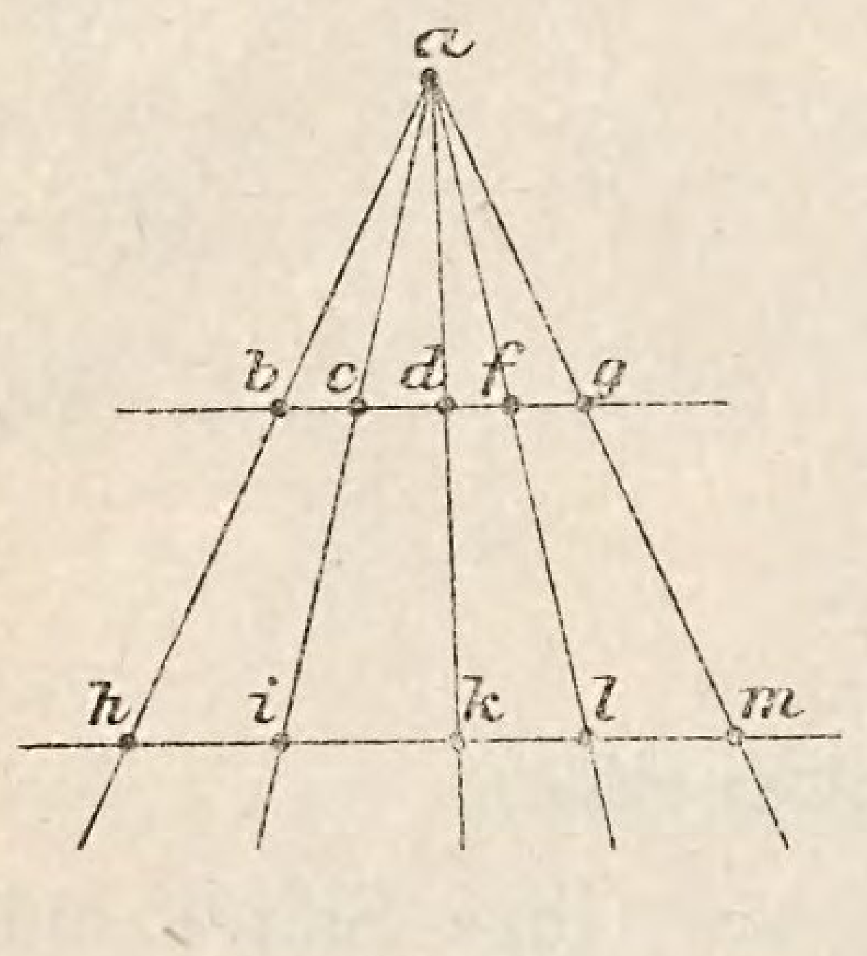


Fig. 11.

Zieht man von einem Punkte a (Fig. 11) durch eine Reihe von Parallelen bg, hm u. s. w. beliebige Strahlen ah, am u. s. w., so schneiden diese die Parallelen in proportionale Teile und werden selbst von den Parallelen proportional geteilt. Denn es verhält sich

	$ac : ai = bc : hi$
aber auch	$ac : ai = ad : ak$
daher	$bc : hi = ad : ak$
aber	$ad : ak = df : kl$
also auch	$bc : hi = df : kl.$

Ferner verhält sich

$$ab : bh = ac : ci = af : fl \ldots$$

d. h. die Strahlen sind proportional geteilt.

Auf der proportionalen Teilung beruht der Transversalmafsstab, der nicht blofs Zehntel-, sogar auch Hundertstelsmillimeter abnehmen läfst. Für genaue Zeichnungen ist dieser Mafsstab überaus wichtig, weshalb Konstruktion und Gebrauch desselben nicht unerwähnt bleiben darf.

Auf die Strecke ac (Fig. 12) trage man 1^{cm} als Längeneinheit mehrmal auf und teile diese Einheit zwischen ab in $10^{mm.}$ Bei a errichtet man auf ac das Perpendikel ah und trägt ein beliebiges Stück as nach Anzahl der Millimeter 10mal auf ah ab, zieht durch die Teilpunkte Parallele zu ac, verbindet den Endpunkt des

9. Millimeters auf ab mit h und zieht endlich durch die übrigen Teilpunkte der Länge ab Parallele zu $9h$, so erhält man den gewünschten Meſsapparat.

Wäre etwa $35{,}7^{\text{mm}}$ abzugreifen, so setze man in m ein und öffne den Zirkel bis r, so stellt mr die verlangte Länge vor. Denn

$$\begin{aligned} mr &= mn + nt + tr \\ &= m'b + br' + nt \\ &= 3^{\text{cm}} + 5^{\text{mm}} + nt. \end{aligned}$$

Es verhält sich aber

$$bn : nt = by : xy$$

oder, da $bn = 7$, $by = 10$ und $xy = 1^{\text{mm}}$ ist

$$7 : nt = 10 : 1^{\text{mm}}$$

wornach $nt = 0{,}7^{\text{mm}}$ ist.

Gelte es die Länge 36,85, so erhalten wir dieselbe in der Strecke uw. Denn nach dem Vorausgegangenen verhält sich

$$8{,}5 : vz = 10 : 1^{\text{mm}}$$

$$vz = 0{,}85.$$

So lassen sich auch 2, 3, 4, 7, 8 Hundertel bestimmen.

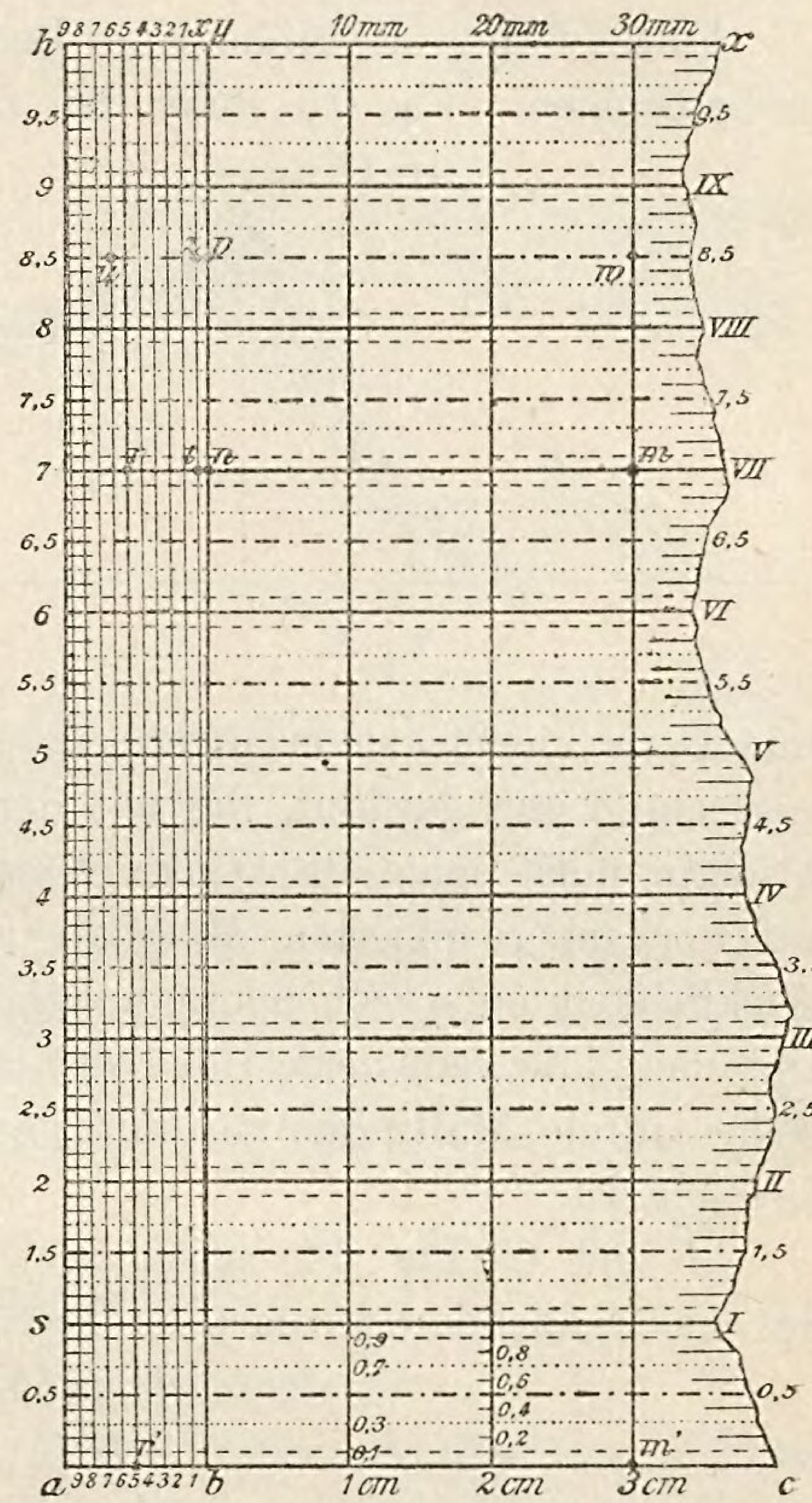


Fig. 12.

Höhen- und Entfernungsbestimmungen unter Anwendung der Proportionalität der Dreiecksseiten.

Angenommen, es handle sich um die Höhe eines Baumes oder Turmes. Steckt man beim Sonnenschein neben einen Baum oder Turm einen Stab von bekannter Länge senkrecht in den Boden, so wirft derselbe wie Baum und Turm einen Schatten. Bringen wir den Schatten des Stabes zu dem des Baumes oder Turmes in ein Verhältnis, so werden wir hieraus über die Höhe des Baumes oder Turmes ins Reine kommen. Miſst z. Ex. der Schatten des 1^{m} langen

Stabes 1,5^{m} und der Baumschatten 15^{m}, so ist die Höhe des Baumes aus der Proportion

$$1{,}5 : 15 = 1 : x$$

zu finden. Sie entziffert 10^{m} Höhe.

Es sei ferner die Höhe eines Berges, wenn auch nur annähernd, zu bestimmen. Fig. 13 stelle den zu messenden Berg vor.

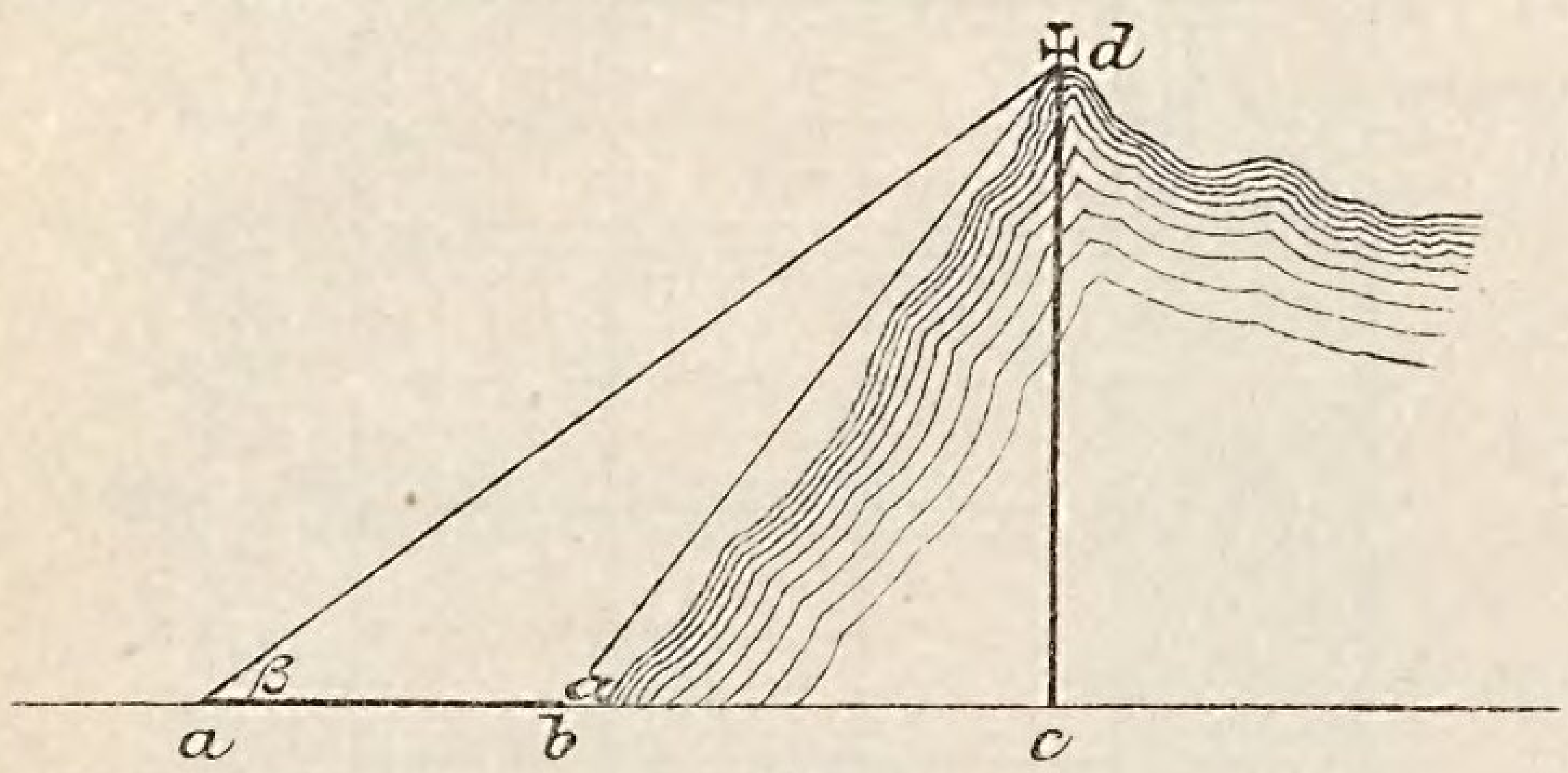


Fig. 13.

Mit einem Stab läſst sich hier nichts anfangen; denn der Punkt *c*, welcher senkreckt unter *d* liegt, steckt im Berge selbst und ist darum unnahbar. Höhenwinkel und Dreieckskonstruktionen sind die alleinigen Hilfsmittel. Um eine Basis hierfür zu erlangen, messe man von *a* nach *b*, wodurch man eine Linie gewinnt, die mit dem Punkte *c* in einer Ebene liegt. Alsdann miſst man die Winkel *b a d* und *a b d* ab und konstruiert auf der im reduzierten Maſsstab aufgetragenen Basis *a b* ein der Wirklichkeit entsprechendes ähnliches Dreieck. Das Perpendikel *d c* gibt dann die reduzierte Höhe des Berges, aus welcher die wirkliche Höhe durch Multiplikation mit der Reduktionszahl leicht zu erforschen ist.

A und *C* (Fig. 14) seien zwei Orte, deren Entfernung trotz des sie trennenden Stromes zu bestimmen ist. *A B* sei die meſsbare Basis des zu konstruierenden Dreiecks *A B C*. Ist ihre Gröſse nach Metern oder Kilometern bestimmt, so visiere man sowohl von *A* als von *B* aus nach *C*. Hierdurch gewinnt man die der Basis anliegenden Winkel und damit die Elemente zur Konstruktion des verlangten Dreieckes. Aus ihm läſst sich alsdann die Entfernung $A\,C = B'$ wie auch $B\,C = C'$ entnehmen.

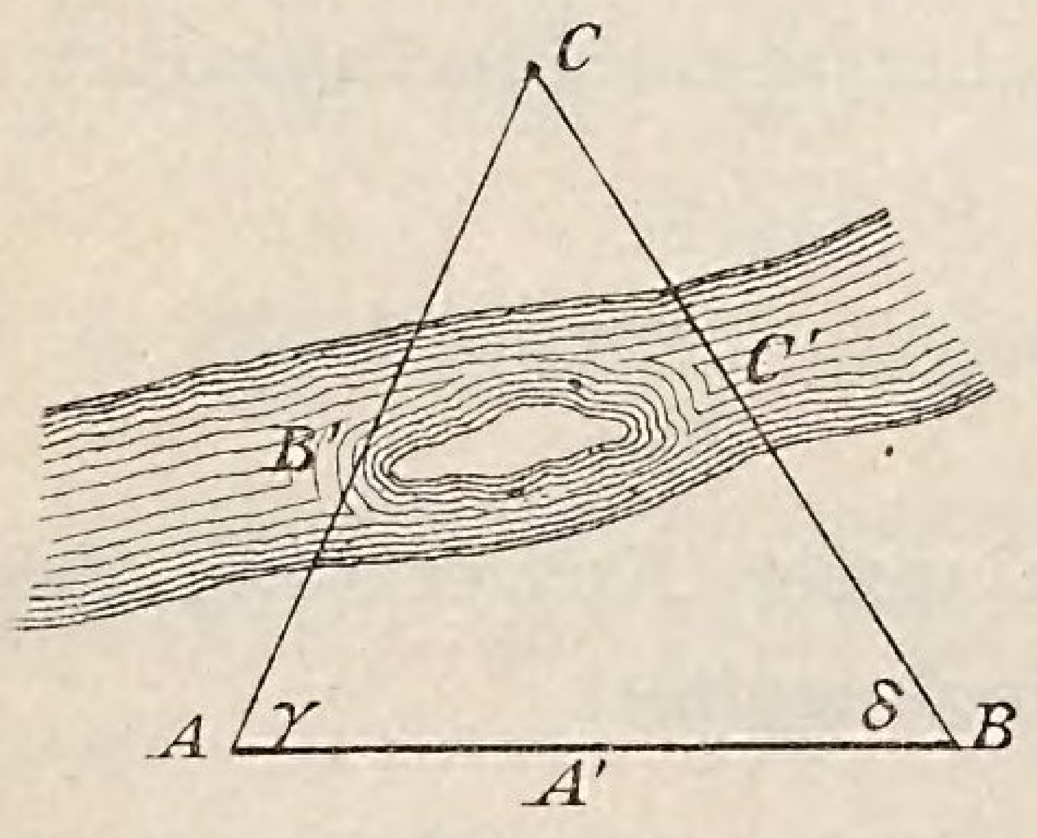


Fig. 14.

Endlich sei die Strecke *CD* (Fig. 15), zu der man natürlicher Hindernisse wegen nicht gelangen kann, zu bestimmen!

Vor allem suche man zwei Punkte auf, von denen man gegen *C* und *D* visieren kann. Sind solche gefunden und durch Stangen kenntlich gemacht, so messe man ihre Entfernung. Dieselbe sei *A B*.

Der Horizontalwinkel $BAC = \alpha$, der $\sphericalangle BAD = \beta$, $\sphericalangle ABC = \gamma$ und der $\sphericalangle ABD = \delta$. Trägt man sie an der Basis AB auf, so gelangt man zu den Dreiecken CAB und DAB, aus welchen man CD, aber auch AC und AD, ferner auch BC und BD entnehmen kann.

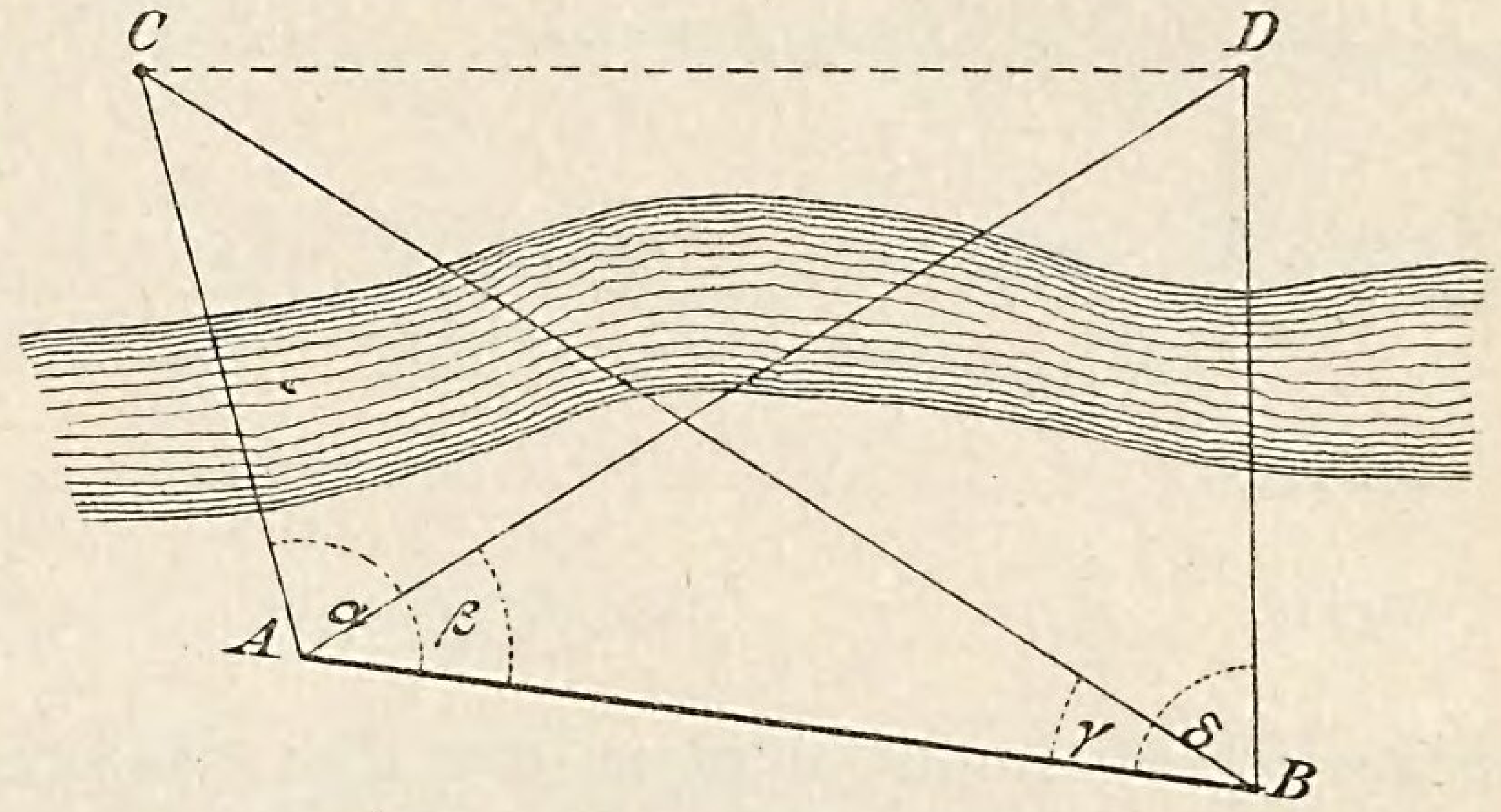


Fig. 15.

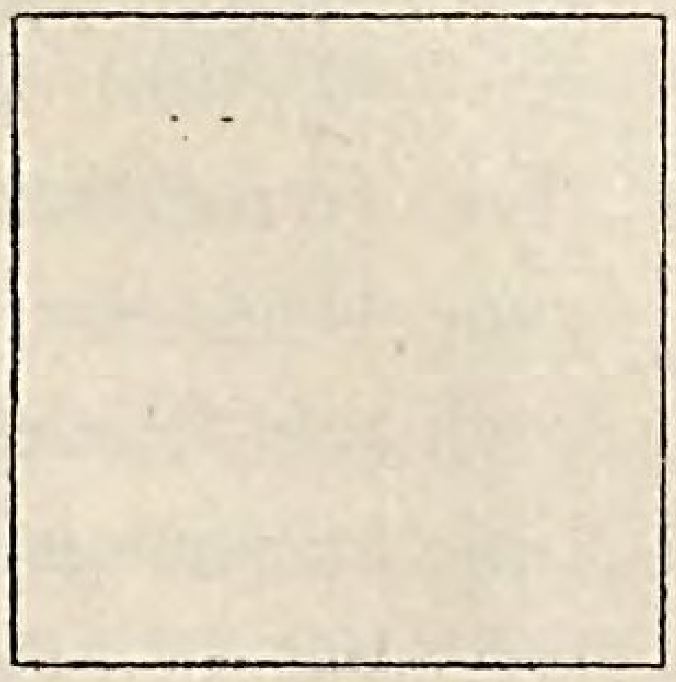
Nach dieser Methode verfährt man bei einer Landesvermessung. Eine Linie wird mit aller Sorgfalt gemessen; denn sie hat als Basis zu dienen. Eine Reihe ausgezeichneter Punkte (Turmspitzen, Baumwipfel, Berggipfel etc.) werden durch Visierlinien verknüpft und so ein Dreiecksnetz erzeugt, aus welchem die Lage und Entfernung der betreffenden Punkte alsdann bestimmbar wird. Die Methode selbst, da sie mit Dreiecken und deren Winkel hantiert, wird Triangulation geheifsen. Willebrord Snellius, ein Holländer, hat diese Methode der Landesvermessung 1615 zuerst in Anwendung gebracht und seit jener Zeit ist sie in allen Kulturstaaten in Gebrauch.

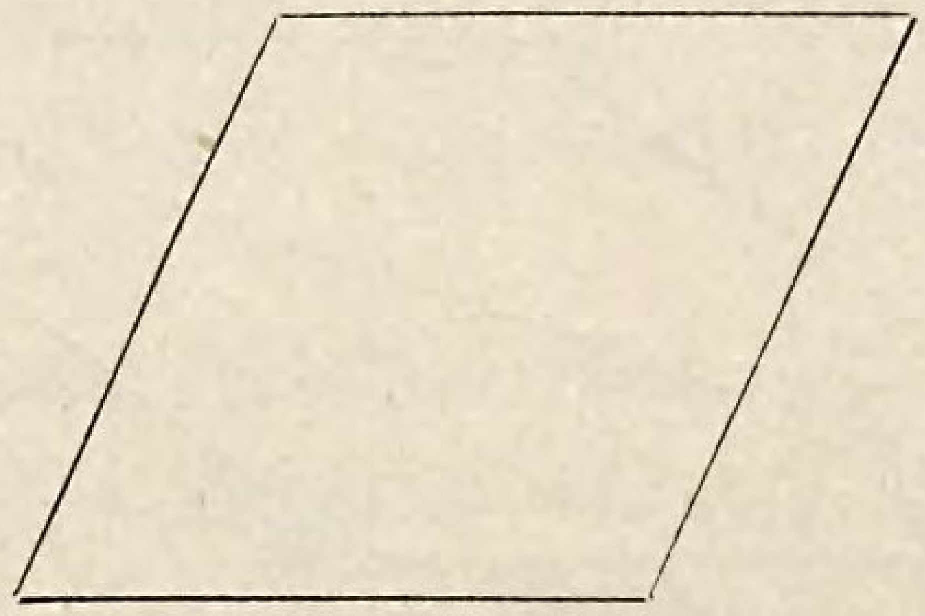
Vom Viereck.

Das Viereck im allgemeinen.

Ein Viereck ist eine von vier Seiten eingeschlossene, ebene Figur.

Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel laufen, heifst ein Parallelogramm. Sind dessen vier Seiten einander gleich und die Winkel R (Fig. 16), so heifst es ein


Fig. 16.


Fig. 17.

Quadrat. Sind die vier Seiten gleich und die Winkel keine R, so heifst das Viereck ein Rhombus oder eine Raute (Fig. 17). Rechteck

wird das Parallelogramm genannt, wenn die Winkel R und nur zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind (Fig. 18). Sind jedoch bei einem Viereck zwei Seiten parallel, die beiden andern nicht

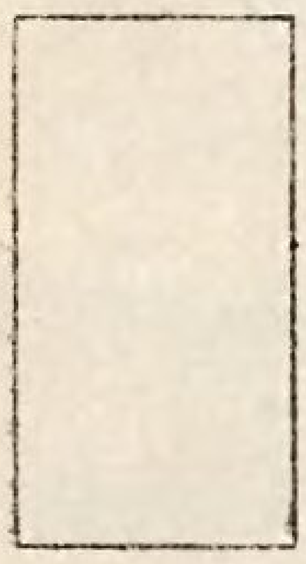


Fig. 18.

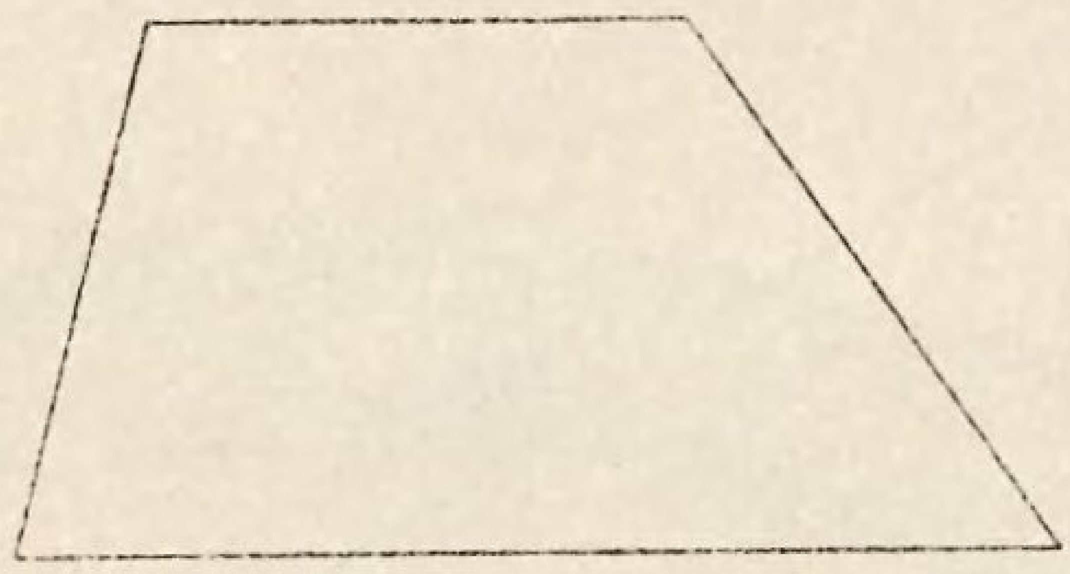


Fig. 19.

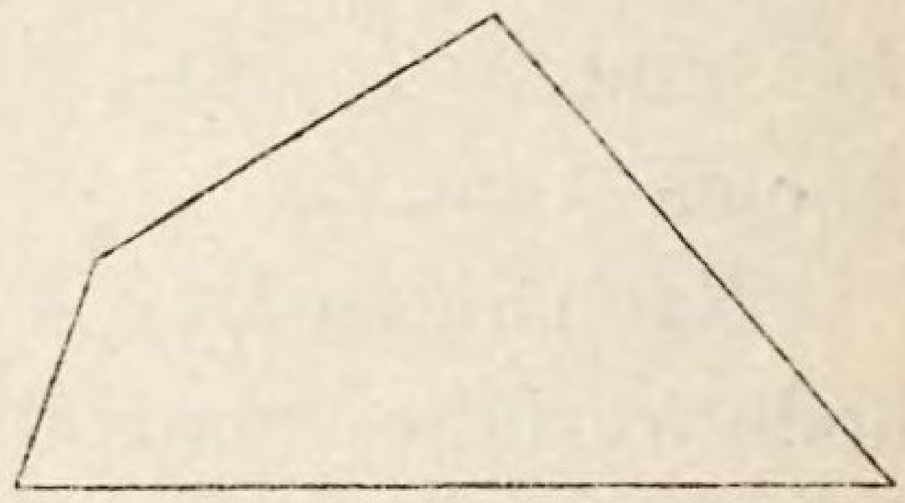


Fig. 20.

(Fig. 19), so nennt man es ein Paralleltrapez oder Trapezoid. Ist in einer vierseitigen Figur keine Seite mit einer andern parallel (Fig. 20), so ist sie ein Trapez.

Die Höhe eines Parallelogrammes und die Diagonale oder Ecklinie in demselben.

Um die Höhe eines Parallelogrammes (Fig. 21) bestimmen zu können, fällt man von der Seite b auf die Grundlinie a das Perpendikel h. Zu dem gleichen Resultat gelangt man, wenn man auf die Verlängerung der Grundlinie in m eine Senkrechte errichtet; denn es ist leicht einzusehen und zu beweisen, dafs $h' = h$ ist. Unter der Höhe eines Parallelogrammes versteht man hiernach nichts anderes als die senkrechte Entfernung der Grundlinie von der ihr gegenüberliegenden Seite.

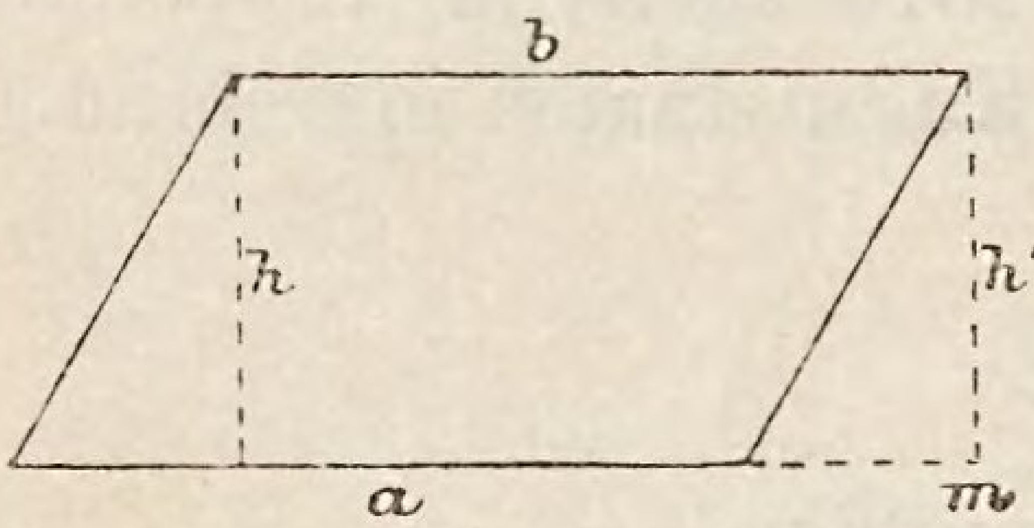


Fig. 21.

In dem Viereck (Fig. 22) ist die Ecklinie oder Diagonale $b\,c$ gezogen. Dieselbe bringt den Winkel c in die Winkel $\alpha + \beta$ und den Winkel b in die Winkel $\gamma + \delta$ und damit wird die vierseitige Figur in zwei Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Grundlinie $b\,c$ zerlegt. Ein Dreieck schliefst in sich $2\,R$ ein; ein Viereck alsdann jedesmal $2 \times 2\,R$ oder $4\,R$. Nun ist ferner $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \delta$ und $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \gamma$ als Wechselwinkel. Da Grundlinie und die ihr anliegenden Winkel

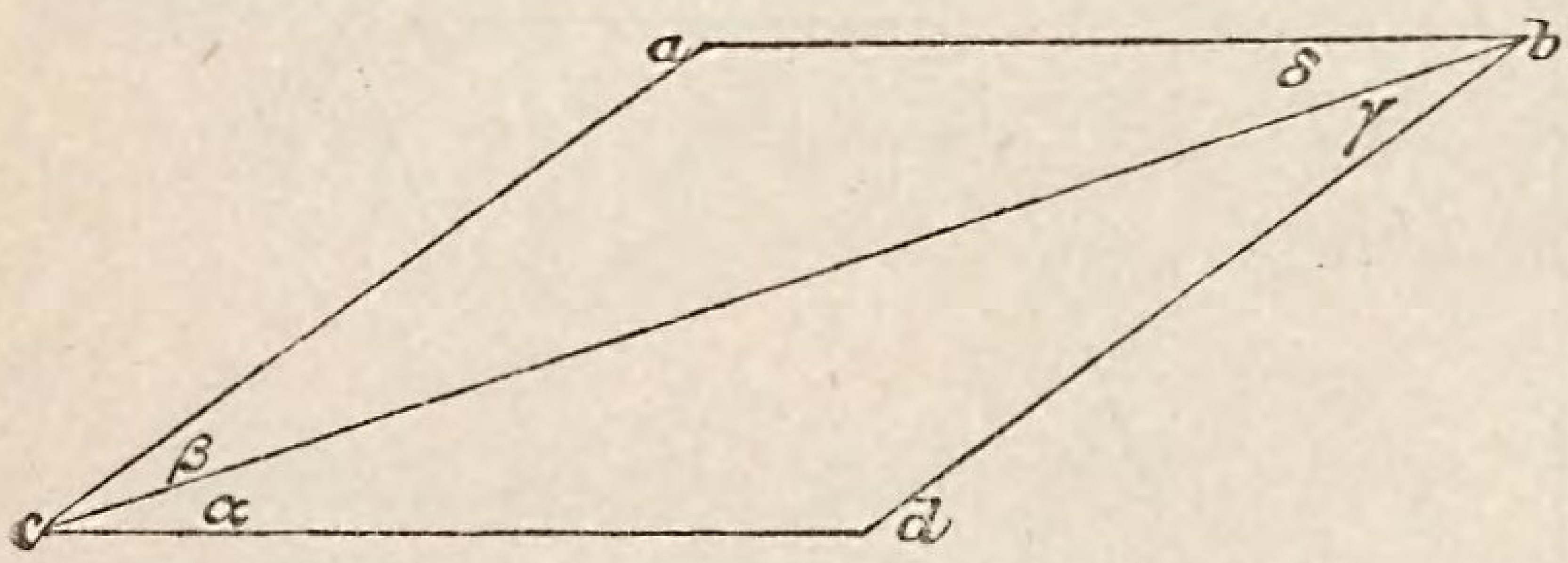


Fig. 22.

einander gleich sind, so müssen beide Dreiecke kongruent sein und sich decken. Hieraus folgt,

1. dafs ein Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat;
2. dafs die in einem Viereck gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind und
3. dafs die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms nicht nur parallel, sondern auch gleich sind.

Vom Kreis.

Der Kreis im allgemeinen.

Ein Kreis entsteht, wenn eine Gerade um einen ihrer Endpunkte so lange in Drehung versetzt wird, bis sie wieder in ihre vorige Lage gleich wie der Zeiger einer Uhr zurückgekehrt ist. Der in Drehung versetzte Endpunkt dieser Geraden kann keine andere Spur als eine geschlossene, krumme Linie, die wir Kreislinie oder schlechtweg Kreis nennen, hinterlassen. Die Punkte desselben stehen von dem andern Endpunkt der Geraden gleich weit ab. Diesen festen oder Drehpunkt heifst man Mittelpunkt oder Zentrum. Der Abstand eines Punktes der Kreislinie von dem Zentrum heifst Halbmesser oder Radius. Die Kreislinie wird auch Peripherie und ein Abschnitt von ihr Bogen genannt. Eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht und zwei Peripheriepunkte verbindet, führt den Namen Durchmesser oder Diameter. Derselbe ist doppelt so grofs, wie der Radius. Alle Radien und somit auch alle Durchmesser ein und desselben Kreises sind einander gleich. Eine Gerade, die zwei Peripheriepunkte verbindet, ohne dafs sie durch das Zentrum geht, wird Sehne und eine verlängerte Sehne Sekante oder Schneidelinie genannt. Ein Kreis kommt, wie aus Seite 4 bekannt sein dürfte, einer vollen Umdrehung oder einem Winkel von 360^0 gleich. Sohin mifst man Bogen und Winkel mit einem und demselben Mafs.

Jeder von zwei Radien gebildeter Winkel wird ein Zentriwinkel, der von zwei Sehnen eingeschlossene Winkel ein Peripheriewinkel und endlich der von zwei Sekanten gebildete Winkel ein Sekantenwinkel geheifsen. Der Bogen, welcher zwischen zwei Radien liegt, umfafst ebensoviele Grade wie der zugehörige Zentriwinkel, er wird durch diesen gemessen. Teilt man

den Kreis durch eine Sehne in zwei Teile, so heifst jeder Abschnitt ein Segment, zerlegt man ihn durch zwei Radien in zwei Teile, so nennt man jeden Teil einen Ausschnitt oder Sektor.

Zieht man von dem Halbierungspunkt einer Sehne eine gerade Linie nach dem Mittelpunkt des Kreises (Fig. 23), so steht sie rechtwinklig auf der Sehne. Denn

$$a z = z b \text{ (als Radien)}$$
$$a d = b d$$
$$d z = d z$$
$$\triangle\, a d z \cong \triangle\, b d z \text{ und somit}$$
$$\sphericalangle\, a d z = \sphericalangle\, b d z.$$

Da beide Winkel zu der Klasse der Nebenwinkel gehören und sie einander gleich sind, so ist jeder von ihnen ein R. Die Linie $z d$ steht, was mit zu beweisen war, auf der Sehne $a b$ senkrecht.

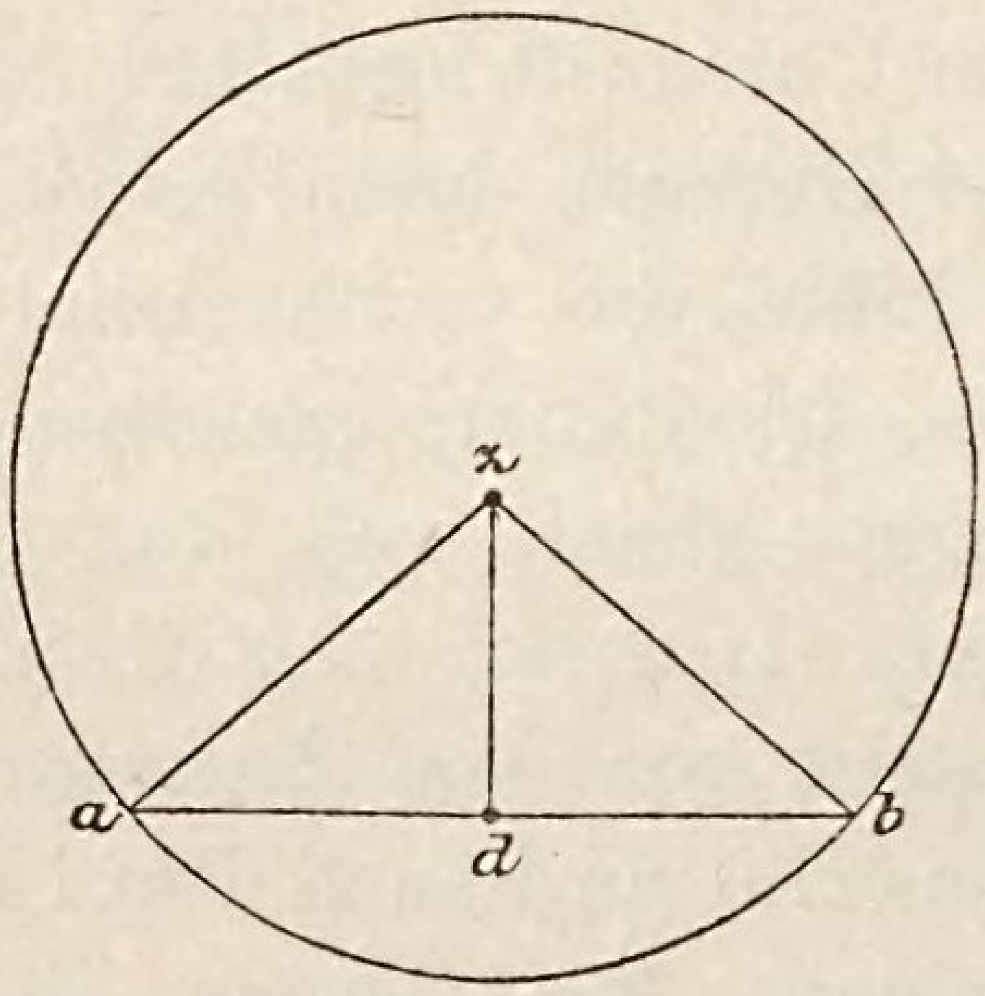


Fig. 23.

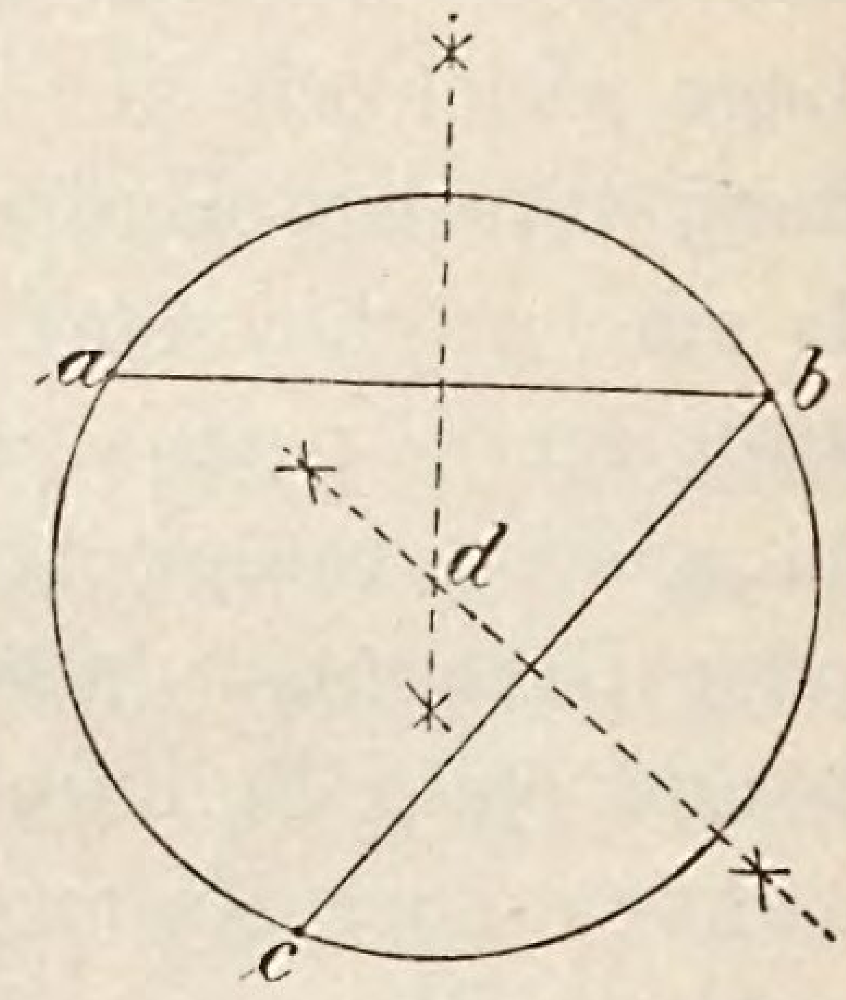


Fig. 24.

Wenn sonach alle Geraden auf dem Halbierungspunkt einer Sehne senkrecht das Zentrum treffen, so darf man nur in zwei Sehnen derartige Perpendikel errichten, um den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises aufzufinden (Fig. 24).

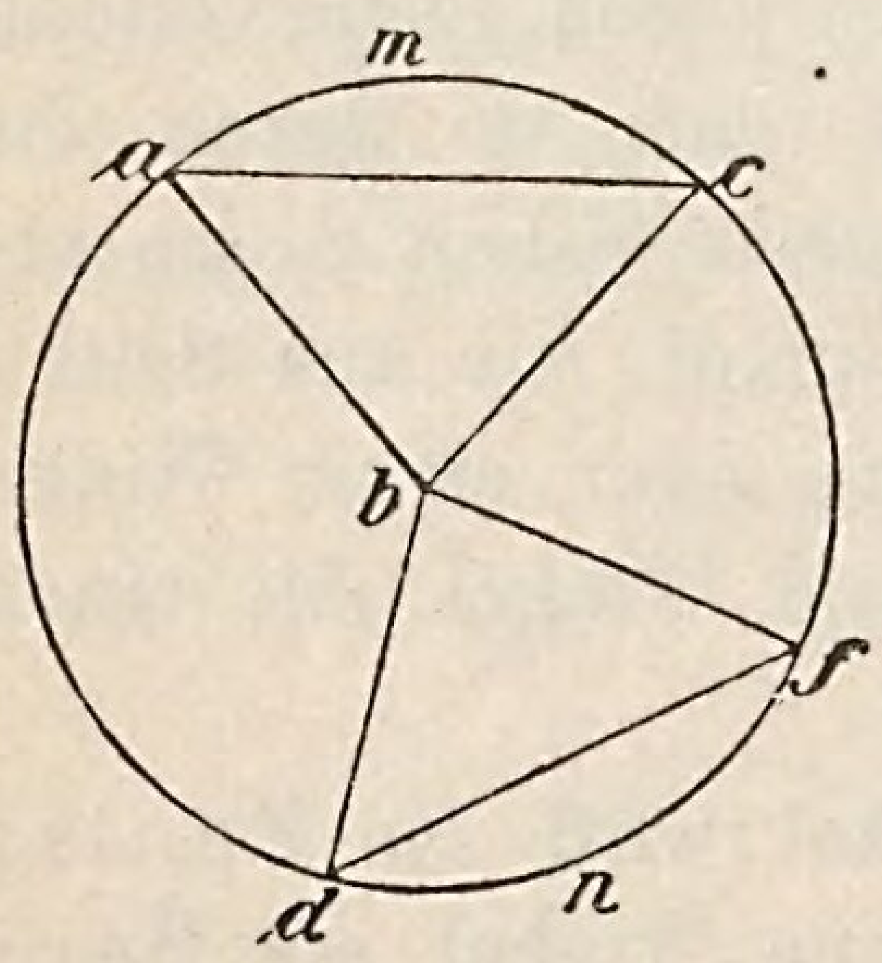


Fig. 25.

In demselben Kreise oder in Kreisen mit gleichen Radien gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Bogen und gleiche Sehnen. Bei Fig. 25 sei $\sphericalangle\, abc = \sphericalangle\, dbf$, alsdann ist arc $amc =$ arc dnf und Sehne $ac =$ Sehne df. Da die Geraden ab, bd, bc, bf Radien ein und desselben Kreises sind, so ist $ab = bd$ und $bc = bf$. Ferner ist $\sphericalangle\, abc = \sphericalangle\, dbf$, sohin $\triangle\, abc \cong dbf$ und Sehne $ac = df$. Indem gleichen Winkeln gleiche Bogen entsprechen, so müssen sich aufser den Sehnen auch

die Bogen *amc* und *dnf* decken. Zugleich gewahren wir, dafs beide Sehnen vom Mittelpunkt gleichweit entfernt sind. Blicken wir auf Fig. 24, so entdecken wir, dafs die gröfsere Sehne dem Mittelpunkt näher liegt als die kleinere. Die gröfste Sehne ist der Durchmesser, sie geht durch den Mittelpunkt selbst.

Soll nun durch zwei Punkte *a* und *b* (Fig. 26) eine Schar von Kreisen gelegt werden, so verbinden wir sie zunächst durch eine

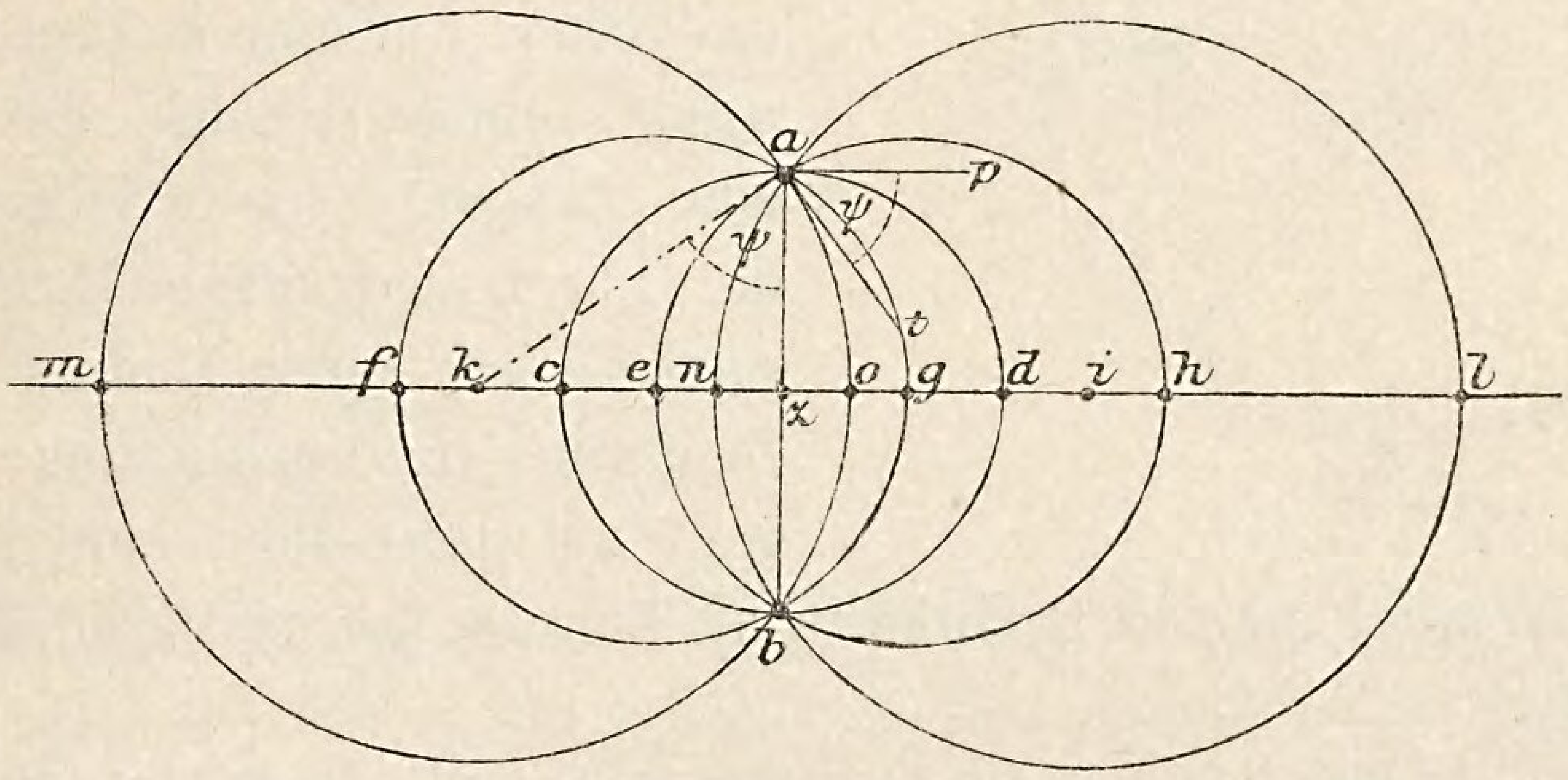


Fig. 26.

Gerade, die wir als die gemeinsame Sehne aller dieser Kreise betrachten. Halbieren wir dieselbe und setzen auf sie die Senkrechte *lm* und bezeichnen wir auf ihr die Punkte *z, e, k, g, i* als Kreismittelpunkte, so ist die Entfernung derselben von *a* oder *b* der jeweilige Radius der zu konstruierenden Kreise. Von ihnen aus öffnen wir sohin den Zirkel stets gegen *a* oder *b* und beschreiben die begehrten Kreise. So laufen sie alle durch die gegebenen Punkte und ihre Mittelpunkte liegen samt und sonders auf der im Halbierungspunkt errichteten Senkrechten.

Tangente, Zentri-, Peripherie-, Tangential- und Sekantenwinkel.

Schneidet eine Gerade die Peripherie in zwei Punkten nach Fig. 27 etwa in *a* und *b*, so fällt notwendigerweise ein Stück derselben in den Kreis. Denkt man sich die Gerade *ab* in *a* befestigt und rückt man dieselbe von *b* über *c* nach *d*, so wird das in den Kreis fallende Stück der Geraden immer kleiner; aber auch der Bogen. Bei *d* bedarf es nur mehr eines geringen Ruckes und die Sekante liegt aufserhalb des Kreises; sie berührt nur mehr den Kreis im Punkte *a*; sie ist zu einer Berührenden oder Tangente geworden. Verknüpfen wir Berührungs- und Mittelpunkt, so haben

wir die kürzeste Entfernung zwischen beiden Punkten, und die Linie *az* mufs sonach senkrecht auf der Tangente stehen. Diese Linie ist aber der Kreisradius selbst und wir können deshalb sagen, der **Radius steht senkrecht auf der Tangente** oder auch: **die Tangente steht senkrecht auf dem Radius.** Diese Wahrnehmung gibt uns ein Mittel an die Hand, auf eine bequeme Art in irgend einem Punkte des Kreises eine Tangente zu errichten. Man darf nur den gegebenen Berührungspunkt durch einen Radius mit dem Zentrum in Verbindung bringen und zu demselben eine Linie im rechten Winkel an die Peripherie ziehen, so hat man die verlangte Tangente.

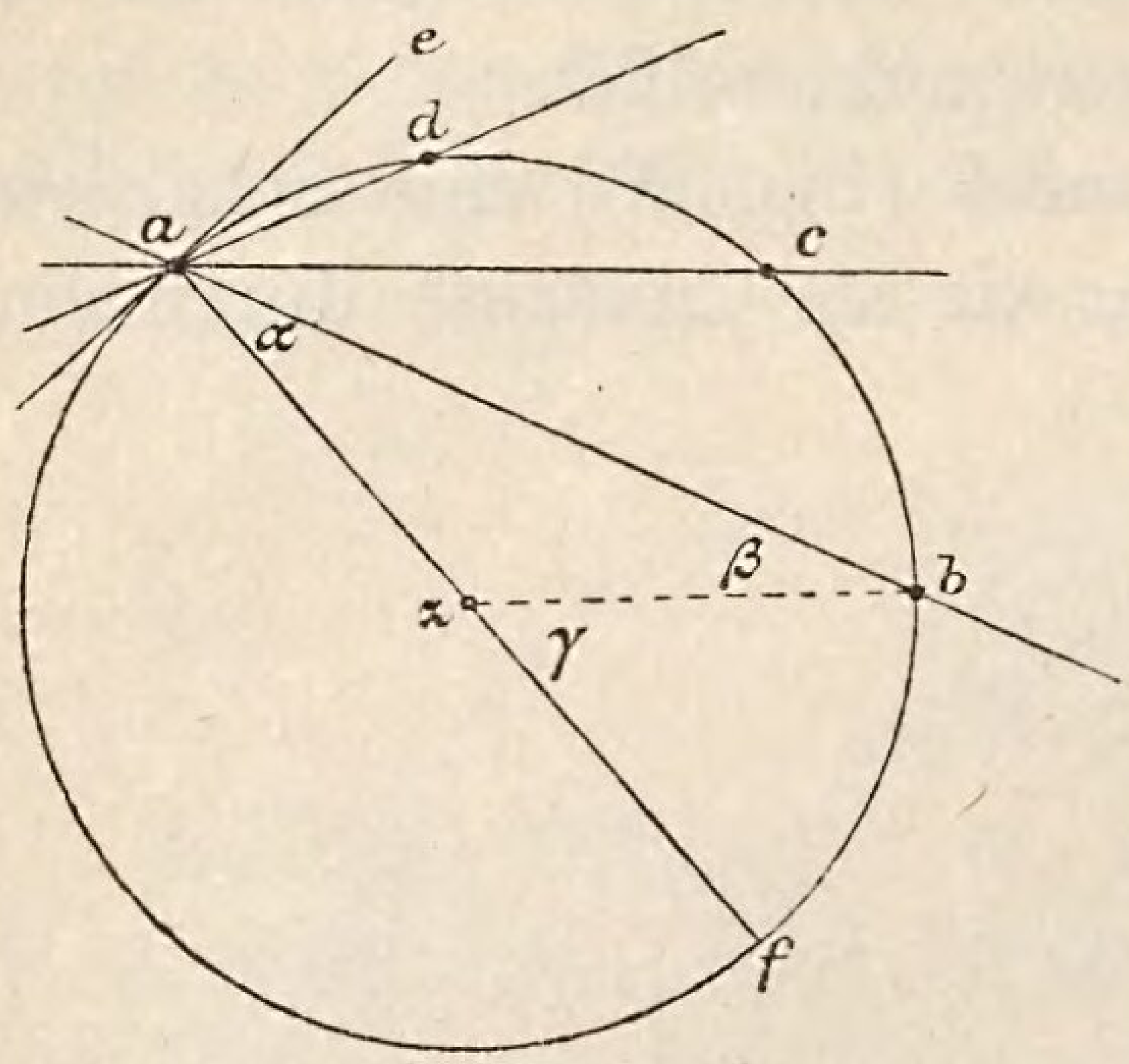


Fig. 27.

Um an die Kreise *adbc* und *aobm* (Fig. 26 S. 17) Tangenten zu legen, errichten wir in *a* auf dem Radius *az* die Senkrechte *ap* und auf dem Radius *ak* die Senkrechte *at*. Um diesen Winkel weichen auch die Bogen *ad* und *ao* ab. So versteht man unter dem Winkel zweier sich schneidenden krummen Linien den Winkel, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkte einschliefsen. Da nun die Radien auf den Tangenten senkrecht stehen, so stehen sie selbst um diesen Winkel auseinander, so ist $\sphericalangle pat = \sphericalangle kaz = \psi$. Damit ist jeder Mittelpunkt auf der Senkrechten *lm* leicht zu ermitteln. In dem Schnittpunkt legt man an den betreffenden Kreis, hier an *ao* eine Tangente; auf sie stellt man im Schnittpunkte *a* eine Senkrechte, welche *lm* in *k* schneidet. So ist *k* der Mittelpunkt und *ka* der Radius für den gesuchten Kreis *aobm*.

Der Winkel *fab* (Fig. 27) heifst ein **Peripheriewinkel**. Verbindet man *b* mit *z*, so hat man einen Zentriwinkel, der mit dem Peripheriewinkel auf gleichem Bogen ruht. Das Dreieck *azb* hat die Radien *az* und *bz* zu Seiten; es ist deshalb gleichschenklig und die Winkel an der Grundlinie sind alsdann gleichgrofs. Der Zentriwinkel γ ist ein Aufsenwinkel zu dem Dreieck *azb*. Von dem ist bekannt, dafs er den gegenüberliegenden Winkeln des Dreiecks gleich sein mufs. Folglich ist

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 2\,\alpha$$

woraus hervorgeht, dafs

$$\sphericalangle \alpha = {}^1\!/_2 \sphericalangle \gamma \quad \text{ist;}$$

also: der Peripheriewinkel ist nur halb so grofs als der Zentriwinkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Demnach ist jeder Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise ruht, ein rechter (Fig. 28), und Peripheriewinkel auf gleich grofsem Bogen sind einander gleich.

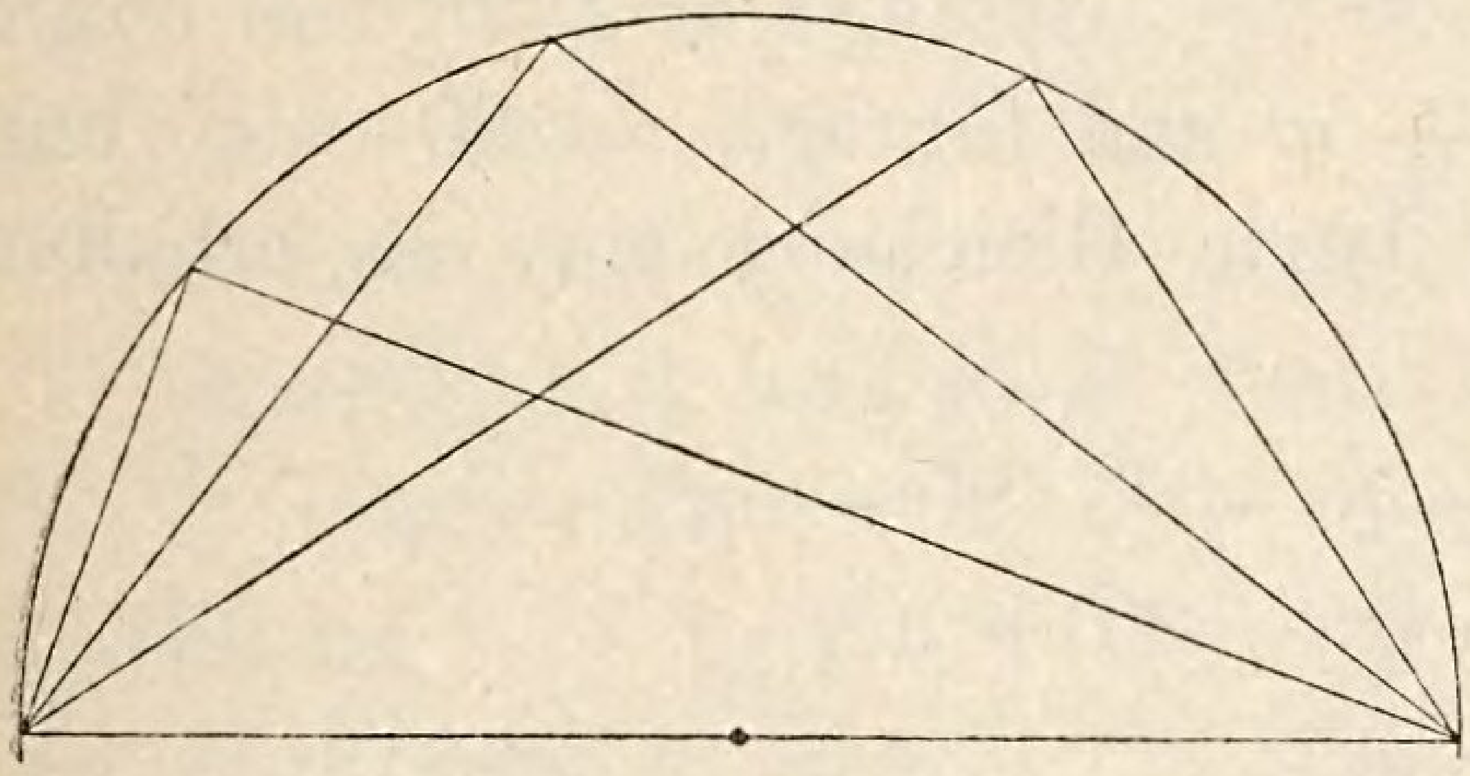


Fig. 28.

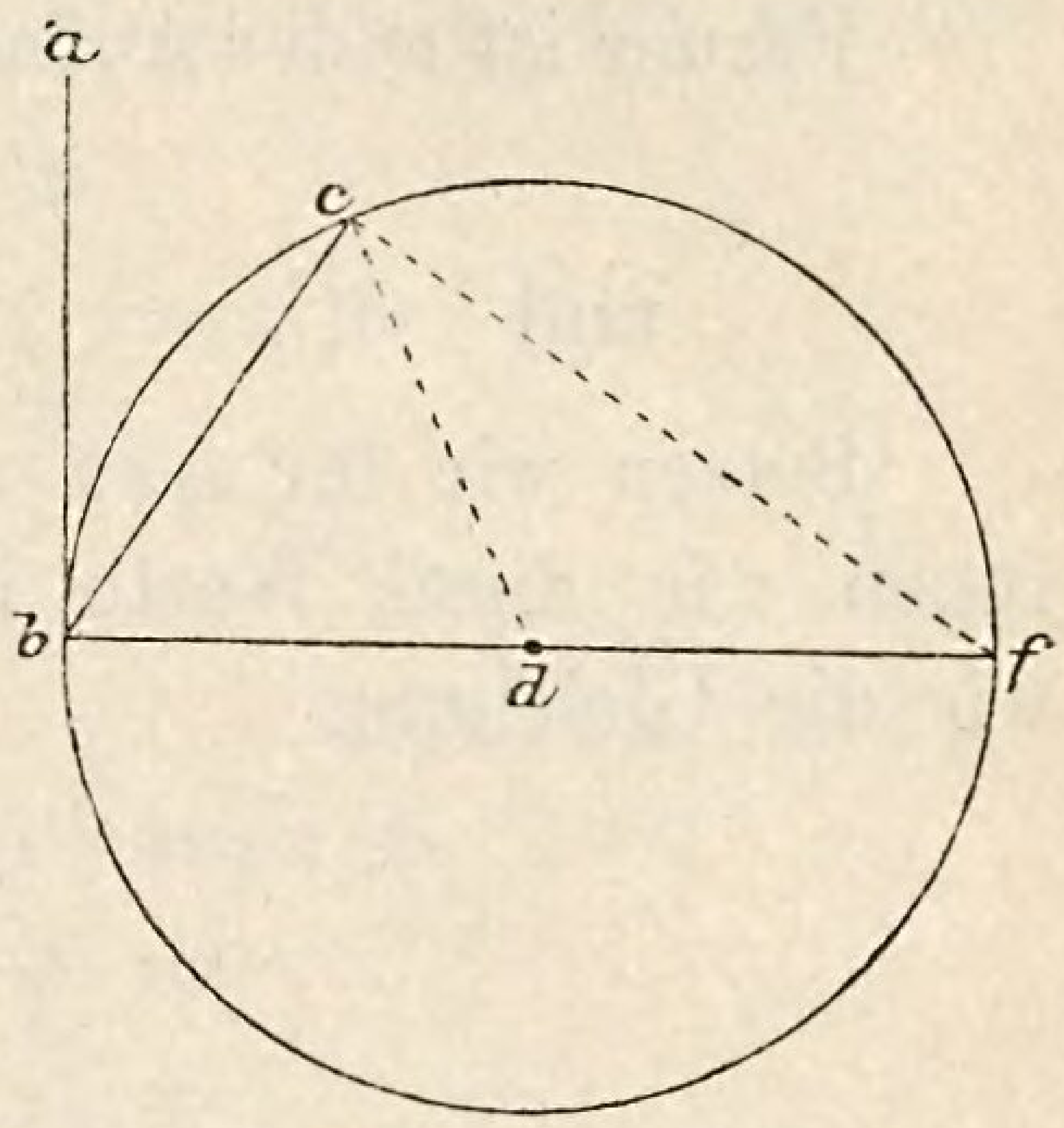


Fig. 29.

Auch der Tangentialwinkel beträgt die Hälfte jenes Zentriwinkels, der mit ihm auf gleichem Bogen ruht. Fig. 29 zeigt den Berührungswinkel $a\,b\,c$, von dem zu beweisen ist, dafs er die Hälfte von $b\,d\,c$ mifst. Zu dem Behufe verbinden wir c mit f. Der Peripheriewinkel $b\,c\,f$ mufs ein rechter sein, da er auf einem Halbkreis aufsteht. Demnach ist

$$b\,c \perp c\,f$$
$$a\,b \perp b\,f, \quad \text{folglich}$$

nach S. 5 $\sphericalangle abc = \sphericalangle bfc$

$$\sphericalangle bfc = \sphericalangle \tfrac{1}{2} bdc.$$

also $\sphericalangle abc = \sphericalangle bfc = \sphericalangle \tfrac{1}{2} bdc$

und somit sind Tangentialwinkel und Peripheriewinkel ein und desselben Kreises einander gleich, wenn sie gleiche Bogen zwischen ihren Schenkeln haben.

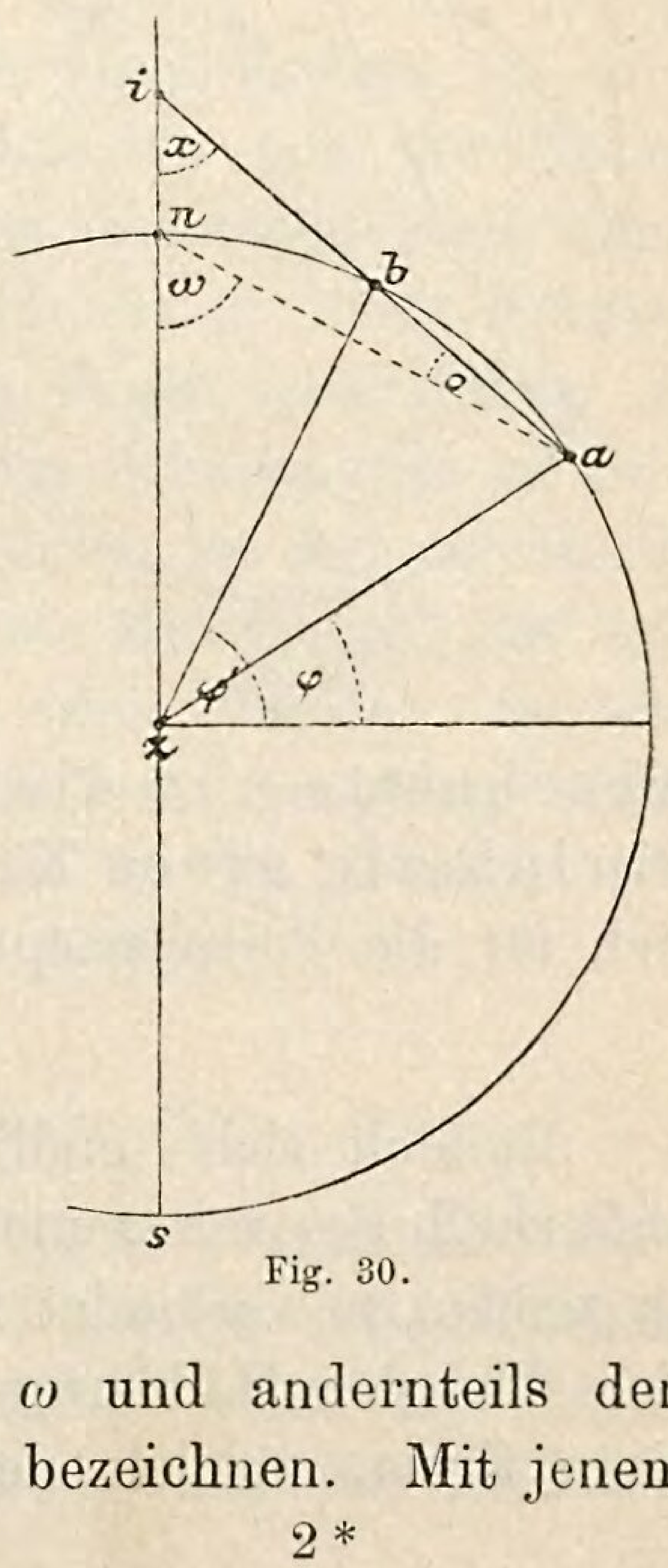


Fig. 30.

Beim Sekantenwinkel hingegen gilt der Satz, dafs er der halben Differenz der zwei Zentriwinkel gleich ist, welche auf den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen stehen. Den Beweis erbringen wir nach Fig. 30. Der Sekantenwinkel ist $s\,i\,a = x$. Ziehen wir $a\,n$, so gewinnen wir einesteils den Peripheriewinkel $s\,n\,a$, den wir mit ω und andernteils den Peripheriewinkel $b\,a\,n$, welchen wir mit o bezeichnen. Mit jenem

hat der Zentriwinkel azs den Bogen as, mit diesem der Zentriwinkel bzn den Bogen bn gemein. Dann ist

$$\sphericalangle\ \omega = \tfrac{1}{2}\, azs \text{ und } o = \tfrac{1}{2}\, bzn.$$

Ferner ist ω der Aufsenwinkel zu dem Dreieck nia. Alsdann ist

$$\sphericalangle\ \omega = \sphericalangle\ x + \sphericalangle\ o$$

$$\text{und } \sphericalangle\ x = \sphericalangle\ \omega - \sphericalangle\ o = \tfrac{1}{2}\, azs - \tfrac{1}{2}\, bzn.$$

Setzen wir für $azs = 90 + \varphi$ und für $bzn = 90 - \varphi'$ und fügen wir diese Werte in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\sphericalangle\ x &= \tfrac{1}{2}(90 + \varphi) - \tfrac{1}{2}(90 - \varphi')\\ &= \tfrac{1}{2}(90 + \varphi - 90 + \varphi')\\ &= \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').\end{aligned}$$

Bei Fig. 31 schneiden sich die Sekanten in i und bilden den Winkel ais. Verbindet man b mit s und n mit a, so müssen die Peripheriewinkel bsi und ban, da sie beide auf dem Bogen bn ruhen, einander gleich und die Dreiecke bsi und nai, weil sie in den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich sein. Alsdann verhält sich

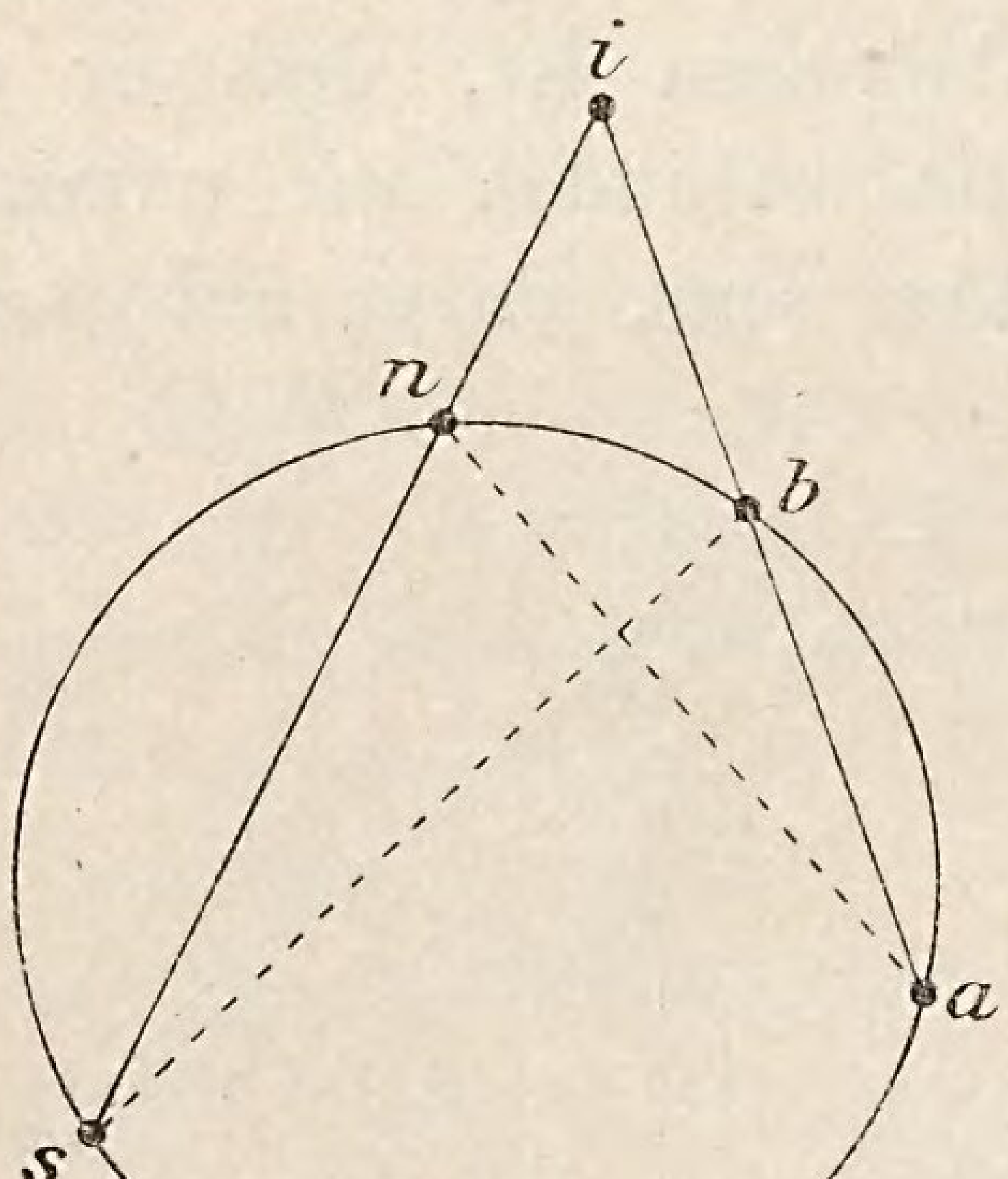


Fig. 31.

$$1.\quad si : bi = ai : in$$

oder auch durch Umstellung der innern Glieder

$$2.\quad si : ai = bi : in,$$

welche Proportion in Worten lautet: Wenn zwei Sekanten sich schneiden, so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äufsern Abschnitte und die vier Punkte s, n, b, a liegen in der Peripherie eines Kreises. Aus der ersten Proportion ergibt sich für die Peripheriepunkte s, n, b, a die Gleichung

$$in \cdot is = bi \cdot ai.$$

Handelt sich's endlich darum, von einem Punkte a (Fig. 32) aufserhalb des um z umschriebenen Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen, so verbindet man a durch eine Gerade mit z und halbiert sie. Um den Halbierungspunkt b mit dem Radius bz schlägt man einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in d und g schneidet.

Verbindet man d wie g mit z und a, so erhält man im Kreise $adzg$ zwei Peripheriewinkel, die auf einem Halbkreis ruhen. Jeder ist somit ein rechter. Es sind aber dz wie gz Radien des um z gezogenen Kreises. Da nun die Linien ad und ag senkrecht auf den Radien stehen, so sind sie die begehrten Tangenten, die durch den Punkt a zu ziehen sind. Nun ist

$$dz = gz$$
$$\sphericalangle\, adz = \sphericalangle\, agz = R$$
$$az = az,$$

folglich ist

$$\triangle\, adz \cong \triangle\, agz$$

und dann ist

$$ad = ag,$$ d. h.

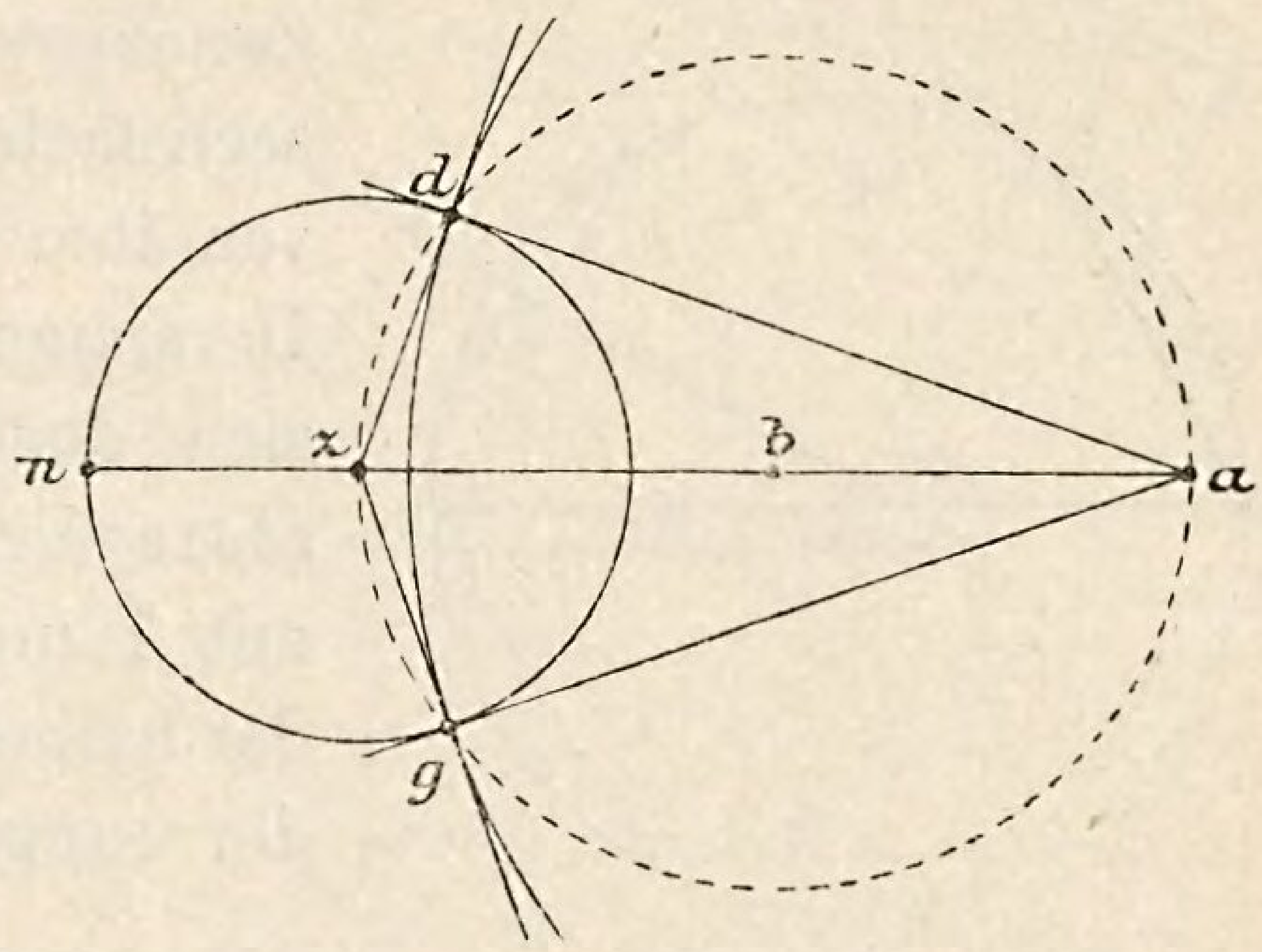


Fig. 32.

a) die zwei von einem Punkte aus nach einem Kreise gezogenen Tangenten sind einander gleich;

b) Kreismittelpunkt z und der gegebene Punkt a liegen auf einer Linie, welche den Winkel halbiert, den die beiden Tangenten zusammen bilden.

Sieht man dz wiederum als Tangente eines Kreises an, der mit dem Radius ad gezogen wird, so schneiden sich die Kreise im rechten Winkel, da ihre Tangenten im Schnittpunkt d einen rechten Winkel einschliefsen. Den Mittelpunkt a eines Kreises, der einen gegebenen Kreis in irgend einem Punkt rechtwinklig zu schneiden hat, findet man, wenn man beim Schnittpunkt d, wie bei dem gegenüberliegenden Punkte g Tangenten an den zu schneidenden Kreis legt. Ihr Treffpunkt a ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und die Tangenten sind seine Radien. Ist die Verbindungslinie oder die Zentrale az gegeben, so genügt eine Tangente. Wo sie die Zentrale schneidet, da ist das Zentrum des gesuchten Kreises und sie selbst ist dessen Radius.

Der Kreisumfang.

In einem gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel 60°. Der Bogen, welcher eine solche Dreiecksseite überspannt, mifst ebenfalls 60°, er selbst ist der sechste Teil der Kreislinie. Sehne und Radius gleichen sich. Somit läfst sich der Radius za (Fig. 33) sechsmal

und der Durchmesser alsdann dreimal im Kreise herumtragen. Diese Wahrnehmung führt uns darauf, die Peripherie nach dem Radius oder Durchmesser zu bestimmen; es gilt nur die Gerade durch Knickungen dahin zu bringen, dafs sie sich mehr und mehr der Kreislinie anschmiegt. So wird das Sechseck zum Zwölf-, Vierundzwanzigeck u. s. f. Dabei reicht der sechsfache Radius nicht mehr, ein Stück von ihm mufs noch hinzugefügt werden. Derartige Versuche haben gelehrt, dafs sich der Radius $3\frac{1}{7}$ mal im Halbkreis abtragen läfst. Bezeichnen wir den Radius mit 1 und $3\frac{1}{7}$ mit π, so ist

der halbe Kreisumfang oder $180^0 = \pi$

der ganze „ „ $360^0 = 2\pi$

der Quadrant oder $90^0 = \frac{\pi}{2}$.

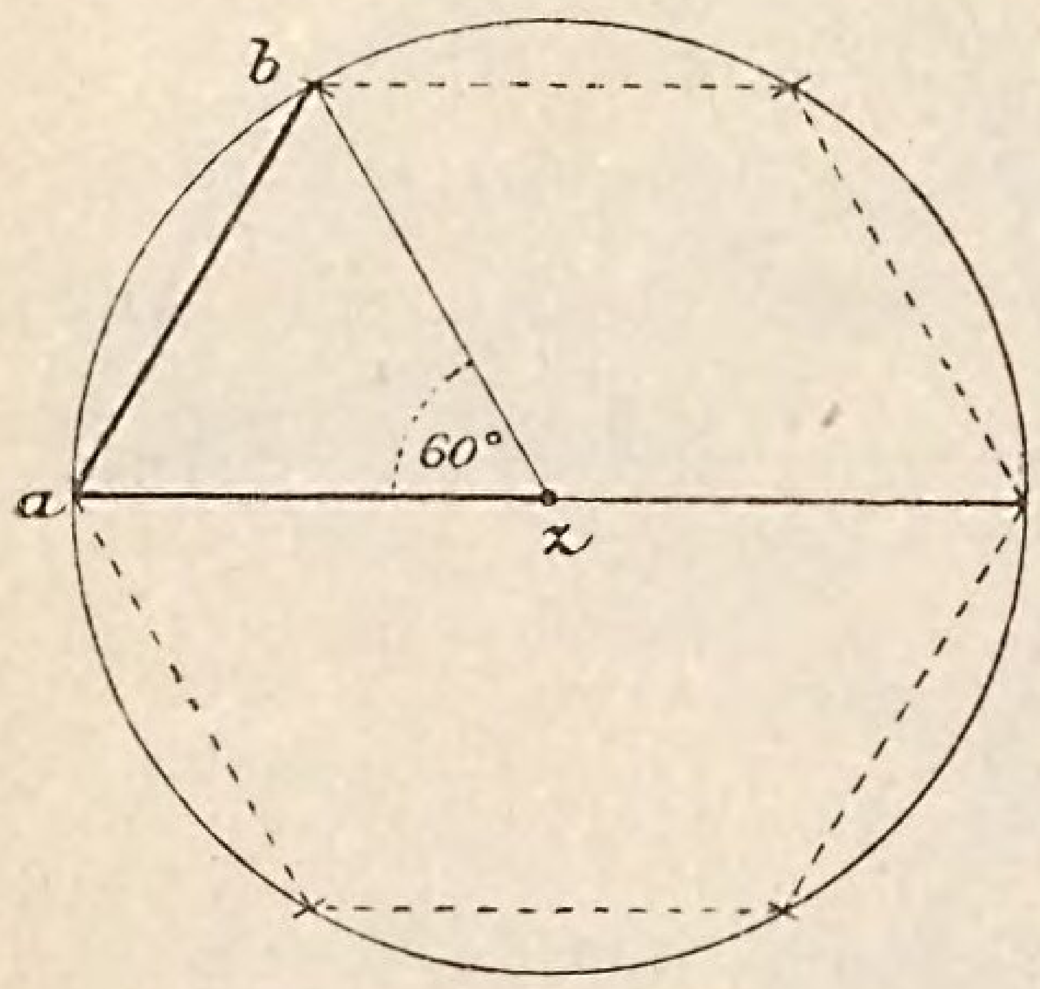


Fig. 33.

Ist jedoch der Radius r, so ist der halbe Kreisumfang $r\pi$, der ganze $2r\pi$. Somit findet man die Peripherie eines Kreises, wenn man den doppelten Radius oder den Durchmesser mit der Ludolphine d. i. mit π (= 3,1456) multipliziert. Der Radius ergibt sich, wenn wir die Peripherie mit P bezeichnen, aus der Gleichung

$$r = P : 2\pi.$$

Die mittlere Proportionale und der Pythagoräische Lehrsatz.

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die den rechten Winkel umschliefsenden Seiten K a t h e t e n und die ihn überspannende Gerade H y p o t e n u s e. Fällt man von dem Scheitel des rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 34) ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so wird dieses Dreieck in zwei Dreiecke geteilt, welche sowohl unter sich als auch dem ganzen gegenüber ähnlich sind.

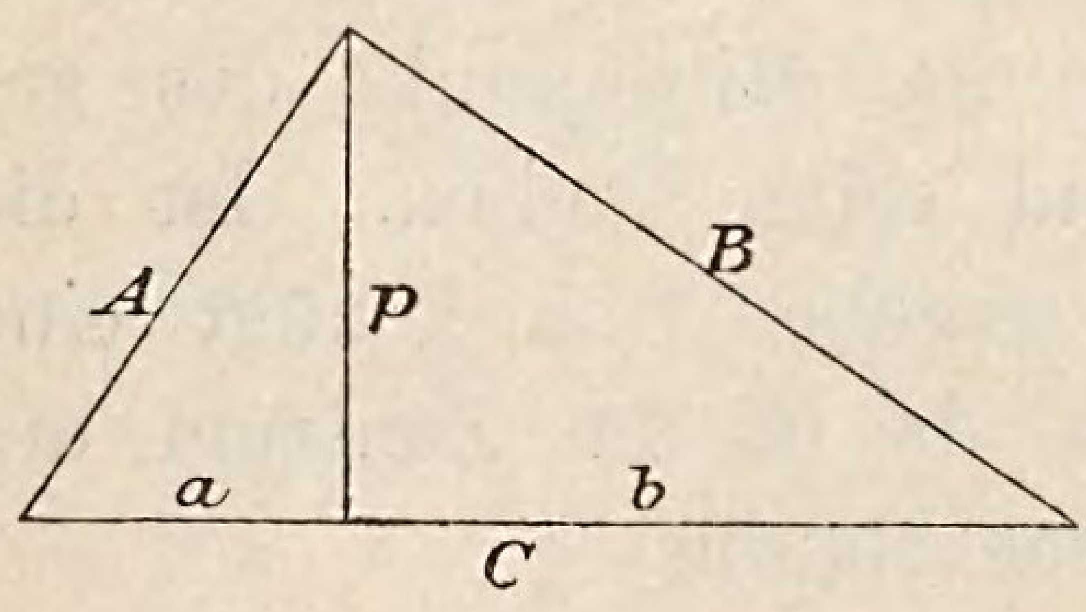


Fig. 34.

Aus der Ähnlichkeit des Teildreieckes Aap und des ganzen Dreiecks ABC ergibt sich die Proportion

$$a : A = A : C.$$

Aus der Ähnlichkeit des andern Teildreieckes Bbp und dem ganzen

$$b : B = B : C.$$

Darnach ist die Kathete A die mittlere Proportionale zwischen der Seite a und der ganzen Hypotenuse und die Kathete B die mittlere Proportionale zwischen der Seite b und der ganzen Hypotenuse.

Die Ausrechnung der vorstehenden Ansätze liefern die Resultate $A^2 = a \cdot C$
$B^2 = b \cdot C.$

Konstruiert man diese gefundenen Werte, so gelangt man, wie Fig. 35 zeigt, zu dem wichtigen Lehrsatz: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Dieser Satz ist unter dem Namen Pythagoräischer Lehrsatz allerwärts bekannt.

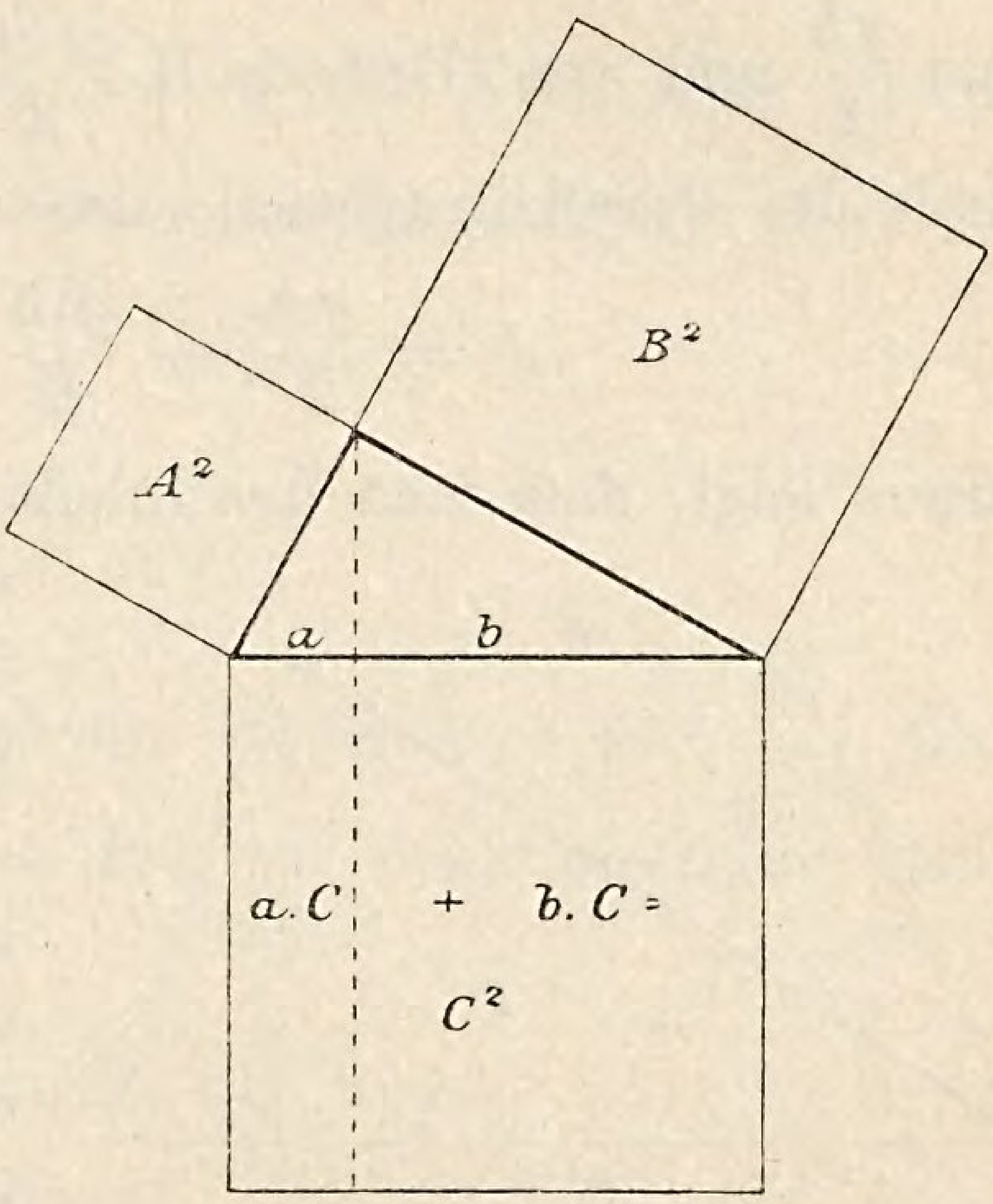


Fig. 35.

Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren.

Die Fläche hat eine Ausdehnung in die Länge und in die Breite. Dieselbe kann nur wieder durch eine Fläche, die als Einheit angenommen wird, gemessen werden. Durch Berechnung kann man ihre Ausdehnung gleichfalls erforschen. Das Verfahren hierfür ist äufserst einfach und dürfte durch folgendes Beispiel hinreichend erörtert sein. Bei einem Rechteck, das z. B. 5^{cm} in die Breite und 7^{cm} in Länge mifst, erhalten wir der Breite nach 5 Längsstreifen. Jeder Streifen enthält 7 Quadrate von 1^{cm} Länge und 1^{cm} Breite. Die 5 Längsstreifen enthalten alsdann 5×7 Quadrate, d. i. 35 Quadrate von 1^{cm} Breite und 1^{cm} Länge. Zu dem Resultat gelangen wir auch, sobald wir Länge und Breite mit einander multiplizieren. Wenn J den Inhalt der Fläche, l ihre Länge und b ihre Breite bedeutet, so ist der Flächeninhalt eines Vierecks in der Formel enthalten $J = l \cdot b.$

Ein Dreieck ist die Hälfte eines Viereckes, wenn beide von gleicher Höhe und Grundlinie sind. Sein Inhalt ist alsdann, wenn g die Grundlinie und h die Höhe bezeichnet,

$$J = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h = g \cdot \frac{h}{2}.$$

Durch eine Diagonale läſst sich ein Paralleltrapez in zwei Dreiecke zerlegen (Fig. 36), dessen eine Grundlinie g und die andere g', die Höhe beider h sein soll. Die Fläche von Dreieck I ist dann $\frac{gh}{2}$ und von Dreieck II $\frac{g'h}{2}$. Die Summe beider gibt den Inhalt des Paralleltrapezes; also

$$J = \frac{gh}{2} + \frac{g'h}{2} = h \cdot \frac{g+g'}{2},$$

woraus folgt, daſs man den Inhalt eines Paralleltrapezes auch findet, wenn man seine Höhe mit der halben Summe der parallelen Seiten multipliziert.

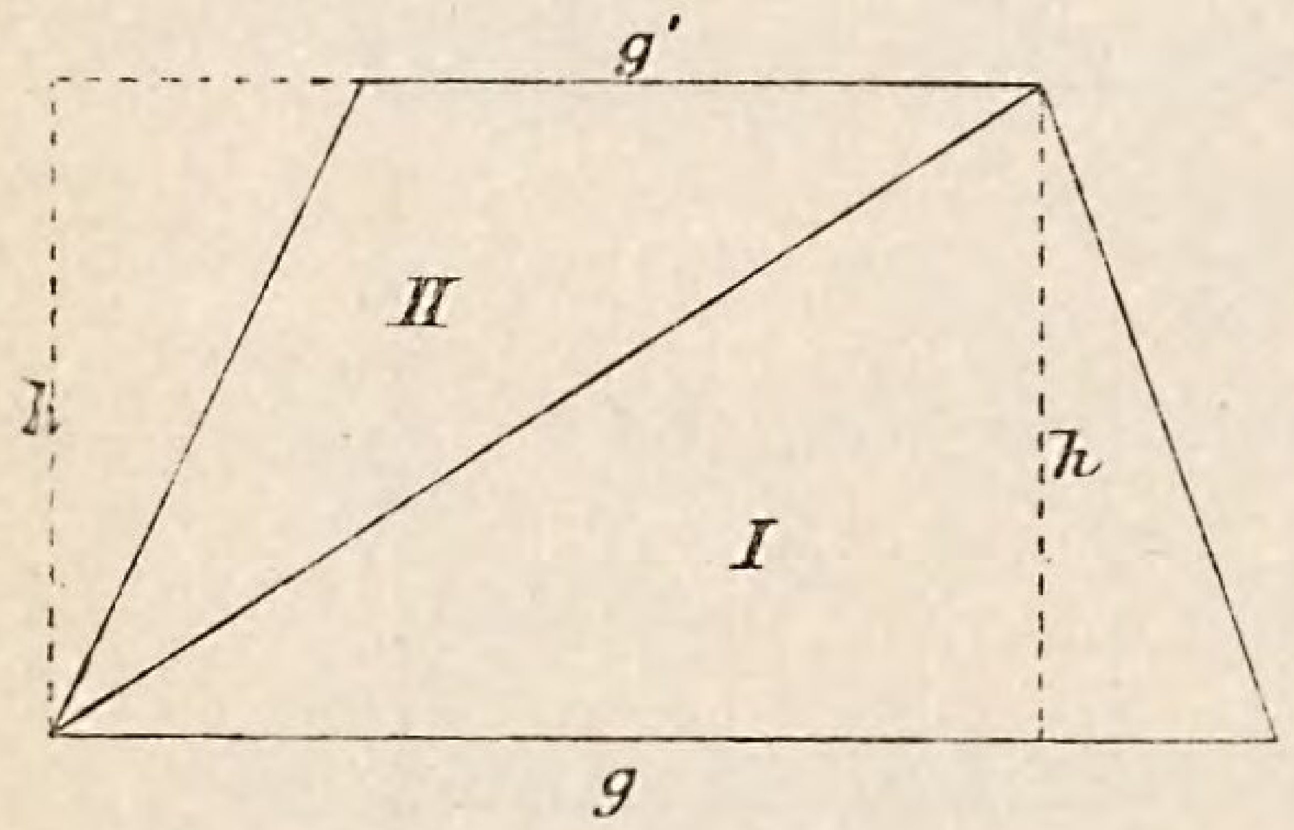


Fig. 36.

Mit ebenso wenig Schwierigkeiten ist die Berechnung der Fläche eines regelmäſsigen Vieleckes verknüpft. Man zerlegt dasselbe in ebenso viele gleichgroſse Dreiecke als es Seiten hat. In der Mitte vereinigen sich die Spitzen derselben im Zentrum der Figur. Ist ein Teildreieck seiner Fläche nach gefunden, so sind damit die andern Teildreiecke auch bekannt. So sei z. Ex. n die Anzahl der Seiten eines Vieleckes, s eine Vielecksseite und h die Höhe oder das vom Mittelpunkt der Figur auf diese Seite gefällte Perpendikel, so ist der Inhalt dieses Teildreieckes

$$J = \frac{sh}{2}$$

und der Inhalt sämtlicher Teildreiecke oder des Vieleckes selbst

$$J = n \cdot \frac{sh}{2} = \frac{nsh}{2}.$$

Da aber $n \cdot s = u$ den Umfang des regelmäſsigen Vieleckes vorstellt, so können wir auch setzen

$$J = \frac{u \cdot h}{2}$$

und sagen:

Den Inhalt eines regelmäſsigen Vielecks findet man, wenn man den halben Umfang mit der Höhe oder aber die halbe Höhe mit dem Umfang multipliziert.

Als ein Vieleck von auſserordentlich vielen Seiten läſst sich der Kreissektor oder Kreisausschnitt abz (Fig. 27 S. 18), wie

auch der Kreis selbst (Fig. 27) ansehen. Die von seinem Mittelpunkt auf eine ungemein kleine Vielecksseite s gefällte Senkrechte ist der Radius. Dann ist der Inhalt eines solchen schmalen Teildreieckes $s \cdot \frac{r}{2}$. Besteht der Sektor aus n, der Kreis aber aus p derartigen Dreiecken, so ist der Inhalt eines Kreissektors

$$n\,s \cdot \frac{r}{2} \quad \text{und}$$

des Kreises
$$\frac{p\,s \cdot r}{2}.$$

Es stellt jedoch ns die Bogenlänge des Sektors und $\frac{ps}{2}$ den halben Kreisumfang oder $r\pi$ vor, so dafs wir beide Resultate auch also schreiben können:

$$\text{Kreissektor} = \text{arc}\, n\,s \cdot \frac{r}{2} \quad \text{und}$$

$$\text{Kreis} = r\,\pi \cdot r = r^2\pi$$

was in Worten ausgedrückt heifst:

1. Der Inhalt eines Sektors ist gleich dem halben Produkte aus dem Bogen und dem Halbmesser; und

2. der Inhalt eines Kreises wird erhalten, wenn man die Ludolphine (π) mit dem ins Quadrat erhobenen Radius multipliziert.

Ist statt des Bogens eines Sektors der zugehörige Zentriwinkel angegeben, so ergibt sich aus der Gleichung

$$360^0 : a^0 = 2\,r\,\pi : \text{arc}\, n\,s$$

der Flächeninhalt also

$$\text{Kreissektor} = r^2\,\pi \cdot \frac{a^0}{360^0}.$$

Der Flächeninhalt eines Segmentes oder Kreisabschnittes ab (Fig. 27) wird gefunden, wenn man vom Sektor $a\,b\,z$ das Dreieck $a\,b\,z$, welches von der Sehne und den beiden Radien gebildet wird, subtrahiert; also, wenn die Sehne $a\,b = s$ und die Höhe des Dreiecks h ist:

$$\text{Inhalt} = r^2\,\pi\,\frac{a^0}{360^0} - \triangle\,\frac{sh}{2}.$$

Thesen der Stereometrie.

Die Stereometrie beschäftigt sich mit der Betrachtung von Körpern. Geometrisch meſsbare Körper sind die Ecksäule oder das Prisma (Fig. 37), die Pyramide (Fig. 38), der Cylinder (Fig. 39), der Kegel (Fig. 40) und die Kugel.

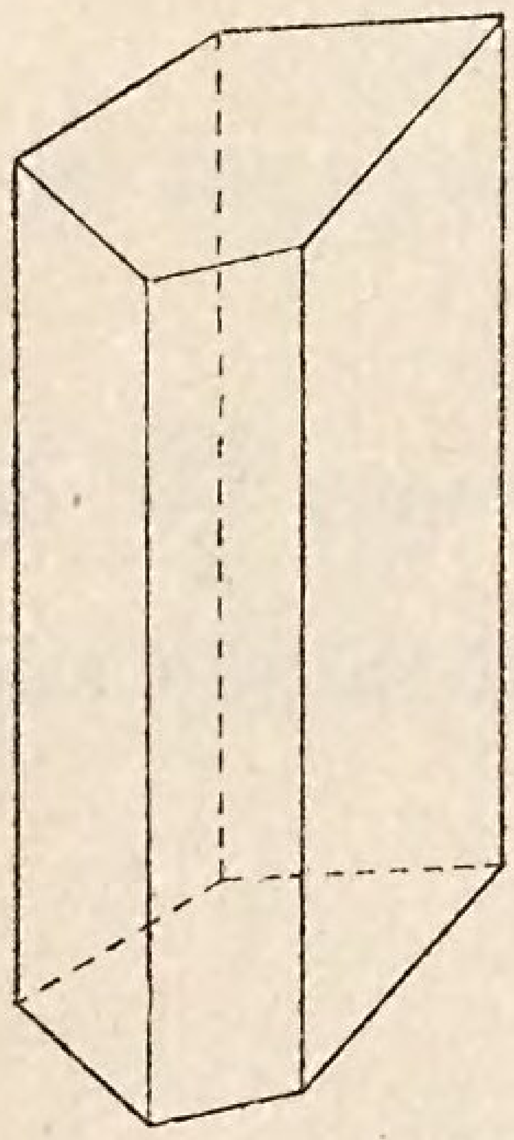


Fig. 37.

Eine vierseitige Ecksäule, deren Basis ein Parallelogramm ist und die wiederum von lauter Parallelogrammen begrenzt wird, heiſst ein Parallelopipedum. Ein von sechs Quadraten begrenztes Parallelopiped nennt man einen Kubus oder Würfel. Die Linien, bei welchen zwei Flächen zusammentreffen, heiſsen Kanten; der Punkt, in dem drei oder mehrere Ebenen aneinanderstoſsen wird von auſsen betrachtet, die Ecke, von innen gesehen der Winkel, Körperwinkel, genannt.

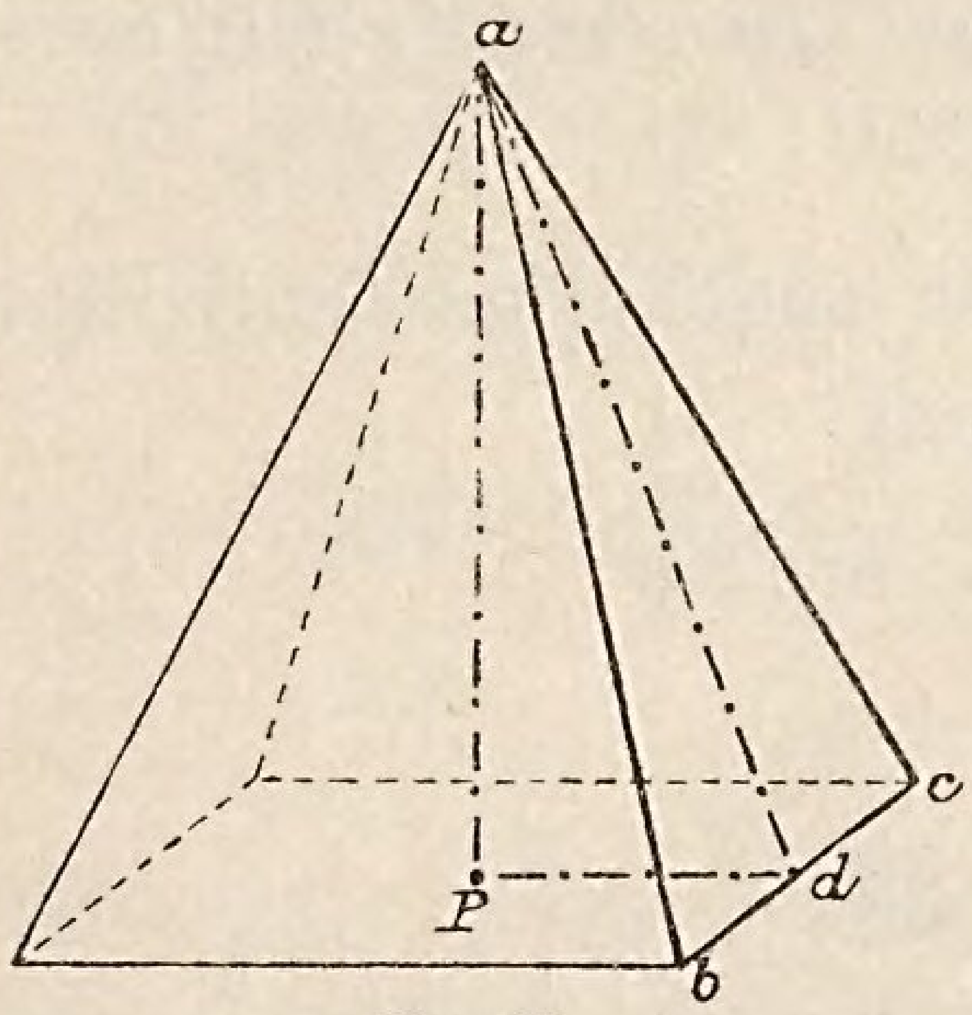


Fig. 38.

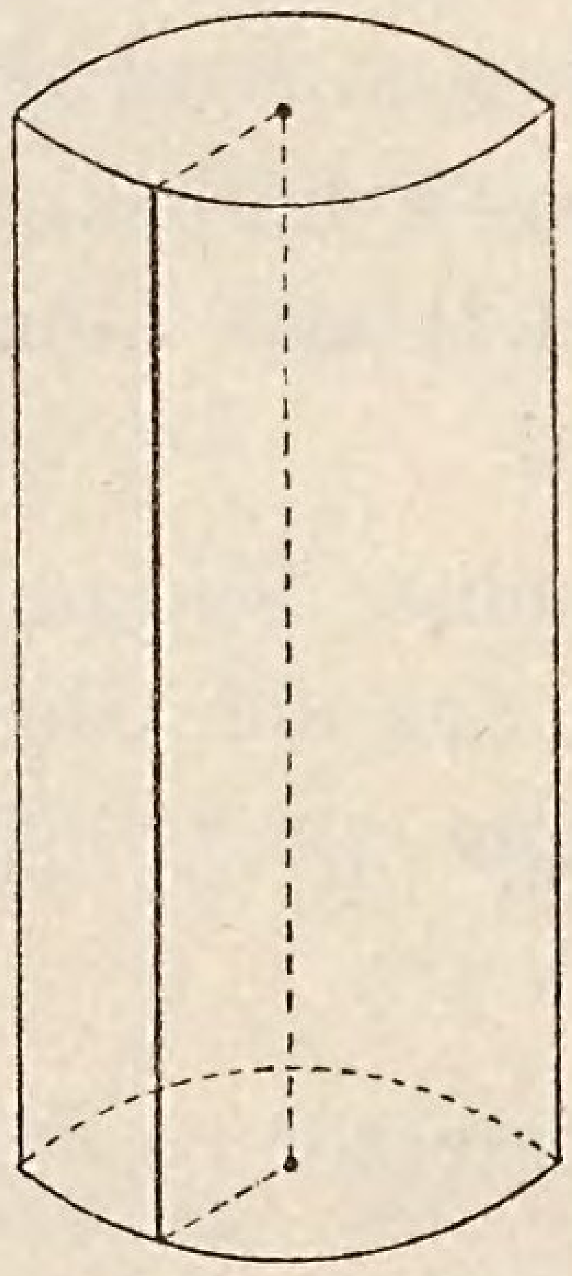


Fig. 39.

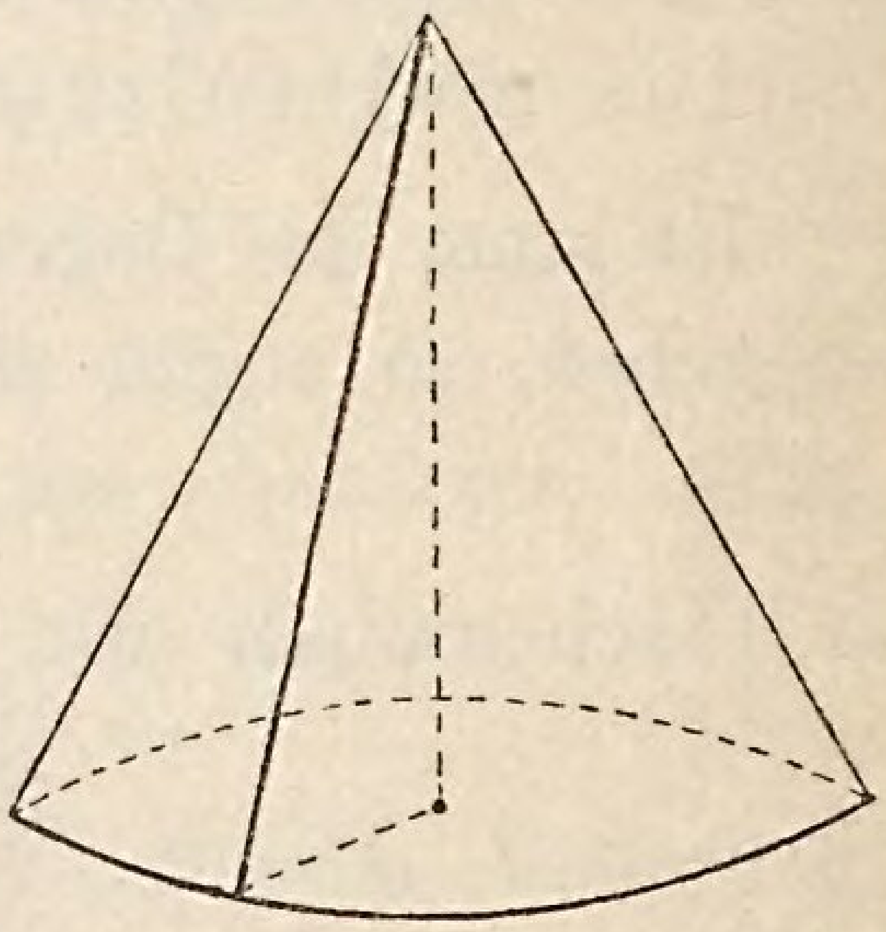


Fig. 40.

Berechnung der Körperoberflächen.

Die Grund- und Seitenflächen einer regelmäſsigen Ecksäule werden nach den Regeln der Flächenberechnungen gefunden. Da sich aber für die Berechnung der Seitenflächen Abkürzungen anbringen lassen, so wollen wir dieselbe näher ins Auge fassen. Nehmen wir an, die Grundfläche eines Prismas sei ein Vieleck, dessen Seiten

wir mit s', s'', s''' ... bezeichnen wollen. Ist nun die Höhe desselben h, so ist der Inhalt der einen Seitenfläche $s' \cdot h$, der der andern $s'' \cdot h$, der der dritten $s''' \cdot h$... Die Gesamtoberfläche oder aber die Summe aller Seitenflächen ist sodann

$$O = s' \cdot h + s'' \cdot h + s''' \cdot h \ldots$$
$$= h\,(s' + s'' + s''' \ldots)$$

Da aber die Klammer nichts anderes als den Umfang der Grundfläche bedeuten kann, so können wir auch setzen

$$O = u \cdot h,$$

welche Formel in Worten ausgedrückt lautet:

Den Gesamtinhalt aller Seitenflächen eines geraden Prismas erhält man, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Prismas multipliziert.

Ist die Grundfläche ein Vieleck von aufserordentlich vielen Seiten, so ist das Prisma eine Ecksäule von aufserordentlich vielen Seiten, so dafs die Grundfläche kreisförmig erscheint. Die Seitenflächen verlieren alsdann ihre Kanten, sie gehen in eine, d. i. in die Walzen- oder Cylinderfläche über. Aus $s' + s'' + s'''$... der Grundfläche wird alsdann $2\,r\,\pi$. Dann ist

$$O = u \cdot h = 2\,r\,\pi \cdot h,$$

was heifst:

Der Inhalt der Mantelfläche eines geraden Cylinders wird gefunden, wenn man den Kreisumfang der Grundfläche mit der Höhe des Cylinders multipliziert.

Eine Pyramide oder Spitzsäule wird begrenzt durch ein Vieleck, das die Grundlinie bildet und durch eine Reihe von dreieckigen Seitenflächen. Ist die Länge einer Grundkante bei einer geraden, regelmäfsigen Pyramide s, das Perpendikel von ihr bis zur Spitze l, so ist

$$J = \frac{l \cdot s}{2}.$$

Die Seitenzahl der Grundfläche sei n, so ist $n \cdot s = u$, d. i. gleich dem Umfang der Grundfläche und die Oberfläche aller Seitendreiecke ist alsdann

$$O = \frac{n \cdot s \cdot l}{2} = \frac{u}{2} \cdot l,$$

was in Worten ausgedrückt heifst:

Man findet den Inhalt aller Seitendreiecke einer geraden, regelmäfsigen Pyramide, wenn man den halben Umfang der Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreiecks multipliziert.

Sollte statt der Höhe eines Seitendreiecks die Höhe der Pyramide oder aber die Länge einer Seitenkante gegeben sein, so läfst sich l nach dem Pythagoräischen Lehrsatz leicht erforschen, denn nach Fig 38 S. 26 ist $ad = l$ und dann

$$l = \sqrt{Pa^2 + Pd^2}.$$

Wie nun die gerade Ecksäule in einen Cylinder übergehen kann, so die Pyramide oder Spitzsäule in einen Kegel. Dessen Oberfläche ist dann

$$O = r\pi l.$$

Vom Kegel und der Kugel insbesondere.

Der Kegel.

Bewegt sich eine Gerade BD (Fig. 41) längs einer ebenen geschlossenen Kurve so hin, dafs sie zugleich durch einen aufserhalb der kurvischen Linie gelegenen festen Punkt B geht, so beschreibt diese Gerade nach einem ganzen Umlauf eine krumme Fläche, welche mit der Ebene der geschlossenen Kurve einen Raum begrenzt, den man Kegel nennt. Der feste Punkt B heifst Scheitel, die Kurvenlinie Richtlinie, Leitlinie oder Direktrix, die den Raum erzeugende Gerade die Erzeugende BD, die senkrechte Entfernung des Scheitels von der Grundfläche Höhe, und die Gerade, welche den Scheitel mit dem Zentrum der Grundfläche verbindet, Achse und endlich die krumme Fläche selbst heifst Mantel. Ist die Richtlinie ein Kreis, so erhält man einen kreisförmigen Kegel, von welchem allein nur in der Elementargeometrie die Rede ist.

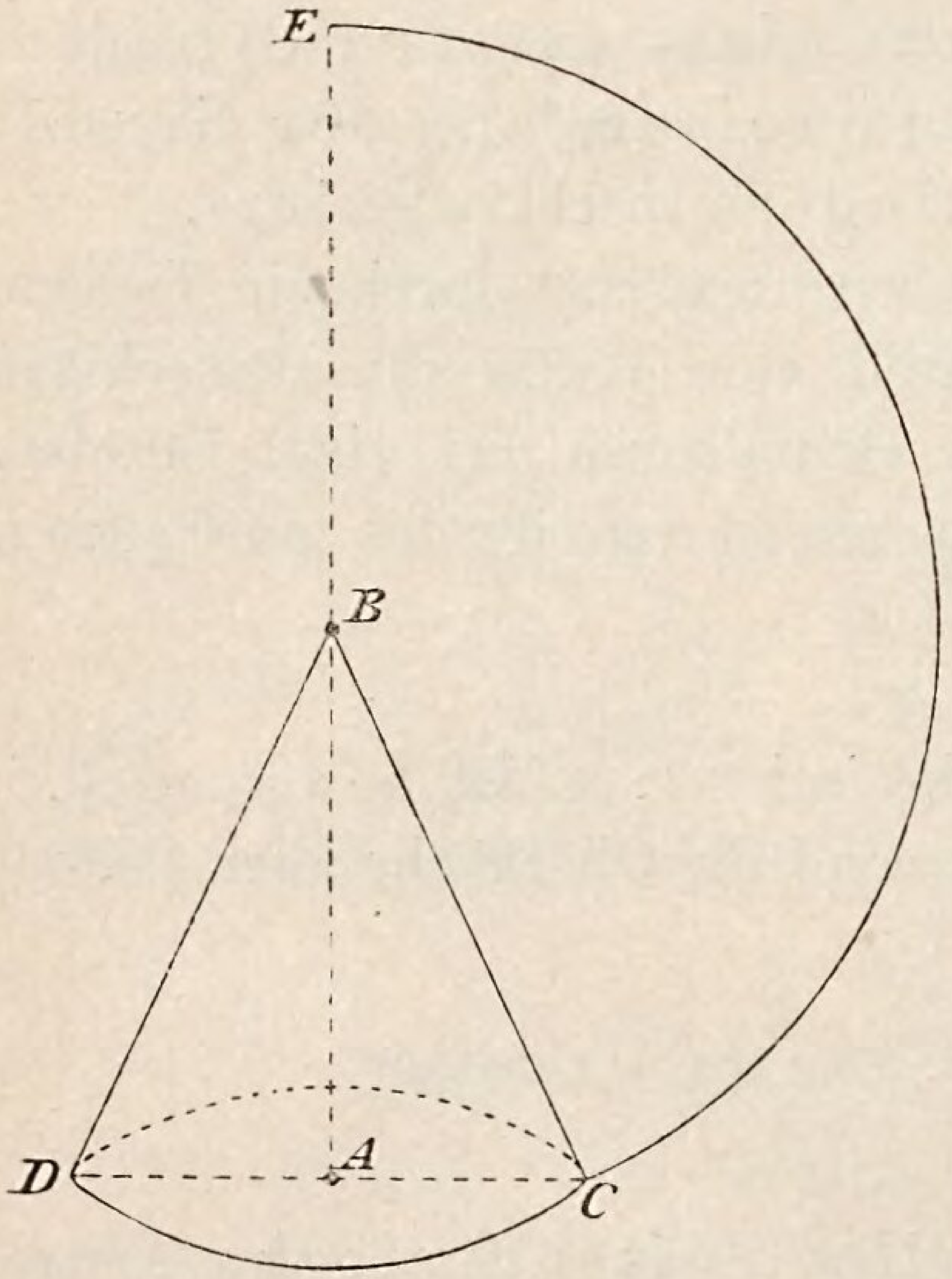


Fig. 41.

Es ist aber der Mantel eines Kegels einem Kreissektor gleich, dessen Radius die Seite des Kegels und dessen Bogen der Peripherie der Grundfläche gleich ist (Fig. 41). Denkt man sich den Mantel des Kegels ablösbar und schneidet man denselben längs der Seite BC auf, so kann man ihn

in die Ebene ausbreiten, wodurch man den Sektor CBE erhält. Der Bogen ist dem Kreis mit dem Radius AC gleich. Nach S. 25 ist

$$\text{Kreissektor} = \text{arc } CE \cdot \frac{BC}{2}.$$

Nun ist arc $CE = 2AC\pi = 2r\pi$ und BC nach den Pythagoräer, wenn $AB = h$ die Höhe des Kegels ist: $BC = \sqrt{h^2 + r^2}$, also

$$\text{Kegelmantel } CBE = \frac{2r\pi\sqrt{h^2+r^2}}{2} = r\pi\sqrt{h^2+r^2}.$$

Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heifst der Kegel ein gerader; steht die Achse dagegen schief auf der Basis, so wird der Kegel ein schiefer genannt. Bei einem geraden Kegel kommt die Achse der Höhe gleich, alle Seiten sind alsdann untereinander gleich, was bei einem schiefen Kegel, mit Ausnahme von zwei Geraden, nicht der Fall sein kann.

Führt man zur Grundfläche einen parallelen Schnitt, so ist die Kurve der Schnittebene wieder ein Kreis. Bei Fig. 42 sei ghi parallel zu abc. Sind bz und cz zwei Radien der Grundfläche und legt man durch jeden derselben und die Achse sz eine Ebene, so wird die Ebene gi nach hz' und iz' und der Mantel nach bs und cs geschnitten und es verhält sich

$$sz' : sz = hz' : bz = iz' : cz,$$

also auch

$$hz' : iz' = bz : cz.$$

Da nun $bz = cz$ ist, so ist auch $hz' = iz'$. Auf gleiche Art läfst sich beweisen, dafs jeder Punkt des Umfanges der Schnittfigur ghi gleichweit von z' entfernt ist; so ist dieselbe ein Kreis.

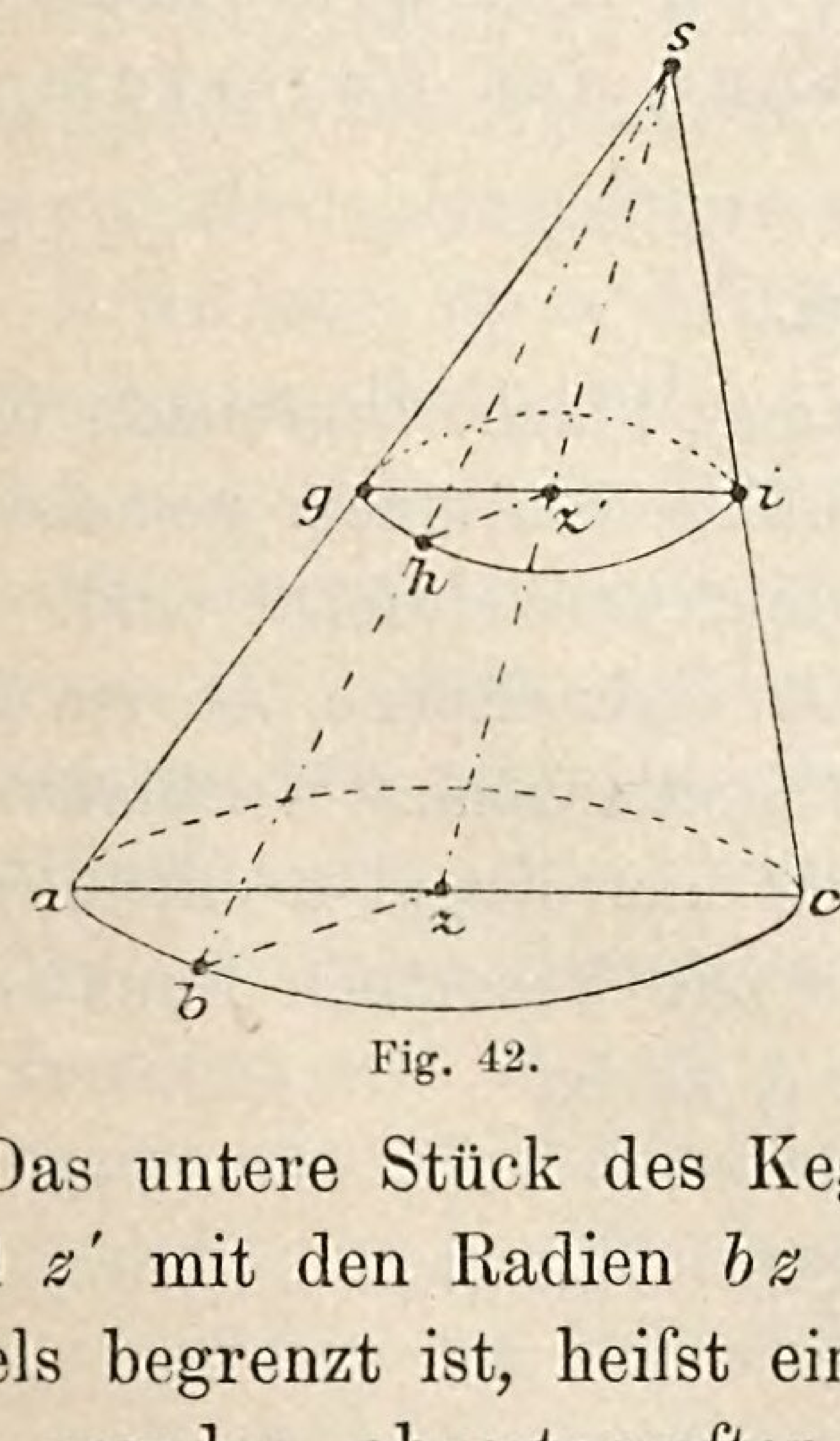


Fig. 42.

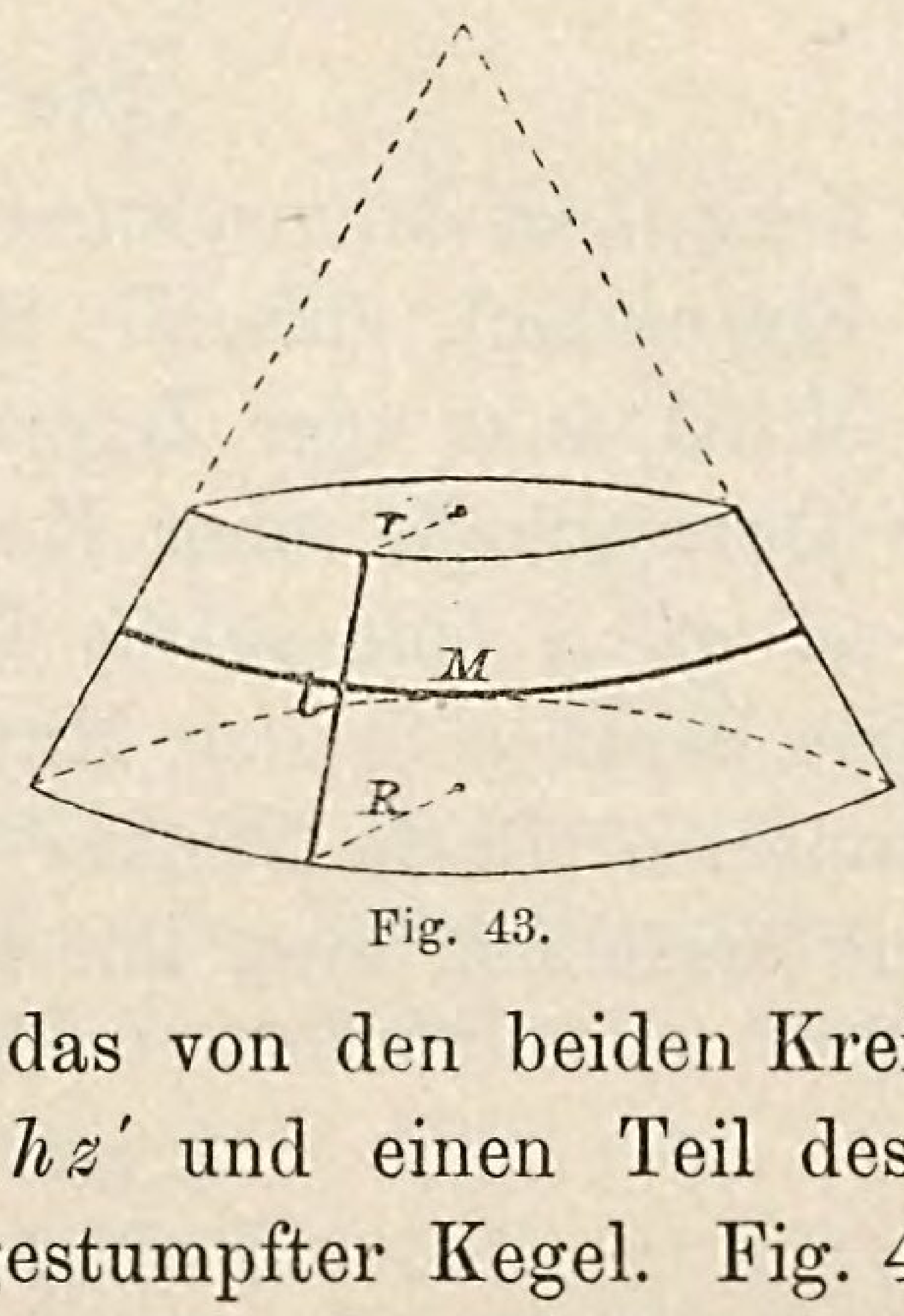


Fig. 43.

Das untere Stück des Kegels, das von den beiden Kreisen um z und z' mit den Radien bz und hz' und einen Teil des Kegelmantels begrenzt ist, heifst ein abgestumpfter Kegel. Fig. 43 stellt einen geraden abgestumpften Kegel vor. Ist R der Radius des

gröfseren, r der des kleineren Kreises, so ist beider Umfang $2R\pi$ und $2r\pi$. Die Höhe oder Länge der Mantelfläche sei l. Stellt man sich dieselbe abgewickelt und in die Ebene ausgebreitet vor, so hat man vor sich ein Paralleltrapez von der Höhe l und den Grundlinien $2R\pi$ und $2r\pi$. Eine Diagonale bringt dasselbe in zwei Dreiecke, deren Flächenstücke sein müssen

$$\frac{2R\pi \cdot l}{2} \text{ und } \frac{2r\pi \cdot l}{2}.$$

Ihre Gasamtoberfläche ist alsdann

$$(R\,2\pi + r\,2\pi)\frac{l}{2} = (R + r)\pi \cdot l$$

oder

$$2\pi \cdot l\frac{R}{2} + 2\pi \cdot l\frac{r}{2} = \left(\frac{R+r}{2}\right) 2\pi \cdot l.$$

Stellen wir beide Resultate einander gegenüber, nämlich

$$(R + r)\pi \cdot l = \left(\frac{R+r}{2}\right) 2\pi \cdot l,$$

so ergibt sich, dafs $R + r = 2\frac{R+r}{2}$ ist.

Es stellt aber $\frac{R+r}{2}$ den Radius des Mittelkreises M vor, somit ist die Summe des grofsen und kleinen Radius der Durchmesser des Mittelkreises. Für den Oberflächeninhalt eines abgestumpften Kegels können wir auf Grund der gefundenen Resultate den Satz aussprechen:

Die Oberfläche des Mantels eines abgestumpften geraden Kegels wird gefunden, wenn man den Umfang des Mittelkreises mit der Seitenlänge des abgestumpften Kegels multipliziert.

Die Kugel.

Die Kugel ist ein von einer krummen Fläche begrenzter Körper von der Eigenschaft, dafs alle ihre Punkte von einem gemeinsamen Punkte (Mittelpunkt oder Zentrum) gleichweit entfernt sind.

Der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis. Fig. 44 sei $abcd$ eine solche Durchschnittsebene. Verbindet man durch eine Senkrechte den Mittelpunkt der Kugel z mit dem des Schnittkreises o, beide Punkte ferner mit beliebigen Punkten der Peripherie desselben, etwa mit b und c, so ist

$$oz = oz$$

$$\sphericalangle zob = \sphericalangle zoc \text{ als } R,$$

$$zb = zc$$

also

$$\triangle boz \cong \triangle coz.$$

In diesem Falle decken sich *ob* und *oc*. Beide Gerade sind dann gleich lang, nämlich Radien des Kreises *abcd*. Nach dem Pythagoräer ist, wenn wir für *ob* oder *oc* *r* setzen,

$$r = \sqrt{bz^2 - oz^2}.$$

Je kleiner nun oz^2 wird, desto gröfser wird der Radius des Schnittkreises, oder auch je gröfser oz^2 wird, um so kleiner wird sein Radius. Dieselbe Wahrheit können wir auch dahin formulieren: Der Schnittkreis ist um so kleiner oder gröfser, je gröfser oder kleiner seine Entfernung vom Kugelzentrum ist. Wird dieselbe zu Null, so geht der Schnittkreis durch den Kugelmittelpunkt und der Radius des Schnittkreises fällt mit dem Kugelradius zusammen. Ein solcher Kreis führt den Namen Hauptkreis oder gröfster Kreis. Gröfste Kreise halbieren sich gegenseitig und die Kugel.

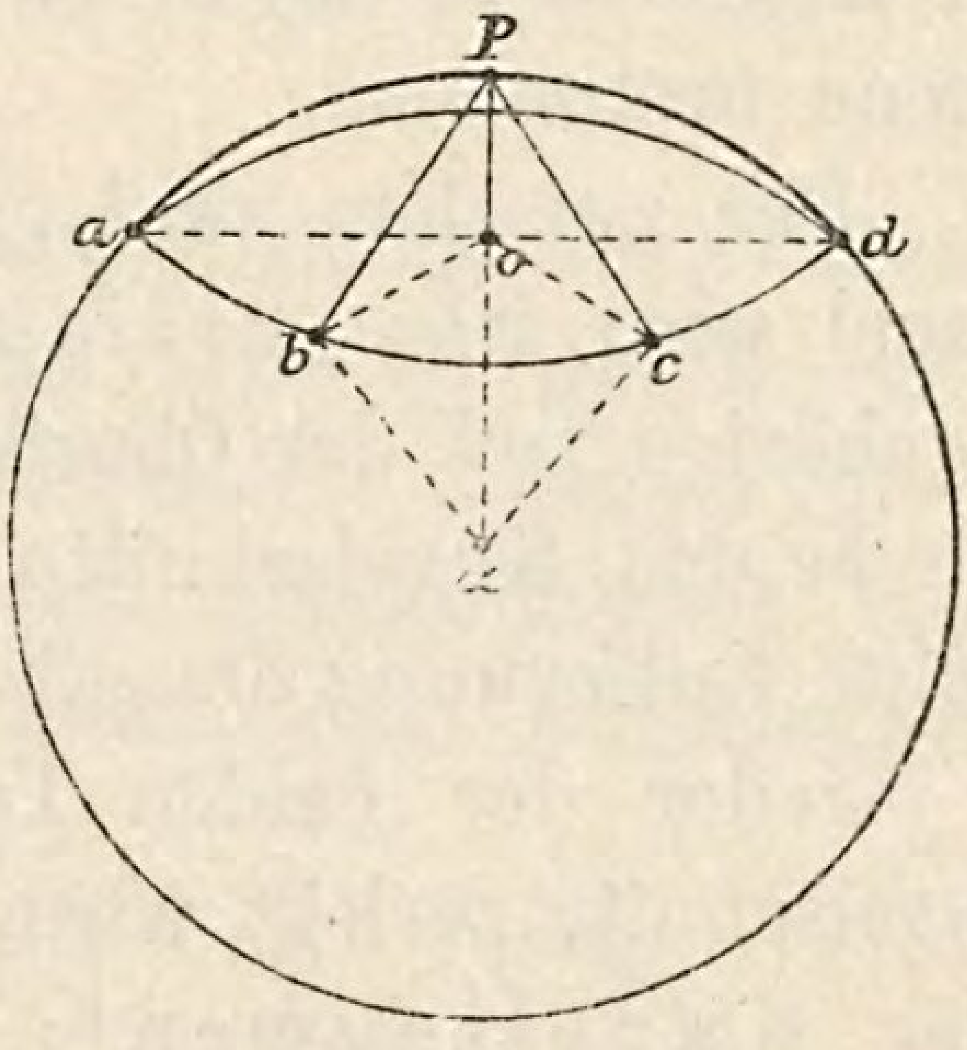


Fig. 44.

Alle Mittelpunkte der unter sich parallelen Kugelschnitte fallen in einen und denselben Durchmesser der Kugel, welcher auf den Schnittflächen senkrecht steht. Man nennt solche parallele Durchschnittkreise einer Kugel Parallelkreise.

Der Teil einer Kugel, welcher zwischen zwei Hauptkreisen liegt, heifst keilförmiger Kugelausschnitt, der zugehörige Teil der Oberfläche sphärisches oder Kugelzweieck *agsg'* (Fig. 45). Die in einem Endpunkte *a* des Durchmessers *as* an beide Kreise gezogenen Tangenten *ab* und *ac* bestimmen den Winkel, welchen die Kreiselemente bei *a* bilden. Dieser Winkel heifst sphärischer Winkel.

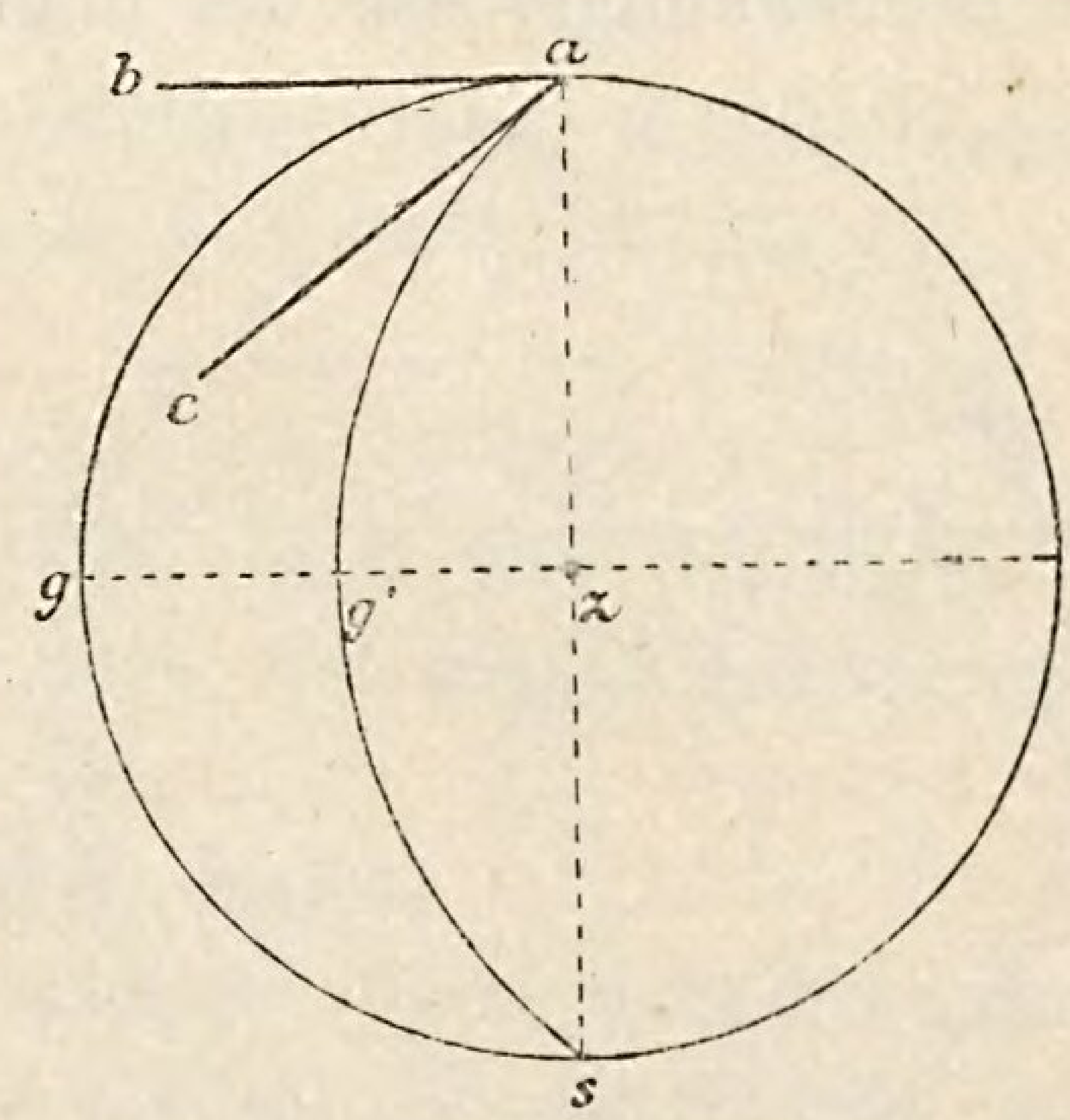


Fig. 45.

Der zu einem Hauptkreise senkrechte Durchmesser bestimmt zwei Gegenpunkte *a* und *s*, welche die Pole desselben heifsen. Verlängert man bei Fig. 44 *zo* gegen *P* und verbindet man *P* mit *b* und *c*, so ist

$$Po = Po$$

$$\sphericalangle Pob = \sphericalangle Poc \text{ als } R$$

$$ob = oc \text{ als Radien ein und desselben Kreises,}$$

folglich $\triangle\, Pob \cong \triangle\, Poc$

und damit ist $Pb = Pc,$

was heifst:

Der Punkt P ist von allen Punkten der Peripherie des Schnittkreises geradlinig wie auch in Bogen gröfster Kreise gleichweit entfernt. Parallele Kugelkreise haben dieselben Pole.

Immer nur ein Hauptkreis läfst sich durch je zwei Punkte der Kugelfläche legen, da dieselben mit dem Kugelmittelpunkt eine Ebene bestimmen.

Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Teil einer Kugel wird körperliche Zone oder Kugelschicht und der zugehörige Teil der Oberfläche Kugelgürtel oder Zone genannt. Die beiden Kugelschnitte heifsen die Grundflächen und die senkrechte Entfernung derselben wird die Höhe der Schicht genannt.

Jeder der beiden Teile, in welche eine Kugel durch einen Kugelschnitt zerlegt wird, führt die Benennung Kugelabschnitt oder Kugelsegment; der entsprechende Teil der Oberfläche Kugelhaube oder Kalotte. Ist der Kugelschnitt ein gröfster Kreis, so heifsen beide Kugelstücke Halbkugeln.

Oberflächenberechnung der Kugel.

Am bequemsten werden wir unser Ziel erreichen, wenn wir die Berechnungsweise des abgestumpften Kegels zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung machen. Denken wir uns den Kreis $blap$ (Fig. 46) um die Achse ab gedreht, so entsteht durch die Bewegung der Kreislinie eine Kugeloberfläche. Schneidet man von demselben Kreise das Stück lm ab, und versetzt man den besprochenen Kreis gleichfalls in eine Drehung um die Achse ab, so wird diese Schnittlinie eine Fläche erzeugen, welche dem Mantel eines abgestumpften geraden Kegels aufs Haar gleicht. Der Mittelkreis hat den Radius ik und die Oberfläche des abgestumpften Kegels ist alsdann

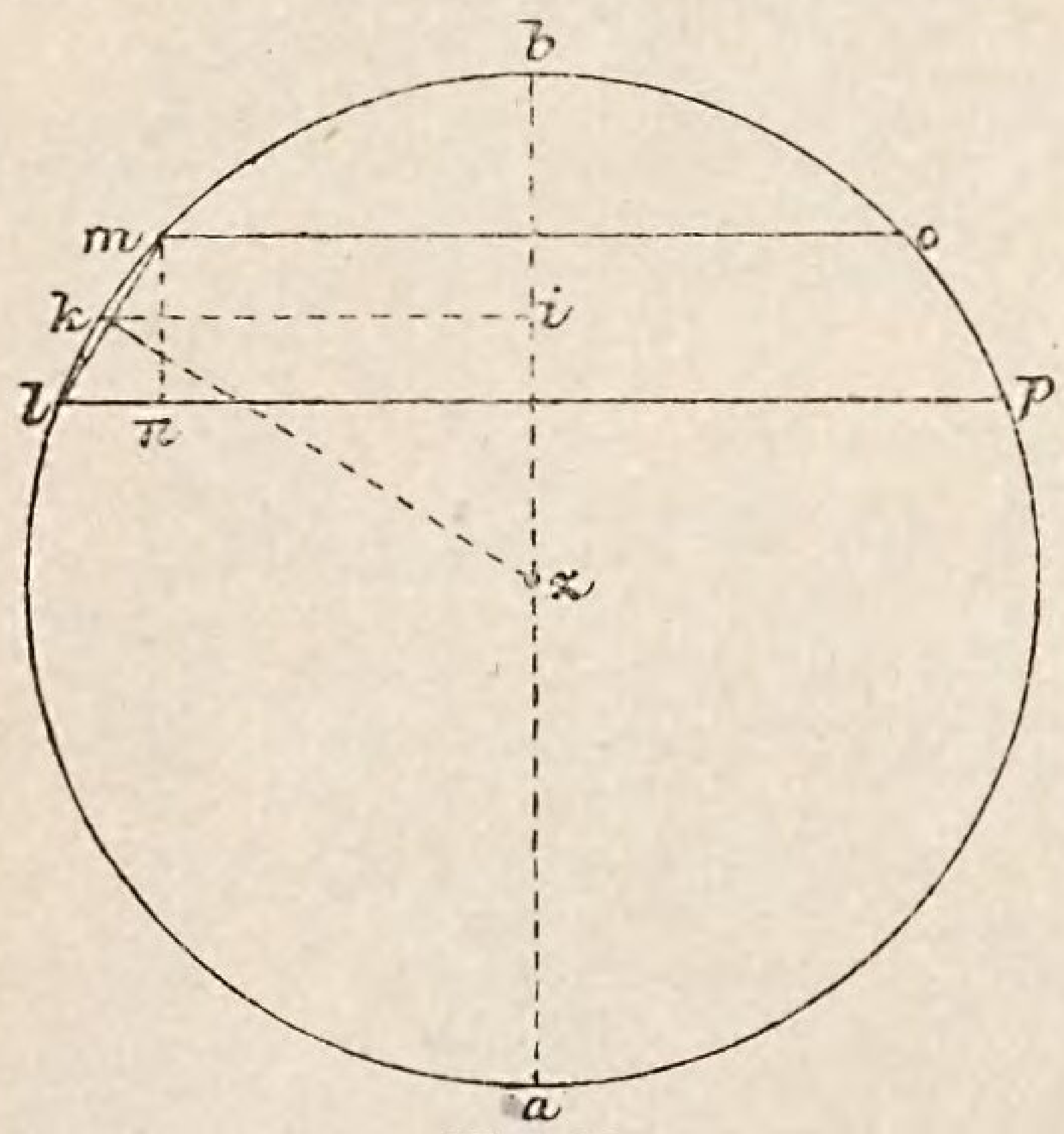


Fig. 46.

$$O = 2\,ik \cdot \pi \cdot lm.$$

Wird k, die Mitte der Sehne lm, mit z, dem Mittelpunkte des Kreises $blop$, verknüpft, so gewinnt man die Senkrechte kz.

Fällt man von m auf lp das Perpendikel mn, alsdann gelangt man zu den ähnlichen, rechtwinkligen Dreiecken lnm und zik, in welchen sich, wenn wir mn mit h vertauschen, verhalten

$$ik : kz = h : lm$$

Die Lösung dieser Proportion gibt

$$ik \cdot lm = kz \cdot h.$$

Substituieren wir in obige Gleichung für $lm \cdot ik$ den hiefür gefundenen Wert, so geht sie über in

$$O = 2\,kz \cdot h \cdot \pi.$$

Je mehr man die Punkte m und l nach k rückt, um so kleiner wird die Sehne, um so mehr schmiegt sie sich an die Kreislinie an, so dafs die Sehne lm in den Bogen lm und die Senkrechte kz in den Kreisradius übergeht und aus dem abgestumpften Kegel eine Zone wird, für welche man, wenn man deren unbedeutende Höhe mit h' bezeichnet und kz mit r, setzen kann

$$O = 2\,r\,\pi \cdot h'.$$

Geht man in der angestellten Betrachtung einen Schritt weiter und denkt man sich (Fig. 47) die Höhe h in unendlich viele und unendlich kleine Höhenabschnitte h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 ... zerlegt, so sind die Oberflächen dieser Kugelschichten

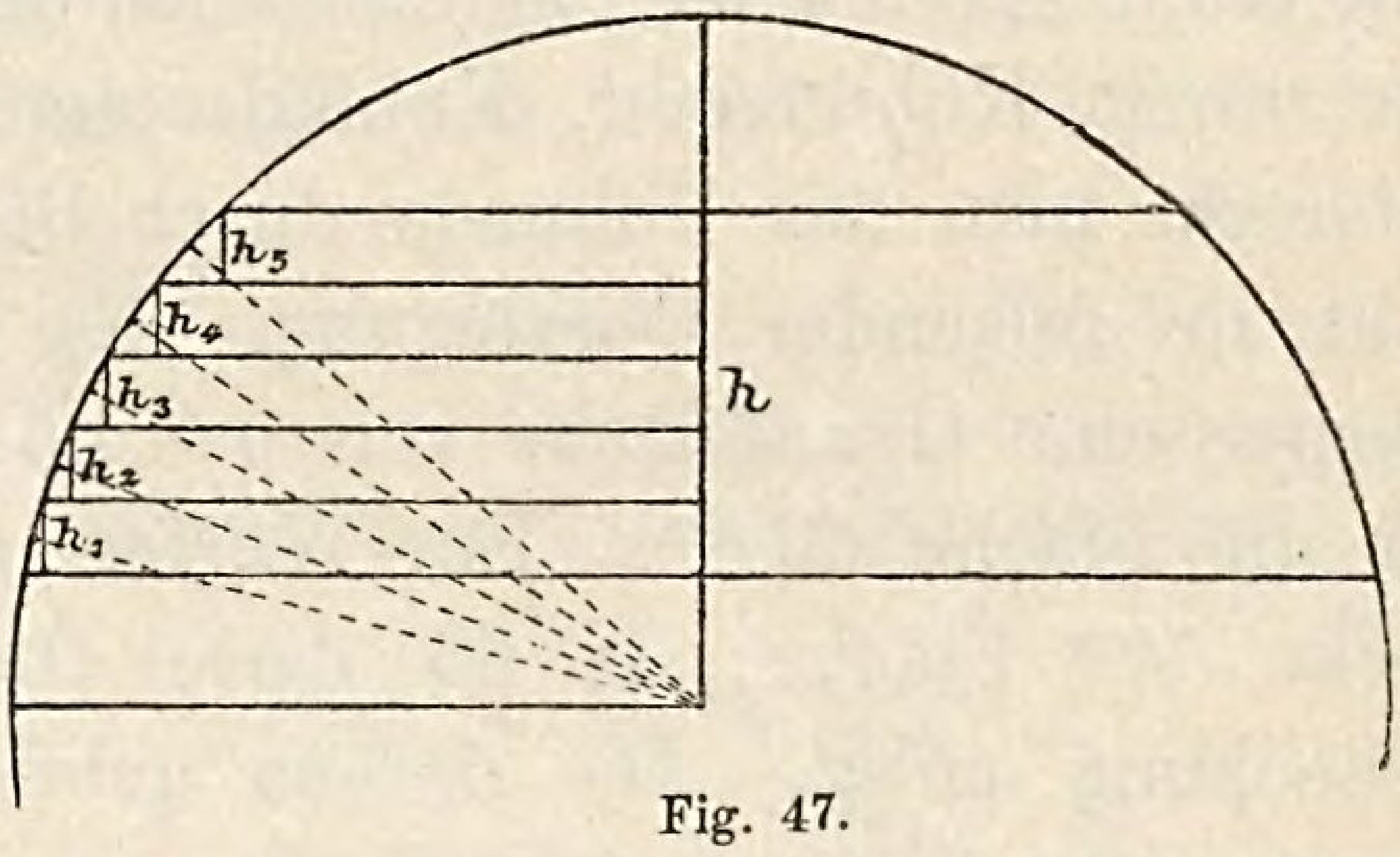


Fig. 47.

$$O = 2\,r\,\pi\,h_1 + 2\,r\,\pi\,h_2 + 2\,r\,\pi\,h_3 + 2\,r\,\pi\,h_4 + 2\,r\,\pi\,h_5$$

oder zusammen gezogen

$$O = 2\,r\,\pi\,(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5).$$

Da nun $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = h$ ist, wie Figur 47 deutlich ersehen läfst, so können wir noch viel kürzer schreiben

$$O = 2\,r \cdot \pi \cdot h,$$

welche Gleichung in Worten ausgedrückt heifst:

Der Mantel einer Zone ist gleich dem Mantel eines Cylinders, dessen Grundkreis ein gröfster Kreis und dessen Höhe die Höhe der Zone ist.

Die Kalotte kann in gleicher Weise als ein Zonenmantel angesehen werden.

Die Entfernung oder die Schichthöhe zwischen dem unteren und oberen Grundkreis, welch letzterer alsdann nur mehr als Punkt erscheint, sei h; dann ist die Fläche der Haube

$$O = 2\,r \cdot \pi \cdot h.$$

Auch die Halbkugel ist eine Kalotte; ihre Höhe ist r; ihre Oberfläche sohin
$$O = 2\pi r \cdot r = 2 r^2 \pi$$
und die einer Kugel das doppelte, nämlich
$$O = 4 r^2 \pi,$$
welche Gleichung nichts anderes besagt als:

Die Kugeloberfläche ist den Flächen von vier gröfsten Kreisen gleich zu halten.

Berechnung des körperlichen Inhalts.

Den Rauminhalt oder das Volumen eines Körpers kann man dadurch bestimmen, dafs man ermittelt, wie oftmal ein Körper, der als Mafseinheit angenommen wird, in dem zu messenden Körper enthalten ist. Als Raumeinheit gilt der Würfel oder Kubus, dessen eine Kante gleich ist der Längeneinheit. Eben deshalb spricht man von einem Kubikmeter, Kubikdecimeter, Kubikcentimeter. Vielfach erforscht man das Volumen durch Berechnung. Das Verfahren beruht auf folgender Überlegung. Es habe nämlich der vorliegende Körper eine Grundfläche von 9^{cm} Länge und 7^{cm} Breite. Dies gibt für die Fläche 63^{qcm}. Ein Würfel von einem Kubikcentimeter bedeckt 1^{qcm} Fläche, zu 63 derlei Quadraten sind 63 Kubuse zur Bedeckung nötig. Die daraus gebildete Schicht mifst 1^{cm} Höhe. Ist nun der Körper 10^{cm} hoch, so lassen sich 10 Schichten von solchen 63 Würfeln aufbauen, das gibt in Summa 630 Würfel, so dafs dieser zu messende Körper ein Volumen von 630 Kubikcentimeter vorstellt. Multiplizieren wir 9, 7 und 10 miteinander, so erhalten wir gleichfalls das Resultat 630^{ccm}. Hiernach können wir behaupten, dafs man das Volumen einer geraden Ecksäule erhält, wenn man die drei Dimensionen derselben miteinander multipliziert; also
$$V = l \cdot b \cdot h.$$

Mit dem Prisma ist der Cylinder verwandt. Bei jenem ist die Grundfläche $l \cdot b$; hier $r^2 \pi$. Nehmen wir die Höhe h dazu, so ist
$$V = r^2 \pi \cdot h.$$

Da jede Pyramide der dritte Teil eines Prismas ist, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat, so ist
$$V = \tfrac{1}{3} l \cdot b \cdot h.$$

In gleicher Weise gilt dies für den Kegel, also ist
$$V = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \cdot h.$$

Nun noch die Kugel!

Die Sehne hat uns durch die Annäherung an die Kreislinie die Methode zur Berechnung der Kugeloberfläche ausfindig machen lassen, diesmal hat die Vermittlungsrolle die Pyramide zu übernehmen. Stellen wir uns nämlich die Kugeloberfläche in eine möglichst grofse Anzahl von gleich grofsen Flächenstücken zerteilt vor und denken wir uns auf jedes einzelne Flächenstück eine Pyramide, deren Spitze im Kugelzentrum liegt, errichtet, so ist deren Volumen, da die Höhe der Radius ist

$$V = \frac{1}{3}\, l \cdot b\, r.$$

Alle Pyramiden, wenn ihre Anzahl n ist, begreifen im Körpermafs

$$V = \frac{1}{3}\, n \cdot l \cdot b \cdot r.$$

Nun kann mit $n \cdot l \cdot b$ nichts anderes als die Oberfläche der Kugel selbst gemeint sein und wir können hierfür $4 \pi r^2$ setzen. Damit geht vorstehende Gleichung in Form über

$$V = \frac{4 \pi r^2 r}{3} = \frac{4 \pi r^3}{3}$$

und setzen wir noch für den Radius den halben Durchmesser $\frac{d}{2}$,

so ist $$V = \frac{4 r^2 \pi}{3} \cdot \frac{d}{2} = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot d = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Versuchen wir Cylinder, Kugel und Kegel von gleicher Grundfläche $r^2 \pi$ und Höhe $h = d$ in ein Verhältnis zu setzen, so erhalten wir

$$r^2 \pi \cdot d : \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot d : \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot d$$

oder $$3 : 2 : 1,$$

woraus wir entnehmen, dafs die Kugel in Bezug des körperlichen Inhalts bei gleicher Grundfläche und Höhe $\frac{2}{3}$ und der Kegel $\frac{1}{3}$ von dem der Walze ist. Der Kubikinhalt einer Kugel wird daher auch gefunden, wenn man die Grundfläche des gröfsten Kreises mit dem Durchmesser der Kugel (Höhe der Walze) multipliziert und das Produkt $\frac{2}{3}$ mal nimmt. Schon Archimedes († 212 v. Chr.), der gröfste Mathematiker des Altertums, kam auf das Verhältnis des Kubikinhaltes von der Walze und Kugel und schätzte diese seine Erfindung dermafsen, dafs er bestimmte, man solle eine von einem Cylinder umschriebene Kugel auf sein Grabmal setzen.

Thesen der ebenen Trigonometrie.

Was Sinus und Kosinus ist.

Die beiden Schenkel *ab* und *ac* (Fig. 48) schliefsen den Winkel α ein. Schneidet man auf *ab* das Stück *an*, welches der Längeneinheit entsprechen soll, ab und fällt man von *n* auf *ac* die Senkrechte *np*, so ist dieses Perpendikel der Sinus des Winkels α und die Entfernung des Scheitels *a* vom Fufspunkt *p* der Ko(mplementi)-sinus desselben Winkels. Dies Beispiel, das für alle derartige Fälle pafst, wollen wir durch ein besonderes Exempel illustrieren, um daran zu zeigen, wie man für die Ausdrücke Sinus und Kosinus Zahlenwerte erhält. Das Dreieck *abc* (Fig. 49) sei gleichseitig, also *bc* die Sehne eine Sextanten. Eine Gerade in deren Mitte errichtet, bildet die Senkrechte *ad* und zerteilt das gleichseitige Dreieck in die zwei rechtwinkligen Dreiecke *adb* und *adc*. Dann ist Winkel *bad* die Hälfte von *bac* oder 30⁰ und *bd* ½ von *bc*. Von der Geraden *bd* können wir auch sagen, wenn *ab* die Längeneinheit vorstellt, dafs sie der Sinus des Winkels *bad* sei. Für *bd* und ∢ *bad* vermögen wir Zahlenwerte einzustellen, so dafs die Gleichung heifst

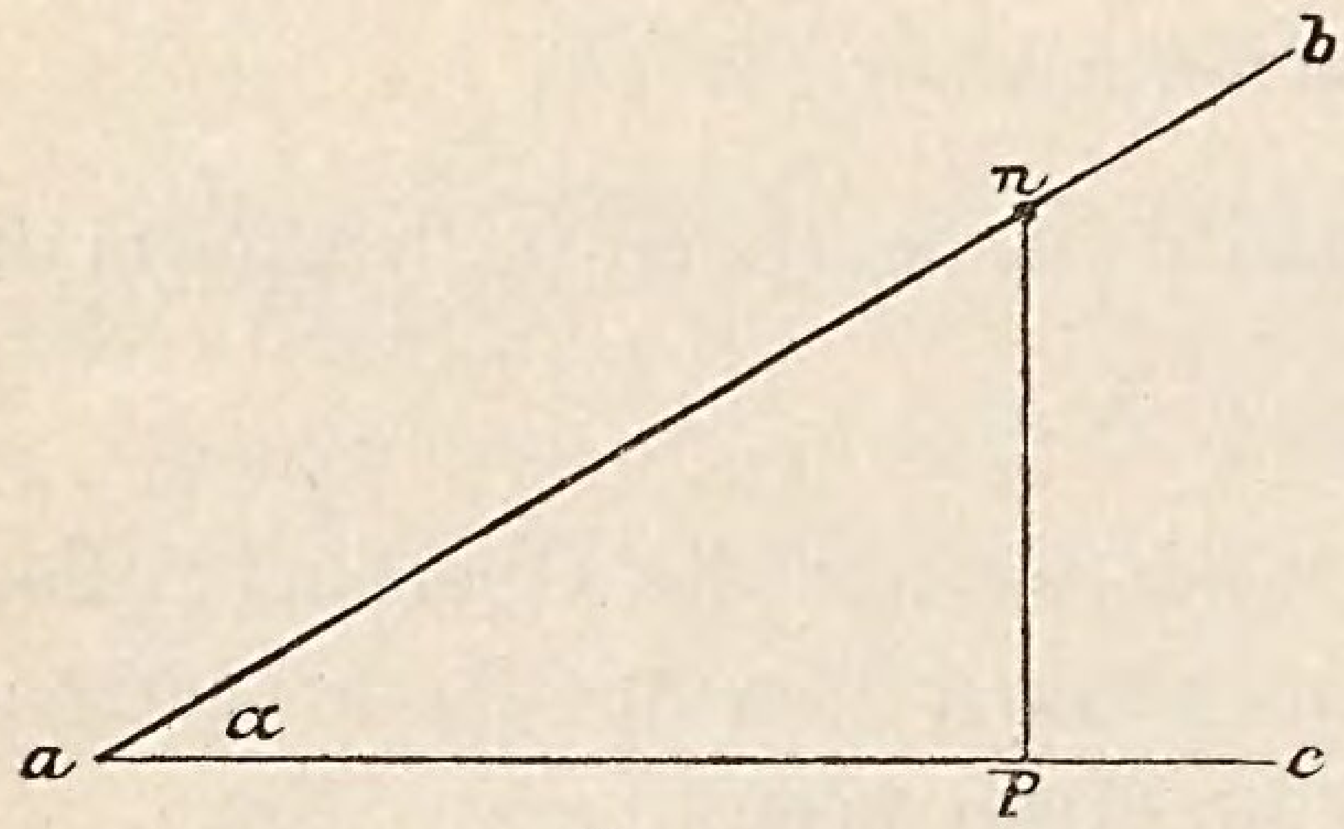


Fig. 48.

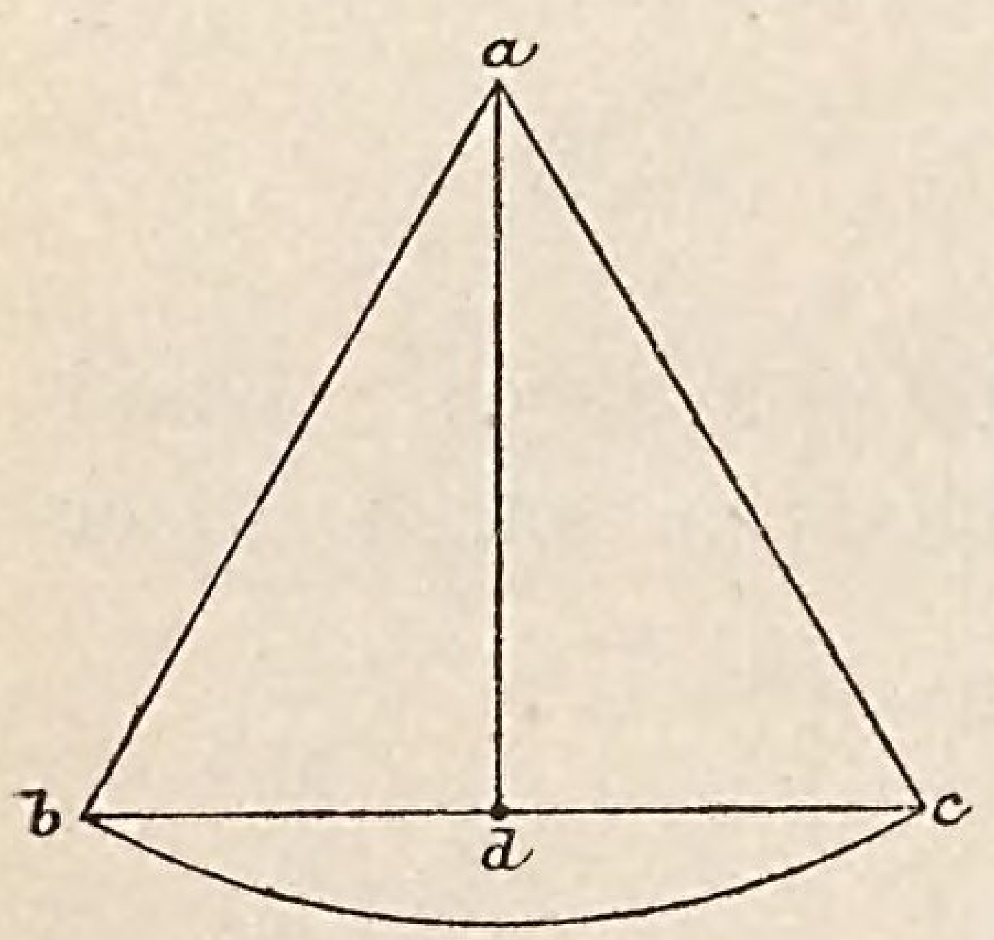


Fig. 49.

$$\sin 30^0 = 0{,}5.$$

Ziehen wir noch den Pythagoräer heran, so gewinnen wir auch noch *ad* oder den Kosinus von 30⁰. Denn

$$ab^2 = bd^2 + ad^2$$

oder

$$1^2 = {}^1/_2{}^2 + ad^2$$

$$\sqrt{1 - {}^1/_2{}^2} = ad$$

oder endlich

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - {}^1/_4} = 0{,}866025.$$

Die Gerade *ad* ist zugleich der Sinus vom Winkel $abd = 60^0$; in Ziffern ist sodann

$$\sin 60^0 = 0{,}866025; \quad \cos 60^0 = 0{,}5.$$

Aus diesen Exempeln können wir entnehmen, dafs zwischen Sinus und Kosinus eine Wechselbeziehung besteht, so dafs wir allgemein setzen können

$$\sin(90-\beta) = \cos\beta$$
$$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha.$$

Gehen wir noch einen Schritt weiter und nehmen wir jeden der spitzen Winkel zu 45° an, so müssen Sinus und Kosinus einander gleich sein und der Pythagoräer sieht sich dann also an

$$(\sin 45^0)^2 + (\cos 45^0)^2 = 1^2$$

oder

$$(\sin 45^0)^2 + (\sin 45^0)^2 = 1$$

also

$$2(\sin 45^0)^2 = 1$$
$$\sin 45^0 = \sqrt{1/2} = 0{,}707107.$$

Statt dieser Zahlen hat man deren Logarithmen im Gebrauch. Der Logarithmus von 0,5 ist 0,69897 — 1 oder 9,69897 — 10 oder abgekürzt 9,69897. Der Logarithmus von cos 30° ist 9,93753. Die Kennziffer 10 deutet auf die Zahl 1, die Kennziffern 9, 8, 7 auf die Brüche Zehntel, Hundertstel, Tausendstel. Denn 9 — 10 = —1, 8 — 10 = —2 u. s. f. Darnach deutet eine negative Charakteristik oder Kennziffer auf einen Dezimalbruch hin, der so viele Nullen an der Spitze hat, als negative Einheiten vorhanden sind. Das Zeichen ∞ heifst unendlich. Zusammengestellt ist

$$\begin{aligned}
\sin 0^0 &= 0 \\
\cos 0^0 &= 1 = \lg 0{,}00000 \\
\sin 30^0 &= 1/2 = \lg 9{,}69897 \\
\cos 30^0 &= 1/2\sqrt{3} = \lg 9{,}93753 \\
\sin 60^0 &= 1/2\sqrt{3} = \lg 9{,}93753 \\
\cos 60^0 &= 1/2 = \lg 9{,}69897 \\
\sin 45^0 = \cos 45^0 &= 1/2\sqrt{2} = \lg 9{,}84949 \\
\sin 90^0 &= 1 = \lg 0{,}00000 \\
\cos 90^0 &= 0.
\end{aligned}$$

Zum Gebrauch für logarithmische Berechnungen ist empfehlenswert: Dr. O. Schlömilch: Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn.

Wie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und auch dessen Hypotenuse durch Sinus und Kosinus zu finden sind.

In dem rechtwinkligen Dreieck acb (Fig. 50) sei die Hypotenuse ab mit H, die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete bc mit K_1 und die anliegende ac mit K_2 bezeichnet. Der Punkt g auf H sei

von dem Scheitel a um die Längeneinheit entfernt. Ein Perpendikel von g auf K_2 gefällt, gibt in der Strecke gp den Sinus α, mit ap den Kosinus α. Nach der Lehre der Ähnlichkeit der Dreiecke, und hier haben wir es mit ähnlichen Dreiecken zu thun, können wir folgende Proportionen gewinnen:

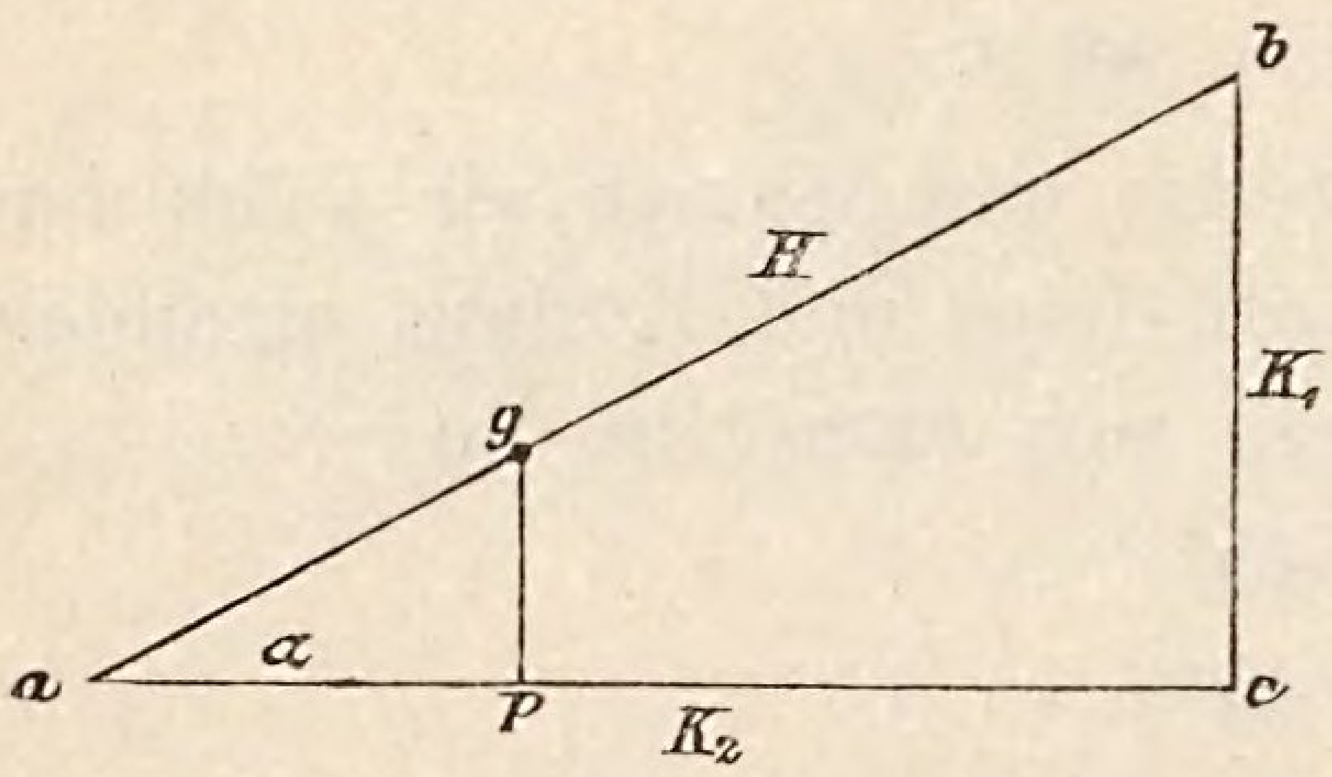


Fig. 50.

$$1 : H = \sin\alpha : K_1 \qquad (1$$
$$1 : H = \cos\alpha : K_2. \qquad (2$$

Für die beiden Katheten ergeben sich die Werte

$$K_1 = H \cdot \sin\alpha \qquad (3$$
$$K_2 = H \cdot \cos\alpha. \qquad (4$$

Das gewonnene Resultat lautet in Worten folgendermaſsen:

Man erhält die dem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete, wenn man die Hypotenuse mit dem Sinus des Winkels und die anliegende Kathete, wenn man sie mit dem Kosinus desselben multipliziert.

Aus den Gleichungen 3 und 4 erhalten wir für die Hypotenuse den Wert

$$H = \frac{K_1}{\sin\alpha} = \frac{K_2}{\cos\alpha}.$$

Wie man auf die spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreieckes kommt.

Die Gleichungen 3 und 4 führen uns darauf. Denn

$$\frac{K_1}{H} = \sin\alpha \quad \text{und} \quad \frac{K_2}{H} = \cos\alpha,$$

welche Gleichungen in Worten ausgedrückt lauten:

Der Sinus des Winkels α ist der Quotient aus der gegenüberliegenden Kathete durch die Hypotenuse; der Kosinus des Winkels α ist der Quotient aus der anliegenden Kathete durch die Hypotenuse.

Zusatz:

$\frac{H}{K_1} = \text{cosecans}\,\alpha$, $H = K_1 \operatorname{cosec}\alpha$. Ferner ist $\frac{H}{K_2} = \text{secans}\,\alpha$, $H = K_2 \sec\alpha$. Dann ist $\frac{K_1}{H} \cdot \frac{H}{K_1} = \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha = 1$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ und $\frac{K_2}{H} \cdot \frac{H}{K_2} = \cos\alpha . \sec\alpha = 1$; $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. Hiernach läſst sich für den Quotient $\frac{1}{\sin\alpha}$ die Kosekante und für $\frac{1}{\cos\alpha}$ die Sekante des Winkels α setzen. Es ist dann $\operatorname{cosec} 45^0 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ und $\sec 45^0$ auch $1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Was Tangente und Kotangente ist.

Fig. 51 stellt einen Quadranten *abo* vor. Zieht man in demselben die Gerade *ac*, so teilt man den rechten Winkel in die spitzen Winkel α und β. Errichtet man im Punkte *b* eine Senkrechte *bm*, so ist dieselbe, wenn *ab* als Maſseinheit gilt, die Tangente des Winkels α und die Gerade *ol* die Tangente des Winkels β.

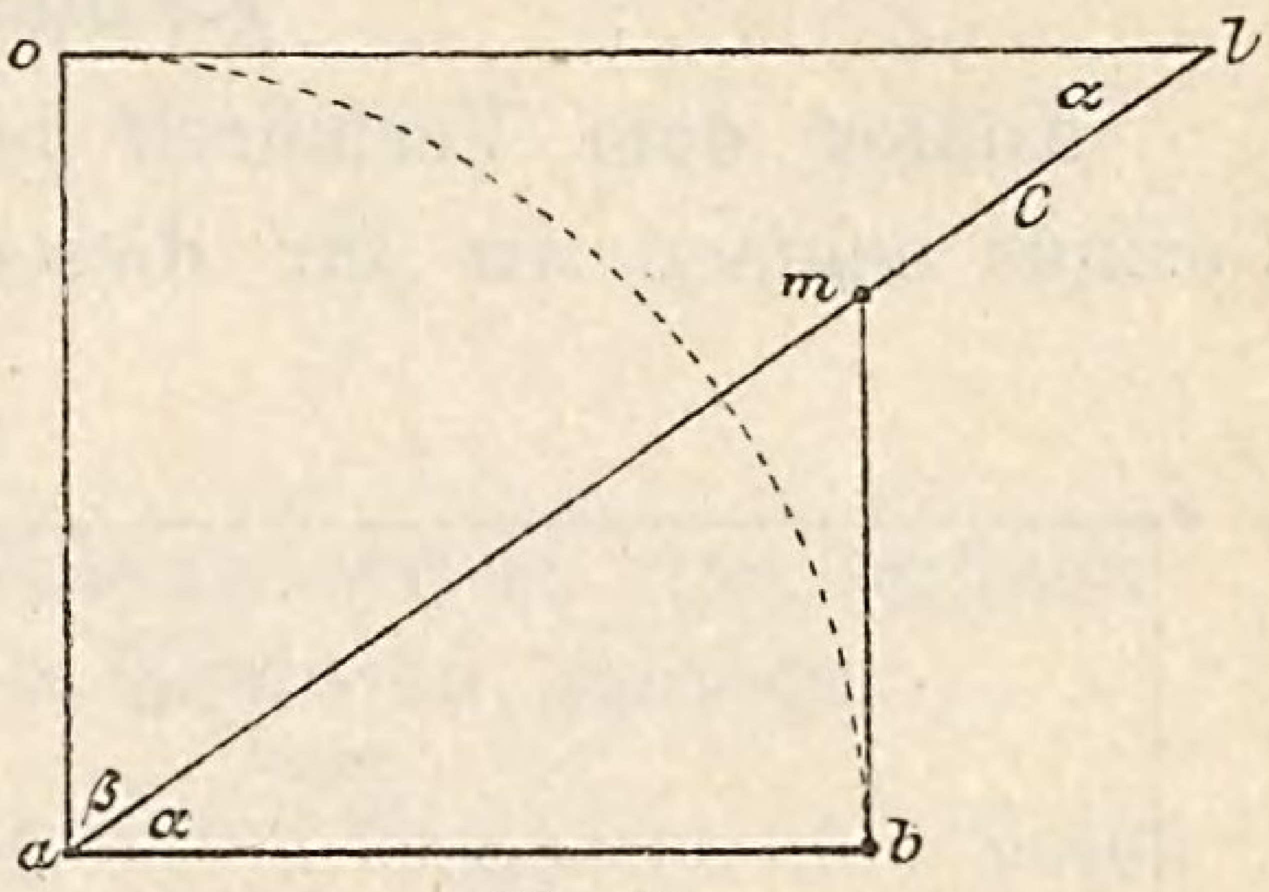


Fig. 51.

Der Winkel *alo* = ∢ α als innerer Wechselwinkel; er ist der Komplementwinkel des Winkels α. Eben deshalb erhält die Tangente des Winkels β oder $(90 - \alpha)$ auch den Namen Ko(mplementi)tangente des Winkels α. Also $\tan(90 - \alpha) = \cot \alpha$.

Nun ist wohl zu beachten, daſs die Tangenten nicht in dem Verhältnisse wie die Winkel wachsen. Wenn der Winkel von 0^0 an wächst, wächst die Tangente äuſserst langsam; dann rascher und rascher, je mehr sich der Winkel einem rechten nähert. Läſst man nämlich einen Winkel von x^0 um n^0 Grade zunehmen, so steht das entsprechende Wachstum der Tangente nicht im Verhältnis von $x^0 : n^0$, sondern dasselbe ist um so gröſser, je kleiner der Unterschied zwischen x^0 und 90^0 wird. Fügt man z. Ex. zu 60^0 noch 20^0 hinzu, so ist der entsprechende Wachstum der Tangente bedeutend gröſser als wenn man 20^0 zu 10^0 hinzuthut. Bei der Kotangente findet selbstverständlich das Umgekehrte statt. Ist der Winkel α gleich 0^0, so deckt *ac* die Gerade *ab* und *ol* wird nie von *ac* berührt, die Kotangente ist unendlich. Wächst der Winkel nur um einen Grad, so hört die Unendlichkeit auf, kurz und gut, die Kotangente wird um so kleiner, je mehr der Winkel zunimmt. Dieses Abnehmen geht anfangs langsam, das Tempo wird rascher, sobald der Winkel sich 90^0 nähert, bei 90^0 schrumpft die Kotangente so zusammen, daſs sie zuletzt Null wird. Kotangente und Tangente sind sich gleich bei 45^0.

$$\tan 0^0 = 0$$
$$\cot 0^0 = \infty$$
$$\tan 30^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \lg\ 9{,}76144$$
$$\cot 30^0 = \sqrt{3} = \lg\ 10{,}23856$$
$$\tan 60^0 = \sqrt{3} = \lg\ 10{,}23856$$
$$\cot 60^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \lg\ 9{,}76144$$

$$\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1 = \lg 10{,}00000$$
$$\tan 90^0 = \infty$$
$$\cot 90^0 = 0$$

Wie man durch die Tangente und Kotangente auf die beiden Katheten kommt.

Analog dem Verfahren bei der Erforschung des Sinus und Cosinus nehmen wir für diesen Fall die Entfernung ap von der Spitze a (Fig. 52) als die Mafseinheit an, die Bezeichnung K_1 und H_2 ist bekannt.

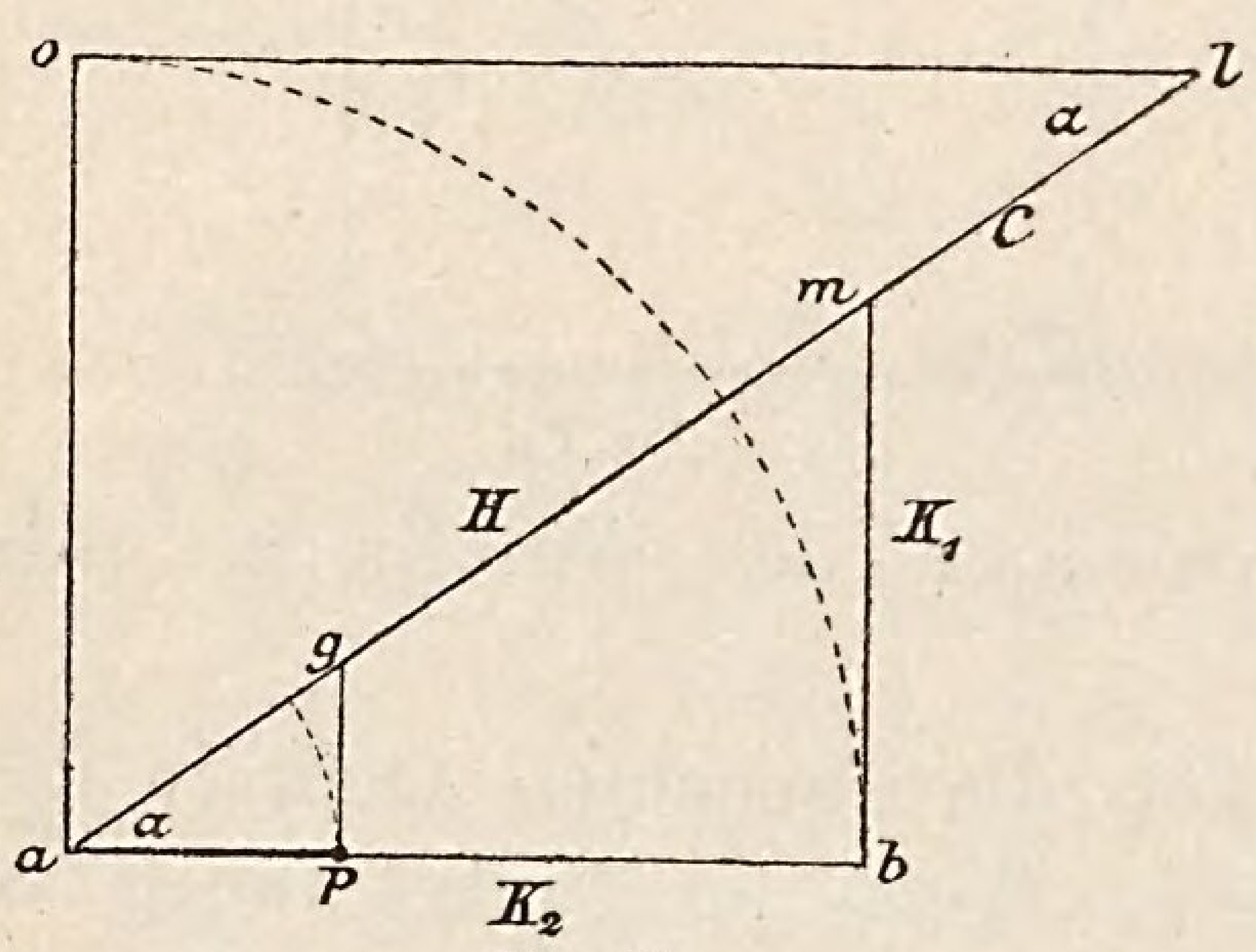


Fig. 52.

Dann führt die Proportion

$$1 : K_2 = \text{tang}\ \alpha : K_1$$

zu dem Resultat

$$K_1 = K_2 \cdot \text{tang}\ \alpha,$$

welches in Worten ausgedrückt sagen will:

Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks wird erhalten, wenn man mit der andern Kathete die Tangente des Winkels, welcher der gesuchten Kathete gegenüberliegt, multipliziert.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke abm und aol (Fig. 52) geht hervor, dafs sich verhält

$$ab : bm = ol : ao,$$

oder, wenn wir $ab = ao = 1$ nehmen, für bm alsdann $\tan \alpha$ und für ol dafür $\cot \alpha$ setzen:

$$1 : \tan \alpha = \cot \alpha : 1$$

woraus erhellt, dafs

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad \text{und} \qquad (1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \text{ und } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \text{ ist.} \qquad (2$$

Darnach können wir die Gleichung $K_1 = K_2 \tan \alpha$ auch also schreiben:

$$K_2 \cdot \frac{1}{\cot \alpha} = K_1.$$

Aus dieser Gleichung geht aber wiederum hervor, dafs

$$K_2 = K_1 \cdot \cot \alpha \text{ ist,}$$

welches Resultat in Worten lautet:

Die anliegende Kathete wird gefunden, wenn man mit der dem spitzen Winkel gegenüberliegenden Kathete die Kotangente desselben multipliziert.

Zusatz:

	$K_1 = K_2 \tan \alpha$
oder nach Seite 38	$H \sin \alpha = H \cos \alpha \,.\, \tan \alpha,$
dann ist	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$
ferner ist	$K_2 = K_1 \cot \alpha$
oder	$H \cos \alpha = H \sin \alpha \cot \alpha;$
also	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

Wie man durch Tangente und Kotangente zu den spitzen Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks gelangt.

Die soeben entwickelten Gleichungen für Tangente und Kotangente modeln wir um, und erhalten aus der Gleichung

$$K_1 = K_2 \cdot \tan \alpha$$

aldsann

$$\tan \alpha = \frac{K_1}{K_2}$$

und aus der Gleichung $K_1 = K_2 \cot \alpha$ geht wiederum hervor, daſs

$$\cot \alpha = \frac{K_2}{K_1} \text{ ist,}$$

welche Resultate also lauten:

Man findet die Tangente eines spitzen Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn man die diesen Winkel gegenüberstehende Kathete durch die ihm anliegende dividiert und die Kotangente, wenn man die diesem Winkel anliegende Kathete durch die demselben gegenüberstehende Kathete dividiert.

Entfernungs- und Höhenberechnung unter Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks.

Die Höhe des Turmes (Fig. 53) sei durch Berechnung zu finden.

Zu diesem Behufe wähle man in der horizontalen Ebene, worauf der Turm steht, von dem Punkt A, der senkrecht unter der Spitze D liegt, so weit entfernt eine Stelle, von welcher aus man nach D visieren kann. Es sei dieselbe B. Die Linien $B'A'$ und $A'D$ sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $B'A'D$. Der Elevations- oder Höhenwinkel sei $A'B'D = \alpha$. Ist die Standlinie $AB = A'B'$ abgemessen und beträgt sie m Meter, so ist

$$A'D = m \cdot \tan \alpha.$$

Da aber das Auge des Beobachters von der Ebene AB um die Strecke BB' entfernt ist, so ist dieselbe noch hinzuzuzählen, und die Höhe des Turmes ist dann:

$$AD = m \cdot \tan \alpha + BB'.$$

Es seien zum anderen die Entfernungen AC und BC, wenn sich C und B gerade gegenüberbefinden (Fig. 54), zu bestimmen!

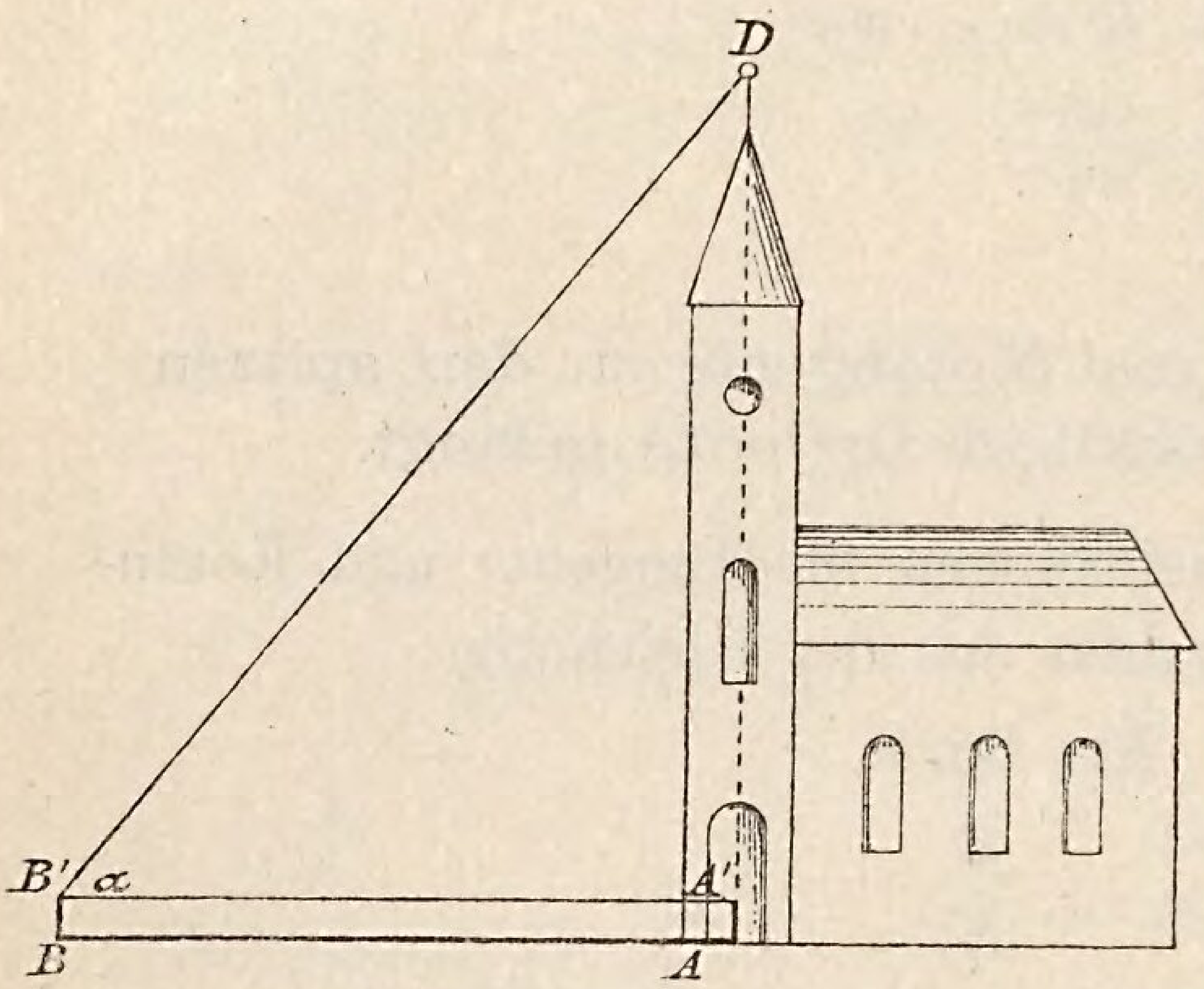


Fig. 53.

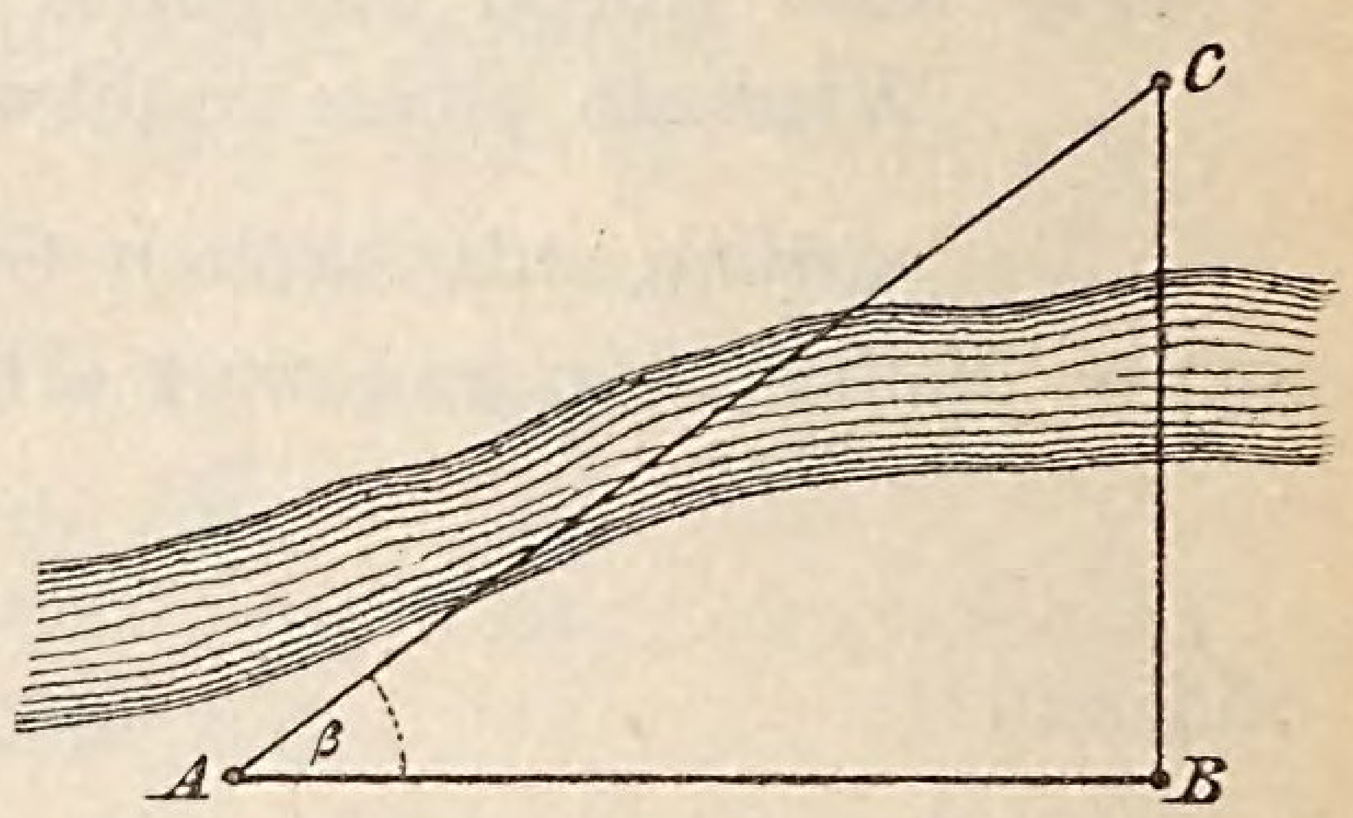


Fig. 54.

Die Strecke AB ist zugänglich und kann durch Vermessung ermittelt werden. Sie betrage k Kilometer. Der Winkel BAC sei gleich β. Alsdann ist

$$BC = k \tan \beta$$

$$AC = \frac{k}{\cos \beta}$$

Der Sinus und Kosinus eines stumpfen Winkels.

Fig. 55 stellt einen stumpfen Winkel vor, seine Schenkel sind ab und bc. Schneidet man auf bc das der Längeneinheit entsprechende Stück Pb ab und fällt man von P auf ab ein Perpendikel, so trifft dieses nicht mehr den Schenkel ab, sondern dessen Verlängerung bd. Dieses Perpendikel ist aber der Sinus des stumpfen Winkels α und wie wir zugleich gewahren, auch des Supplementwinkels β.

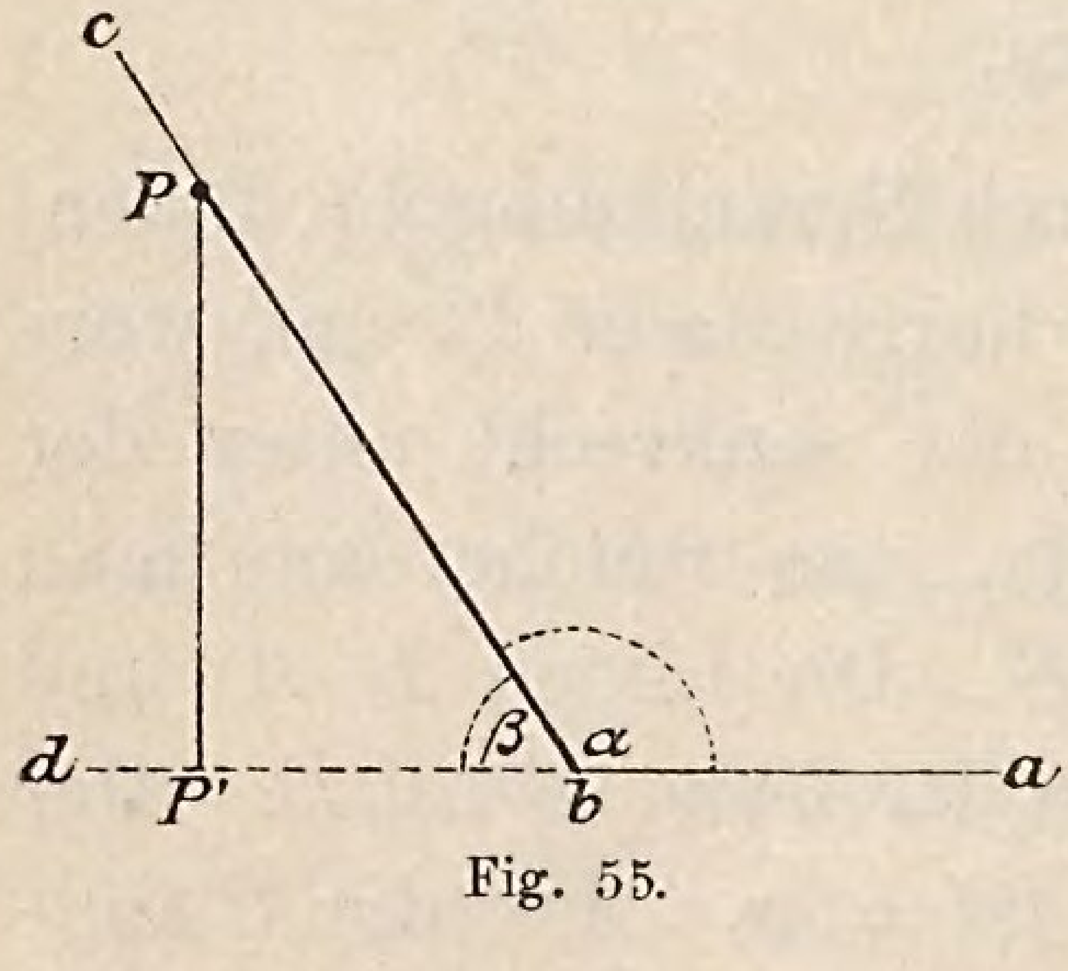


Fig. 55.

Demnach ist

$$\sin 100^0 = \sin (180 - 80) = \sin 80^0$$

oder allgemein

$$\sin \alpha = \sin (180 - \beta) = \sin \beta,$$

was heifst: Der Sinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus seines spitzen Nebenwinkels.

Die Kathete $P'b$ kann nichts anderes vorstellen als den Kosinus des spitzen Nebenwinkels β oder des stumpfen Winkels α. So ist auch der Kosinus eines stumpfen Winkels gleich dem Kosinus seines spitzen Nebenwinkels. Da er aber vom Scheitel des Winkels aus nicht nach rechts, sondern in entgegengesetzter Richtung d. i. nach links gemessen werden mufs, so führt er die Beifügung negativ. Also:

$$\cos 140^0 = \mp \cos(180 - 40) = -\cos 40$$

oder allgemein

$$\cos \alpha = \mp \cos(180 - \beta) = -\cos \beta.$$

Zusatz:

Nach S. 41 ist

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{\sin(180 - \alpha)}{\cos(180 - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha;$$

ferner

$$\cot(180 - \alpha) = \frac{\cos(180 - \alpha)}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha.$$

Der Sinus und Kosinus eines negativen Winkels.

Der Ausdruck negativ ist nicht als verneinend aufzufassen, sondern hat die Bedeutung entgegengesetzt. Solche Gegensätze sind oben und unten, rechts und links. Fig. 56 zeigt uns den unteren Winkel gleichsam als das Spiegelbild des oberen. Bei diesem strebt der Sinus nach oben, bei dem andern entgegengesetzt nach unten, dem Spiegelbild eines Schiffers im Kahne vergleichbar. Der Kosinus des oberen und unteren Winkels fallen in eine Ebene (Linie) zusammen, wie Kahn und Bild sich auf der Oberfläche des Wassers berühren. Hieraus wird klar, dafs

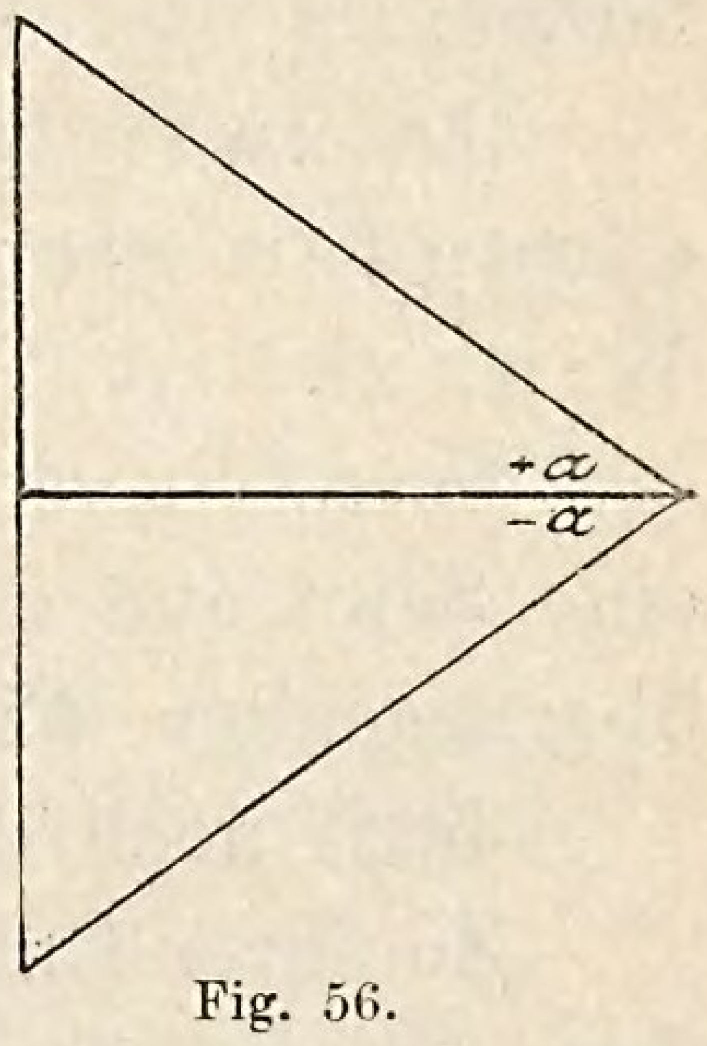


Fig. 56.

1. der gleiche, entgegengesetzte Winkel gleichen negativen Sinus, und
2. der gleiche, entgegengesetzte Winkel gleichen positiven Kosinus hat.

Es ist also

$$\sin -\alpha = -\sin \alpha$$
$$\cos -\alpha = \cos \alpha.$$

Was Sinus- und Kosinusregel ist.

Bisher hatten wir es nur mit dem rechtwinkligen Dreieck zu thun, da aber dasselbe nicht für alle Fälle in Anwendung gebracht werden kann, so ist es notwendig, auch das schiefwinklige Dreieck in den Bereich unserer Betrachtung zu ziehen.

Errichtet man auf der Grundlinie gegenüber der Spitze des schiefwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 57) ein Perpendikel, so wird dasselbe in die rechtwinkligen Dreiecke Bbp und Ccp geteilt.

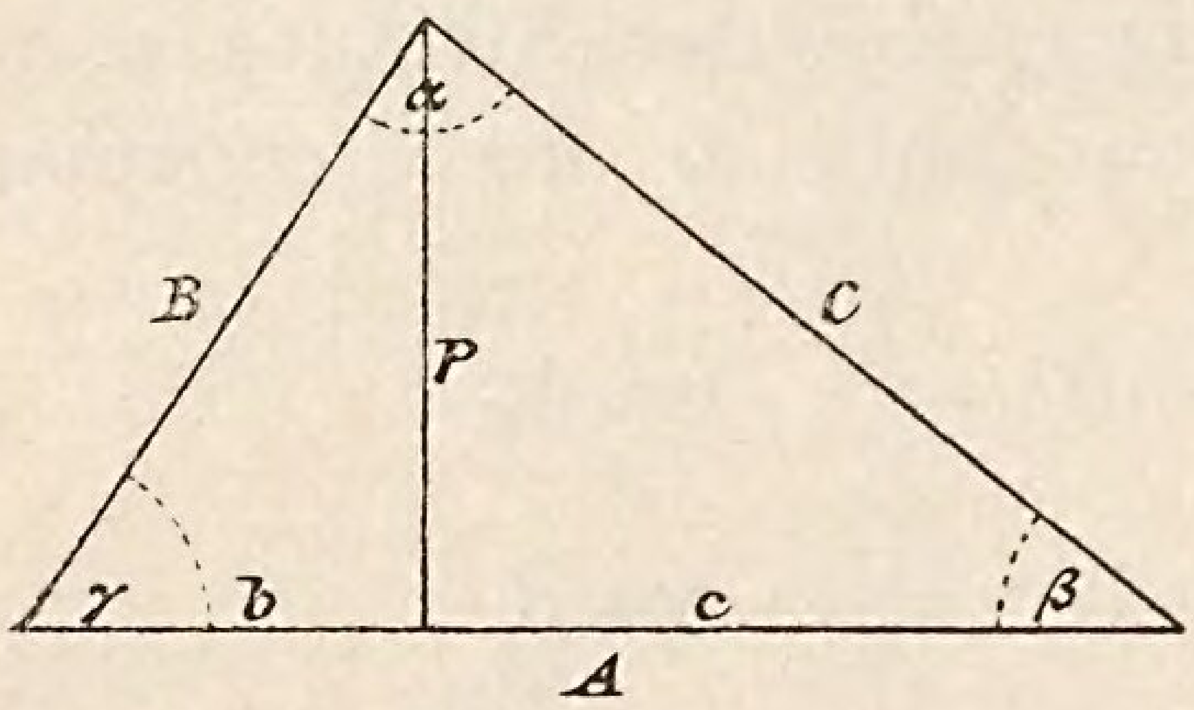


Fig. 57.

Die den Seiten gegenüberliegenden Winkel sind mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet. Die Seite p ist den Teildreiecken gemeinsam. Nun ist

$$p = B \sin\gamma = C \sin\beta,$$

woraus folgt, dafs

$$B \cdot \sin\gamma = C \cdot \sin\beta \text{ ist.}$$

Beide Gleichungen führen auf die Bruchgleichung

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Bringen wir dieselbe in die Form einer Proportion,

$$C : B = \sin\gamma : \sin\beta,$$

so haben wir hierdurch die Sinusregel gewonnen, welche in Worten lautet:

Je zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander wie die Sinuse der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Diese Regel kommt zur Anwendung, wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel oder aber zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.

Jetzt noch die Kosinusregel.

Zu ihrer Entwicklung ist die Fig. 57 gleichfalls dienlich. Nach dem Pythagoräer ist

$$p^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2.$$

Darnach ist $B^2 - b^2 = C^2 - c^2$ und

$$C^2 = B^2 + c^2 - b^2.$$

Da nun c um b kleiner als A ist, so ist

$$c = A - b \text{ und}$$

$$c^2 = (A - b)^2 = A^2 - 2\,Ab + b^2.$$

Substituiert man diesen Wert von c^2 in die obige Gleichung, so erhält man

$$C^2 = B^2 + (A^2 - 2\,Ab + b^2) - b^2$$
$$= A^2 + B^2 - 2\,Ab.$$

Die Fig. 57 zeigt uns wiederum, daſs $b = B \cos \gamma$ ist, so daſs wir vorstehende Gleichung auch also schreiben können:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B \cos \gamma,$$

welche Gleichung in Worten ausgedrückt heiſst:

Das Quadrat einer Seite ist gleich den Quadraten der beiden andern, vermindert um das doppelte Produkt derselben in den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Diese Gleichung hilft uns die Seite eines Dreieckes finden, sobald zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind. Eine geringe Ummodlung und wir haben, was wir suchten, die Kosinusregel. Also:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B \cos \gamma.$$

Dann ist $\quad 2\,A\,B \cos \gamma = A^2 + B^2 - C^2$

und endlich $\quad \cos \gamma = \dfrac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,A\,B},$

welche Gleichung in Worten folgenderweise ausgesprochen wird:

In jedem Dreieck ist der Kosinus eines Winkels gleich den Quadraten der beiden ihn einschlieſsenden Seiten, vermindert um das Quadrat der ihm gegenüberliegenden Seite, dividiert durch das doppelte Produkt der beiden ihn einschlieſsenden Seiten.

Diese Kosinusregel findet ihre Anwendung, wenn die Seiten bekannt, aber die Winkel zu bestimmen sind.

Entfernungs- und Höhenberechnung unter Anwendung des schiefwinkligen Dreiecks.

Es sei die Entfernung C von A und B (Fig. 14 S. 12) trigonometrisch zu bestimmen!

Die Strecke AB, die abgegangen werden kann, sei A', der Winkel $BAC = \gamma$ und der $ABC = \delta$; dann ist der Winkel $ACB = 180 - (\gamma + \delta)$.

Nach der Sinusregel erhalten wir für die zu bestimmenden Seiten B' und C' die Proportionen

$$B' : A' = \sin \delta : \sin (\gamma + \delta) \text{ und}$$

$$C' : A' = \sin \gamma : \sin (\gamma + \delta),$$

woraus für B' und C' folgende Werte hervorgehen

$$B' = \frac{A' \sin \delta}{\sin (\gamma + \beta)}, \qquad C' = \frac{A' \sin \gamma}{\sin (\gamma + \delta)}.$$

Ferner soll gezeigt werden, wie man die Höhe eines Berges trigonometrisch bestimmt. Hiezu diene die Fig. 13 auf S. 12.

Präparation: $cd =$ Höhe des Berges; $ab = m$ die gemessene Standlinie; $\sphericalangle\, bad = \beta$; $\sphericalangle\, cbd = \alpha$. Dann ist

als Aufsenwinkel $\sphericalangle\, \alpha = \sphericalangle\, adb + \sphericalangle\, \beta$;

$$\sphericalangle\, adb = \sphericalangle\, \alpha - \sphericalangle\, \beta;$$

ferner ist $cd = bd \cdot \sin \alpha$.

Damit hat es den Anschein als wäre man mit der Lösung der gestellten Aufgabe schon zu Ende. Aber dies ist noch nicht der Fall; denn es ist nicht bd, sondern nur die Standlinie ab bekannt. Aus der haben wir nach der Sinusregel die Länge bd herzuleiten und den für sie gefundenen Wert in die vorstehende Gleichung einzustellen und dann erst ist die Lösung der Aufgabe gefunden.

Also $bd : m = \sin \beta : \sin (\alpha - \beta)$

$$bd = \frac{m \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Substituieren wir diesen für bd erhaltenen Ausdruck in die obige Gleichung, so haben wir die Höhe des Berges, nämlich

$$cd = \frac{m \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Flächenberechnung des rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete als die Grundlinie, die andere als dessen Höhe zu nehmen, dann ist nach S. 23

$$J = \frac{K_1 \cdot K_2}{2}$$

oder nach S. 38

$$J = \tfrac{1}{2} H^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

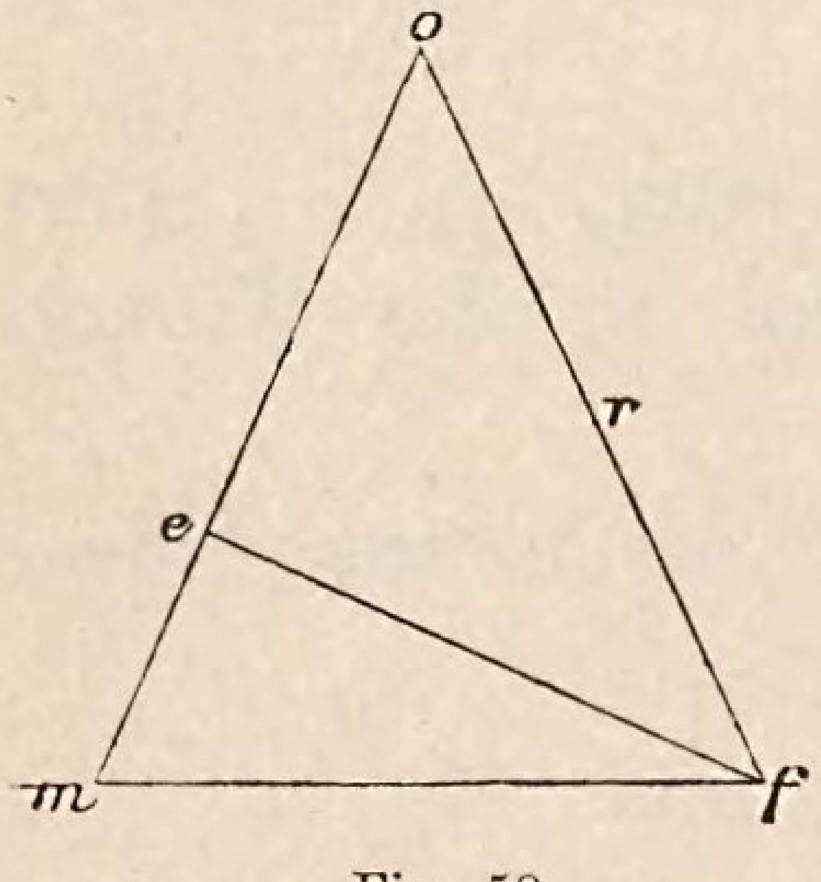


Fig. 58.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck betrachtet man, um eine bequemere Formel zu erlangen, den einen Schenkel (Fig. 58) als die Grundlinie. Auf ihm errichtet man die Senkrechte ef. Ist der Winkel $mof = \alpha$, so ist $ef = h = r \sin \alpha$ und der Flächeninhalt

$$J = \frac{r \cdot r \sin \alpha}{2} = \tfrac{1}{2} r^2 \sin \alpha.$$

Darnach wird die Berechnung eines Kreisabschnittes, bei dem nicht die Sehne, wohl aber die beiden den Sektor einschliefsenden Radien bekannt sind, ermöglicht; der Satz S. 25

$$r^2 \pi \frac{a^0}{360} - \frac{s\,h}{2}$$

geht über in den Satz

$$\text{Segment} = r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360} - \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Setzt man $\frac{1}{2} r^2$ als gemeinschaftlichen Faktor eigens, so ist

$$\text{Segment} = \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{\alpha \cdot \pi}{180} - \sin \alpha\right).$$

Nun kann für $\frac{\alpha \cdot \pi}{180}$ gesetzt werden arc α, denn es verhält sich bei dem Radius 1

$$2\pi : \text{arc}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0,$$

woraus folgt

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}.$$

Darnach ist allgemein für den Inhalt eines Segmentes zu setzen

$$J = \tfrac{1}{2} r^2 (\text{arc}\,\alpha - \sin \alpha).$$

Zusatz:

Um die Sehne bestimmen zu können, fällt man auf dieselbe eine Senkrechte, diese halbiert den Zentriwinkel und die Sehne. Ist ihre Länge x, so ist

$$\tfrac{1}{2} x = r \sin \frac{\alpha}{2};\quad x = 2 r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Thesen aus der sphärischen Trigonometrie.

Erläuternde Sätze aus der räumlichen Geometrie.

Eine gerade Linie, welche eine Ebene schneidet, steht zu ihr senkrecht oder geneigt. Für ein Perpendikel gilt der Lehrsatz: Steht eine Gerade auf zwei Geraden in einer Ebene senkrecht, so steht sie auf jeder dritten durch ihren Fufspunkt gehenden senkrecht. Wenn somit Perpendikel ab (Fig. 59) senkrecht auf bc und bd steht, so steht es auch senkrecht auf die beliebig durch den Fufspunkt b gezogene Linie be. Um dies beweisen zu können, verbinde man c mit d, lege durch b in der Ebene EN die beliebige Gerade be, welche cd in e

schneidet, verlängere ab um sich selbst bis a' und verknüpfe schliefslich a und a' mit c, e und d, so ist

1. $\triangle\, abc \cong \triangle\, a'bc$ und dann $ac = a'c$
2. $\triangle\, abd \cong \triangle\, a'bd$ „ „ $ad = a'd$
3. $\triangle\, acd \cong \triangle\, a'cd$ „ „ $\sphericalangle\, acd = \sphericalangle\, a'cd$
4. $\triangle\, ace \cong \triangle\, a'ce$ „ „ $ae = a'e$
5. $\triangle\, abe \cong \triangle\, a'be$ „ „ $\sphericalangle\, abe = a'bc.$

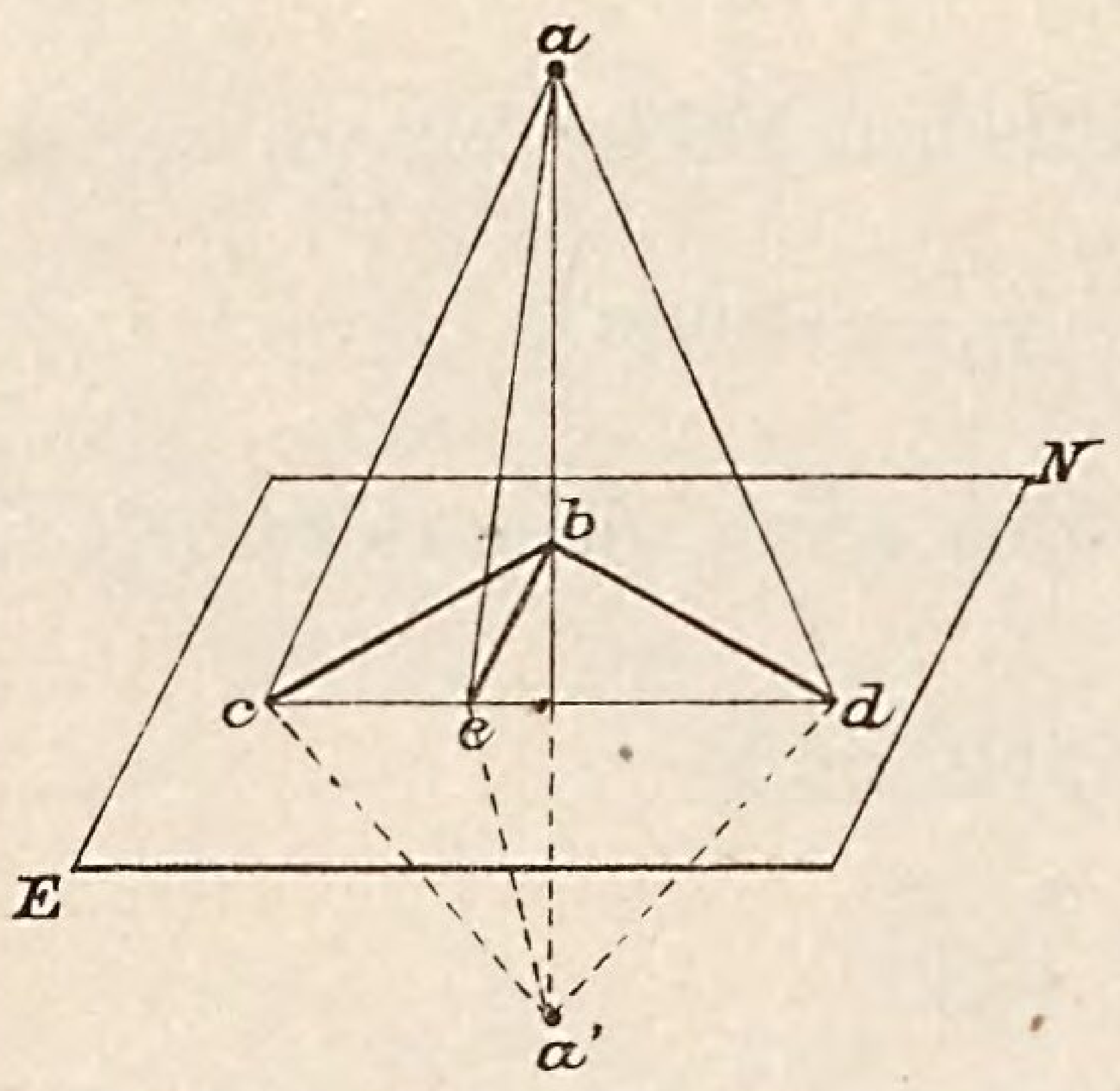


Fig. 59.

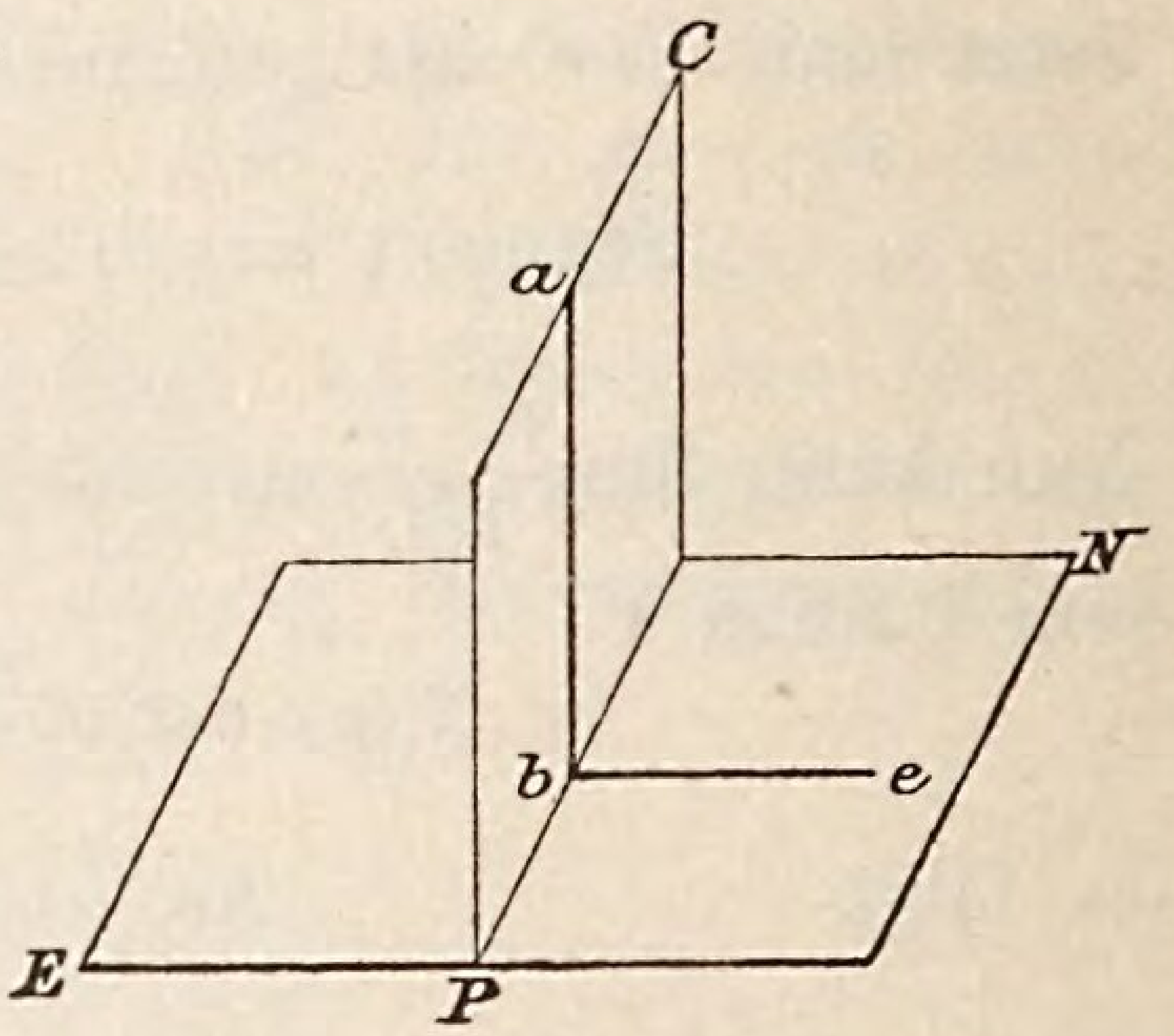


Fig. 60.

Beide Winkel sind Nebenwinkel und so mufs jeder von ihnen, da sie einander gleich sind, ein rechter sein, wodurch bewiesen ist, dafs ab senkrecht auf be und damit senkrecht auf der Ebene EN, in welcher die Gerade be liegt, steht. Ferner gilt der Lehrsatz: Fällt man in einer von zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie, so steht es senkrecht auf der andern Ebene. Bei Fig. 60 sei $CP \perp EN$ ab ist ein Perpendikel in CP und steht senkrecht zu bP, also auch senkrecht auf EN. Fügt man in EN die Gerade $eb \perp bP$, so ist, da $ab \perp bP$, $\sphericalangle abe = \sphericalangle bP = R$ und somit steht ab auf der Ebene EN, wie auf be, welche Gerade in dieser Ebene liegt, senkrecht.

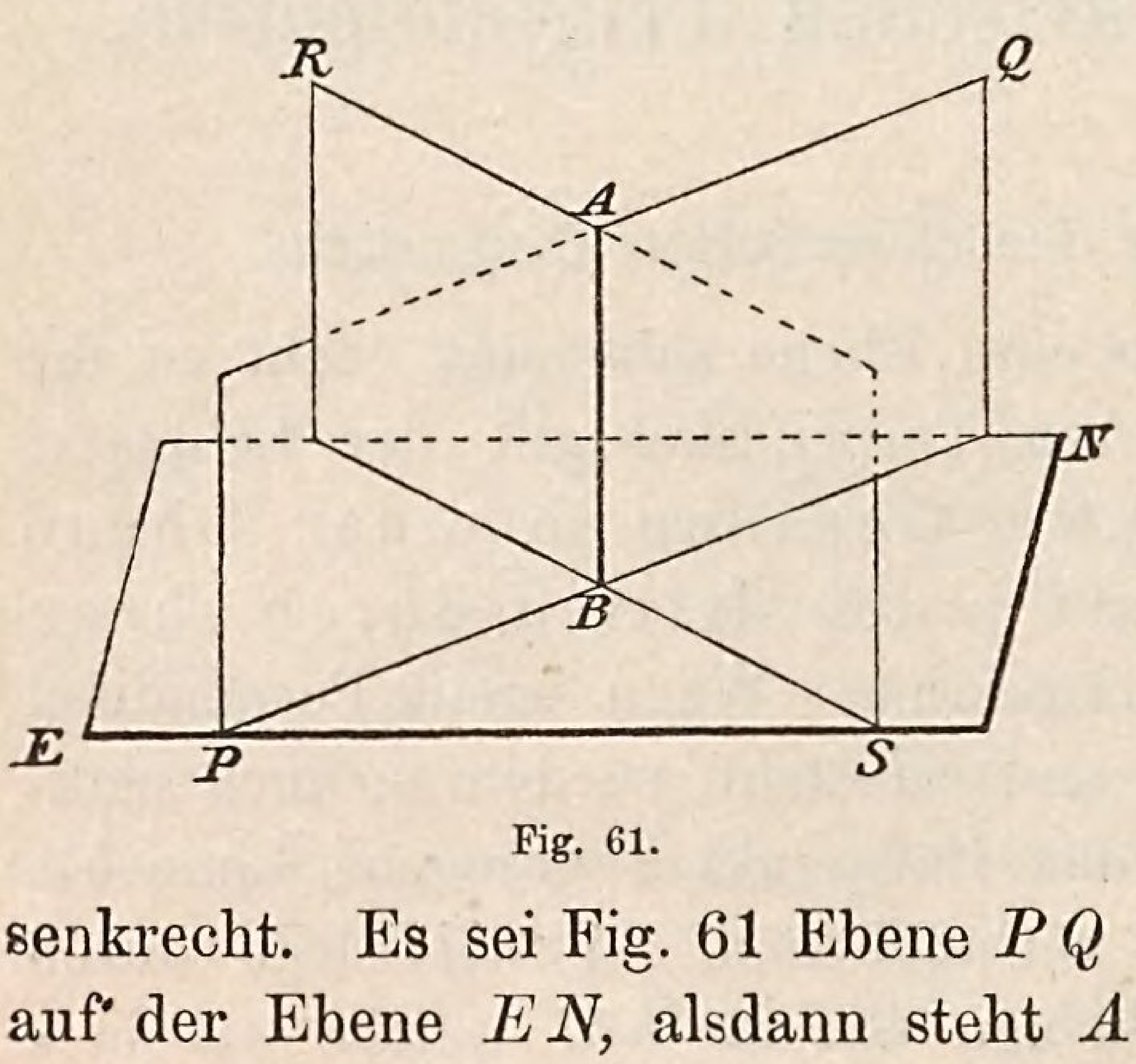


Fig. 61.

Schneiden sich 2 Ebenen, die auf einer dritten senkrecht stehen, so ist ihre Durchschnittslinie auf dieser Ebene senkrecht. Es sei Fig. 61 Ebene PQ wie auch Ebene RS senkrecht auf der Ebene EN, alsdann steht AB senkrecht auf EN. Denkt

man sich im Durchschnittspunkte B auf die Ebene EN eine Senkrechte errichtet, so fällt diese in die beiden Ebenen PQ und RS und da beide auf EN senkrecht stehen, in ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie BA.

Fig. 62 zeigt uns die Gerade ab zur Ebene EN geneigt. Fällt man von b auf die Ebene EN das Perpendikel bc und verbindet man c mit a, so wird ac die Projektion von ab genannt und der Winkel, welchen die geneigte Gerade mit ihrer Projektion einschliefst, heifst Neigungswinkel. Zieht man an ab im rechten Winkel die Gerade fg, so gilt der Lehrsatz: Steht eine gegen eine Ebene geneigte Gerade senkrecht auf einer Geraden in der Ebene, alsdann steht auch ihre Projektion auf dieser Geraden senkrecht.

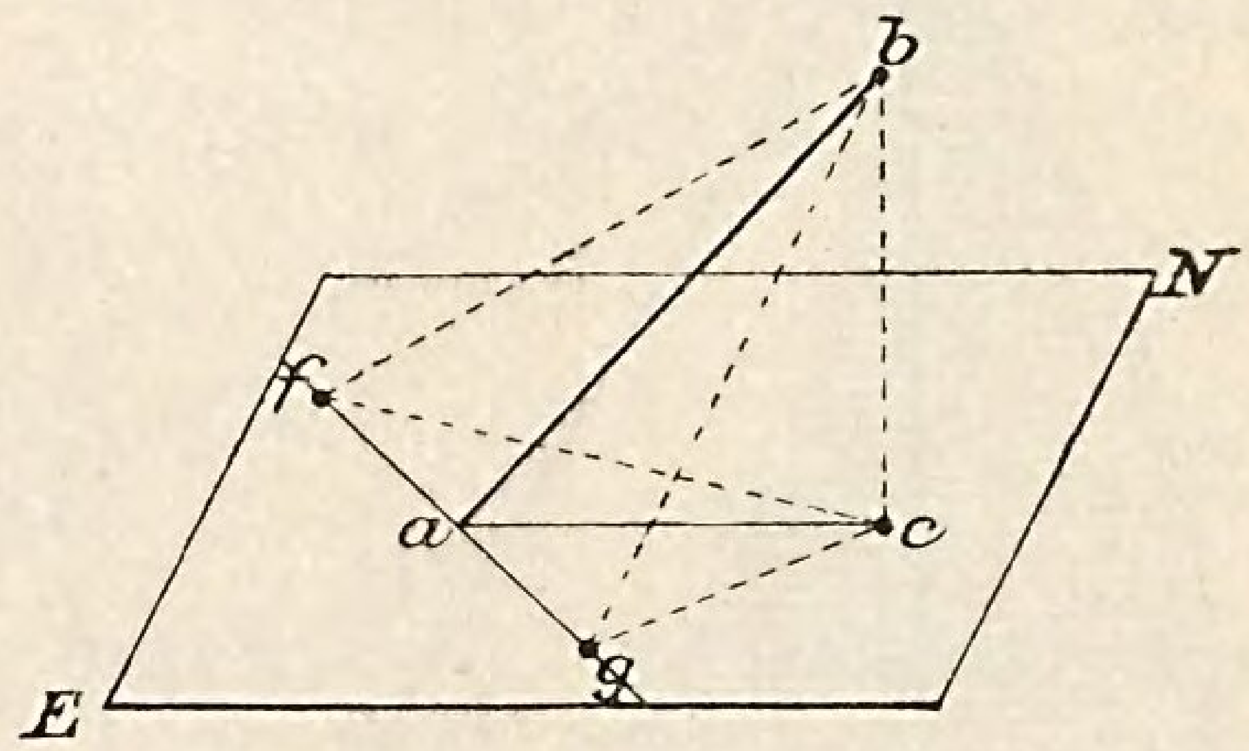


Fig. 62.

Um diese Behauptung beweisen zu können, schneidet man von a aus auf der Geraden fg die zwei gleichen Stücke af und ag ab und zieht bf und bg, alsdann ist $\triangle\, baf \cong \triangle\, bag$, demnach $bf = bg$. Wie nun f und g von b gleichweit entfernt sind, so müssen sie auch vom Fufspunkt c der Senkrechten bc, wenn man f und g mit ihm in Verbindung bringt, gleichweit abstehen. Dann ist $cf = cg$ und $\triangle\, fac \cong \triangle\, gac$ und damit ist $\sphericalangle\, caf = \sphericalangle\, cag$, daher als gleich grofse Nebenwinkel jeder ein rechter, weshalb bewiesen sein dürfte, dafs ac gleichfalls senkrecht auf fg steht.

Die Abweichung zweier sich schneidender Ebenen fbg und fcg (Fig. 62) heifst ein Flächenwinkel. Errichtet man in einem Punkte a der Durchschnittslinie fg auf dieselbe die Senkrechten ab und ac in den Ebenen fbg und fcg, so kommt man auf den Neigungswinkel bac, welcher der Repräsentant des Flächenwinkels ist. Noch ist beizufügen, dafs die Durchschnittslinie zweier Ebenen auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht steht.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Es sei Fig. 63 $\triangle\, ABC$ ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck. Verbindet man das Kugelzentrum Z mit den Eckpunkten des sphärischen Dreiecks, so erhält man die dreiseitige körperliche Ecke $ZABC$. Auf den Kanten CZ und AZ errichtet man die Senkrechten BD und BE und verbindet sie durch DE. Da nun

BD auf der Durchschnittslinie CZ senkrecht steht, so mufs dies Perpendikel nach Fig. 60 auch auf der Ebene ZCA senkrecht stehen. Ferner ist BE ein Perpendikel auf AZ, seine Projektion DE mufs sodann zu AZ nach Fig. 62 gleichfalls im rechten Winkel liegen. Von den entstandenen geradlinigen Dreiecken sind daher die Dreiecke BDZ und BDE bei D, die Dreiecke BEZ und DEZ bei E rechtwinklig.

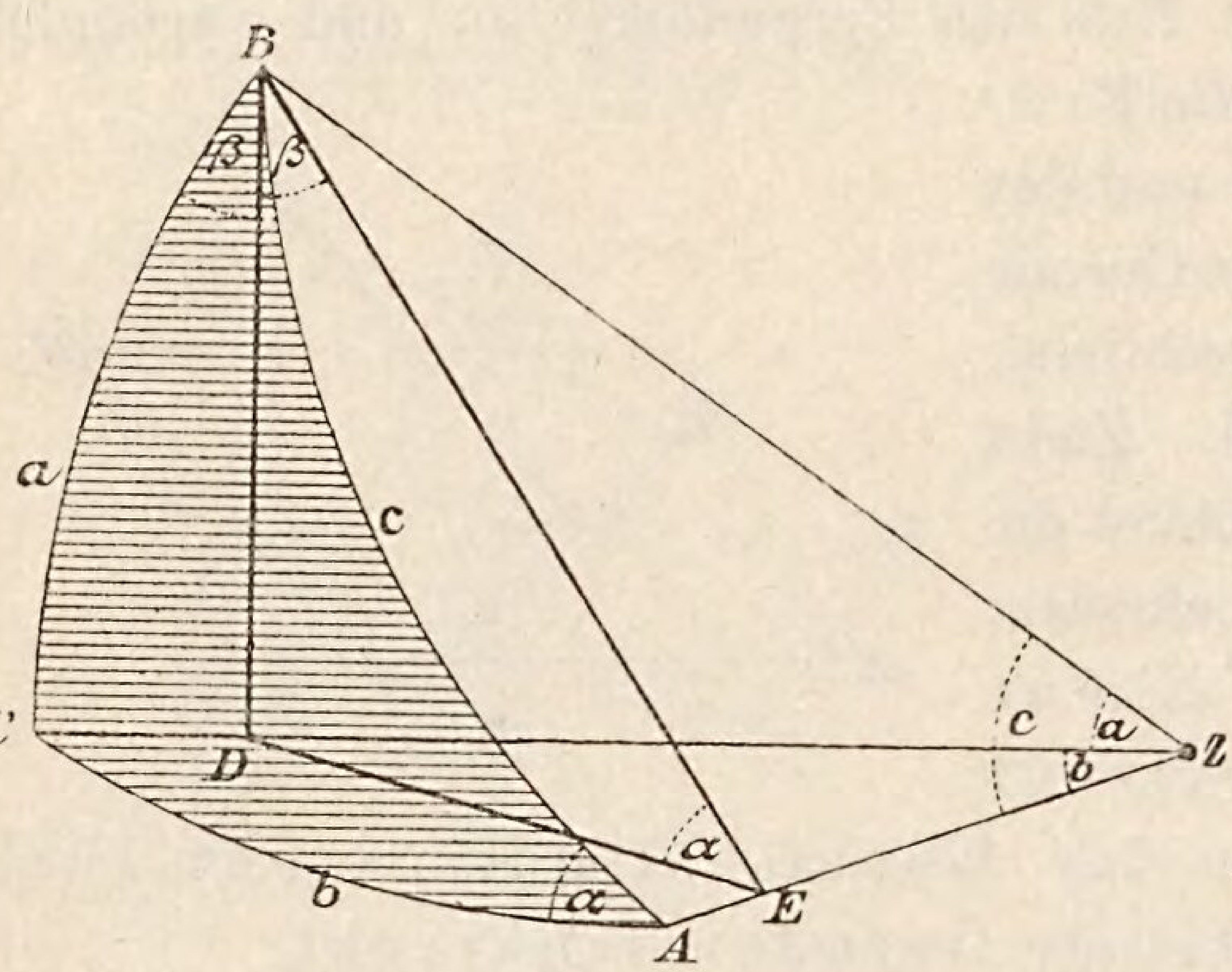


Fig. 63.

Auf der Kante oder Durchschnittslinie AZ stehen die Geraden EB und ED, welche sich in den Ebenen ZAC und ZAB befinden, senkrecht. Sie bilden den Neigungswinkel BED, welcher als Repräsentant des Flächenwinkels α vom $\triangle ABC$ ebenso grofs ist wie $\sphericalangle \alpha$. Die Seiten dieses sphärischen Dreieckes sind, da Bogen und Winkel gleiches Mafs haben, durch die Mittelpunktswinkel gegeben. Sie hat man sich somit stets in Graden, nie nach Längen ausgedrückt vorzustellen. Bezeichnen wir die Hypotenuse durch c und die beiden Katheten durch a und b, so ist

$$c = \sphericalangle AZB; \quad a = \sphericalangle BZC; \quad b = \sphericalangle AZC.$$

Wie man auf die spitzen Winkel und die Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes kommt.

Nach S. 38 ist

$$\sin \alpha = \frac{BD}{BE}, \quad \cos \alpha = \frac{DE}{BE}.$$

Da aber diese Geraden den Mittelpunktswinkeln gegenüberliegen und rechtwinkligen Dreiecken, wie sie oben angeführt wurden, zugehören, so lassen sie sich auch also bestimmen:

$$BD = BZ \sin a$$
$$BE = BZ \sin c = EZ \tan c$$
$$DE = EZ \tan b.$$

Darnach ist $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}.$

Alsdann ist $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}; \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}.$

Dividiert man die Sinuse der beiden spitzen Winkel durcheinander, so erhält man
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin b \cdot \sin c}{\sin c \cdot \sin a} = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Schreibt man diese Gleichung in Form einer Proportion, also
$$\sin\alpha : \sin\beta = \sin a : \sin b,$$
so gelangt man zu der wichtigen Sinusregel:

Die Sinuse zweier Seiten verhalten sich wie die Sinuse der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Für die Hypotenuse c erhalten wir
$$\cos c = \frac{EZ}{BZ}.$$

Erweitern wir diesen Quotienten durch $\frac{DZ}{DZ}$, so erhalten wir den Ausdruck
$$\cos c = \frac{EZ \,.\, DZ}{BZ \,.\, DZ} = \frac{EZ \,.\, DZ}{DZ \,.\, BZ}.$$

Es ist aber $\frac{EZ}{DZ} = \cos b$ und $\frac{DZ}{BZ} = \cos a$, mithin läfst sich schreiben
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

Durch den Hauptbogen Cm (Fig. 64) ist das schiefwinklige sphärische Dreieck ABC in die zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecke AmC und BmC zerlegt. Nach dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie gilt, wenn wir Cm mit y bezeichnen

$$\sin b : \sin y = \sin 90^0 : \sin\alpha \qquad (1$$
$$\sin a : \sin y = \sin 90^0 : \sin\beta. \qquad (2$$

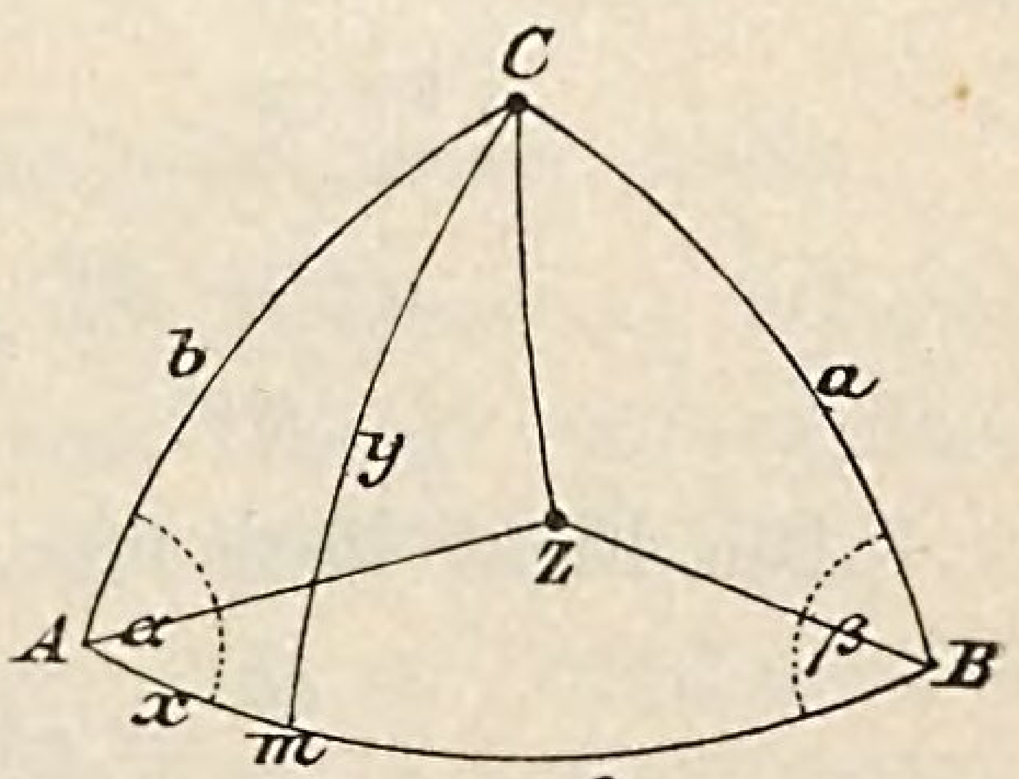


Fig. 64.

Aus diesen beiden Gleichungen entnehmen wir, dafs
$$\sin y = \sin\alpha \cdot \sin b = \sin a \,.\, \sin\beta \quad \text{ist.}$$

Die für $\sin y$ gewonnenen Werte führen auf die Gleichung
$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$
und damit auf die Proportion
$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$
durch welche die Sinusregel auch für das schiefwinklige sphärische Dreieck dargethan sein möchte.

Nach der Gleichung $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ S. 51 ergibt sich für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke BmC und AmC

$$\cos a = \cos y \cdot \cos (c - x) \qquad (1$$

$$\cos b = \cos y \cdot \cos x. \qquad (2$$

Aus Gleichung 2 geht für $\cos y$ der Wert hervor

$$\cos y = \frac{\cos b}{\cos x}.$$

Substituieren wir denselben in die Gleichung 1, so erhalten wir für

$$\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos (c - x)}{\cos x}.$$

Um den Ausdruck $\cos (c - x)$ entwickeln zu können, ist es notwendig die Fig. 65 hereinzunehmen, um aus ihr die Werte für die Winkeldifferenz $c - x$ ableiten zu können. Nach ihr ist

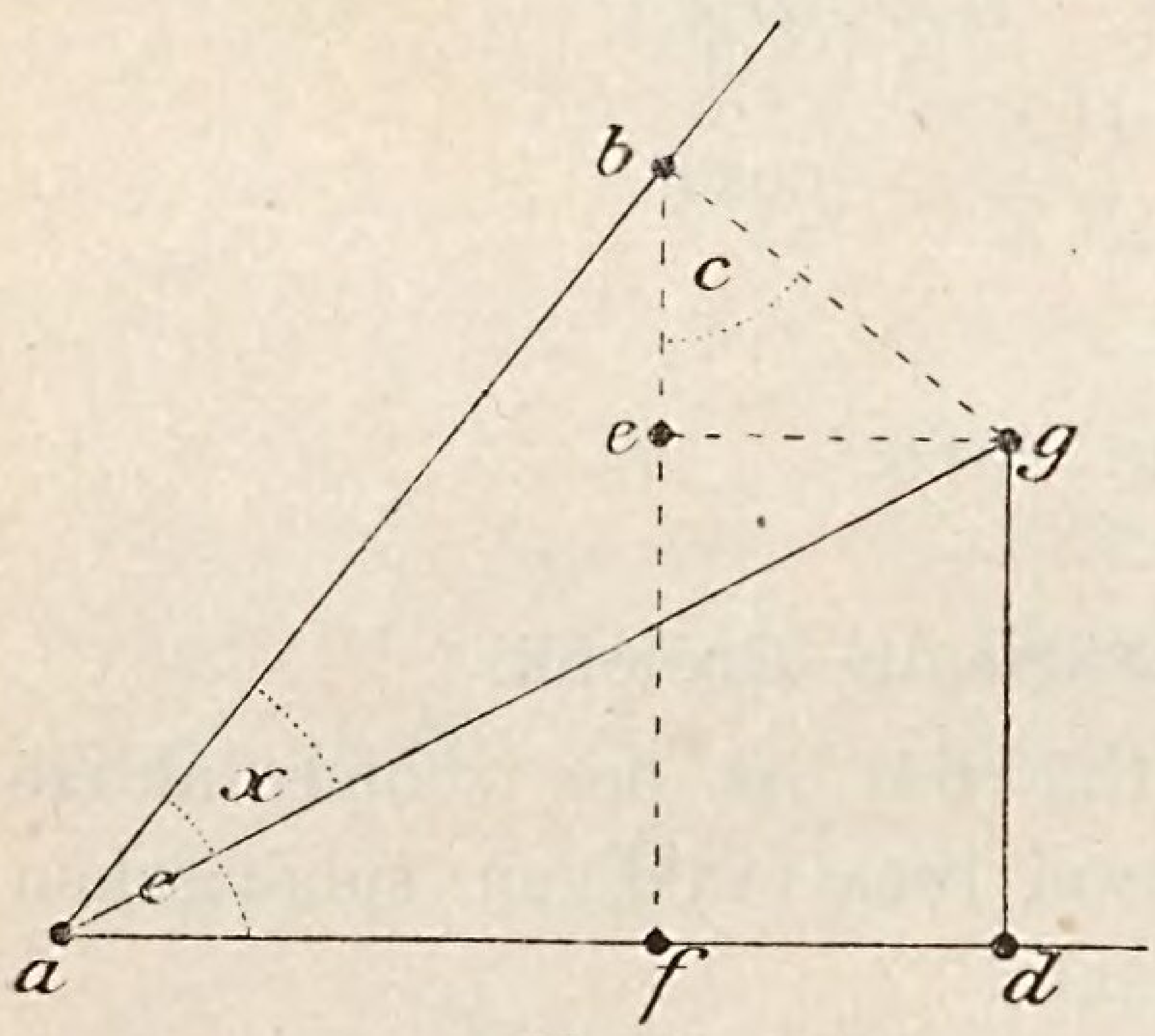


Fig. 65.

$$\cos (c - x) = \frac{ad}{ag} = \frac{af + df}{ag} = \frac{af}{ag} + \frac{df}{ag}.$$

Die Strecke $af = ab \cos c$, die Strecke df kann durch eg gemessen werden. Der gegenüberliegende Winkel $ebg = c$, da $bg \perp ab$ und $bf \perp ad$ steht. Sonach ist $eg = bg \sin c$. Dann ist

$$\frac{af + df}{ag} = \frac{ab}{ag} \cdot \cos c + \frac{bg}{ag} \cdot \sin c.$$

Die Figur läfst uns erkennen, da $bg \perp ab$ steht, dafs

$$\frac{ab}{ag} = \cos x \text{ und } \frac{bg}{ag} = \sin x \text{ ist.}$$

Setzen wir auch diese Werte ein, so ist

$$\cos (c - x) = \cos c \cdot \cos x + \sin c \cdot \sin x.$$

Da durch diese Einschaltung der gesuchte Ausdruck gefunden ist, so können wir ihn in die obige Gleichung vom schiefwinkligen sphärischen Dreieck einsetzen und schreiben

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \cdot \frac{\cos x}{\cos x} + \cos b \cdot \sin c \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Der Quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ ist gleich der $\tan x$ S. 41, und nach S. 50 und dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck AmC (Fig. 64) ist

$$\cos a = \frac{\tan x}{\tan b}, \text{ also } \tan x = \tan b \cdot \cos \alpha.$$

Substituieren wir auch diesen Wert, so erhalten wir

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \cos b \cdot \sin c \cdot \tan b \cdot \cos \alpha.$$

Es ist aber ferner $\tan b = \frac{\sin b}{\cos b}$.

Fügen wir diesen für die $\tan b$ erhaltenen Wert in die Gleichung ein, so erhalten wir die wichtige Kosinusregel in der gebräuchlichen Form

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha$$

oder auch

$$\cos a = \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c,$$

welche in Worten lautet:

Der Kosinus einer Seite ist gleich dem Produkte der Kosinuse der beiden andern, vermehrt um das Produkt der Sinuse derselben in den Kosinus des von denselben eingeschlossenen Winkels.

Thesen der analytischen Geometrie.

Wie man die Lage eines Punktes zu bestimmen sucht.

Um einen gegebenen Punkt P (Fig. 66) fixieren zu können, stellt man in seiner unmittelbaren Nähe zwei Gerade rechtwinklig zu einander. Dieselben führen in diesem Falle den Namen Achsen. Hierdurch teilt man die Ebene, in welcher der zu bestimmende Punkt sich befindet, in vier Felder, Regionen oder Quadranten. Die horizontale Achse bezeichnet man mit XX' und die senkrechte mit YY' und heifst sie beide Koordinatenachsen. Durch sie ist man im Stande, sagen zu können, der Punkt P gehört in das Feld rechts oben oder in den ersten Quadranten. Doch gibt man sich mit einer solch allgemeinen Bestimmung noch nicht zufrieden, hiermit ist erst der Anfang zur Lösung der gestellten Aufgabe gemacht. Gehen wir weiter und verbinden wir den Punkt P durch eine Senkrechte mit den Koordinatenachsen, so gewinnen wir einesteils

den Fufspunkt *m*, andernteils den Fufspunkt *n*. Deren Entfernung ist von dem Schnittpunkt der Koordinatenachsen *O* mefsbar. Nun ist *Pn* gleich der Parallele *Om* und *Pm* gleich der Parallele *On*, so dafs die Entfernungen *Pn* und *Pm* an der X- und Y-Achse können gemessen werden. Die mefsbaren Entfernungen auf den Koordinatenachsen führen den Namen Koordinaten.

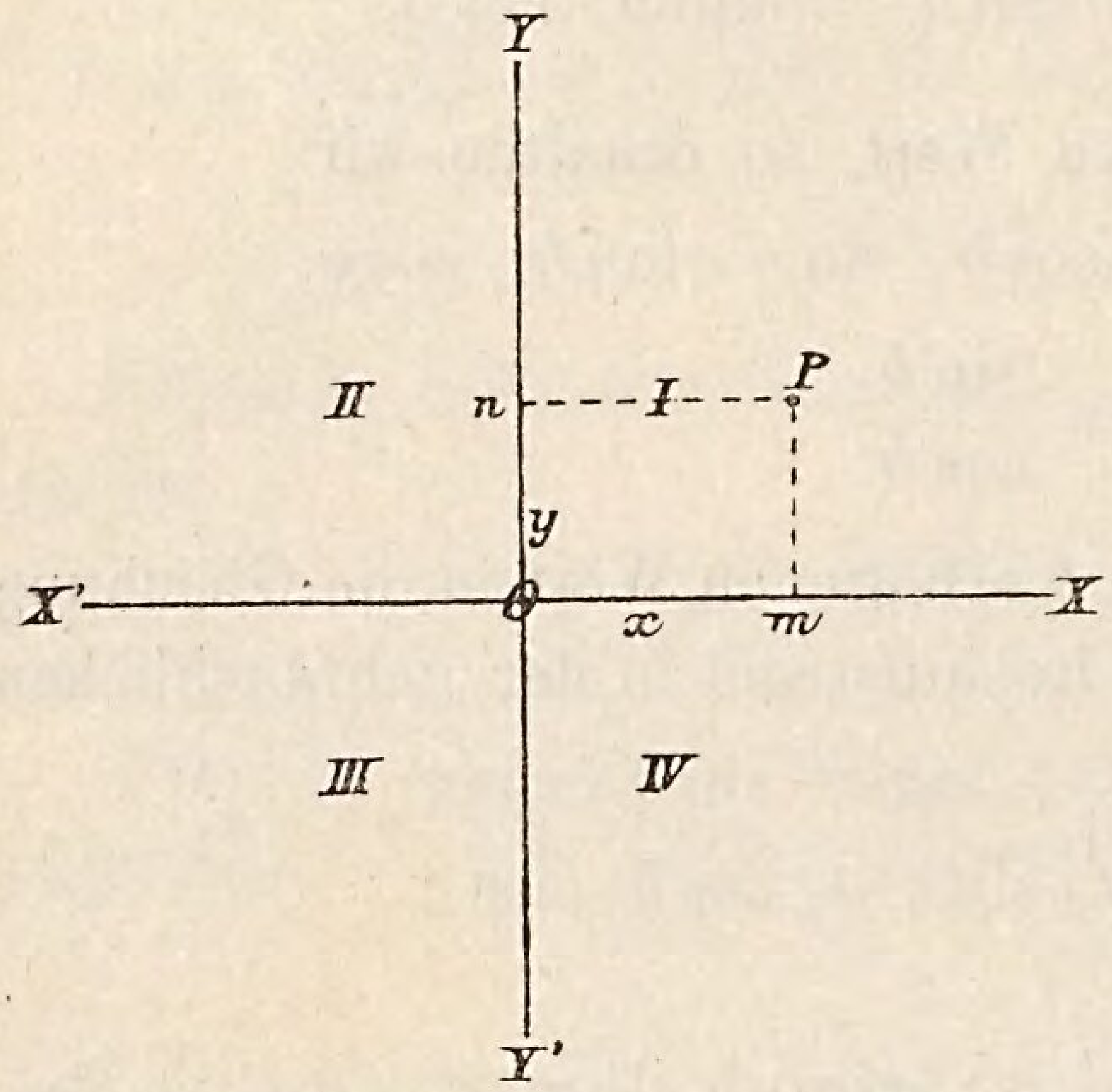


Fig. 66.

Der Abstand eines Punktes von der Achse *YY'* wird seine Abszisse und *XX'*, in deren Richtung dieselbe gemessen wird, Abszissenachse genannt. Die Abszisse erhält *x* als Bezeichnung und die Abszissenachse wird darnach wiederum die Achse der *x* geheifsen.

Der Abstand des Punktes von der Abszissenachse *XX'* wird an *YY'* gemessen, führt den Namen Ordinate und wird mit *y* bezeichnet. Dann ist *YY'* die Ordinatenachse oder die Achse der *y*.

Damit man vor Mifsverständnissen gewahrt bleibt, erhalten die Abszissen und Ordinaten nach den Regionen, in welche sie fallen, ihre Vorzeichen nämlich:

Region	I	oder	rechts	oben	$+x$ $+y$
„	II	„	links	„	$-x$ $+y$
„	III	„	„	unten	$-x$ $-y$
„	IV	„	rechts	„	$+x$ $-y$.

Die gerade Linie.

Durch zwei Punkte ist eine Linie bestimmt. Der eine Punkt sei stets *O* der Durchschnittspunkt der Koordinatenachsen. Der andere Punkt kann mit einer der Koordinatenachsen zusammenfallen, oder zwischen dieselben. In dem ersten Fall ist eine der Achsen die Linie selbst, im andern Fall bildet sie einen Winkel zu einer derselben. Selbstverständlich kann nur der letzte Fall in Betracht kommen.

Verbinden wir den Punkt P mit O (Fig. 67) so gelangen wir zu der geraden Linie AB, die mit der Abszissenachse den Winkel α einschliefst. Projizieren wir P auf XX', so gewinnen wir dadurch die Koordinaten x und y. Dann ist

$$y = x \cdot \tan \alpha.$$

Setzen wir für $\tan \alpha$ den Zahlenwert a, so haben wir die Gleichung der geraden Linie in der einfachen Form

$$y = a \cdot x.$$

Ist $\tan \alpha$ gleich 1, so ist

$$y = x$$

und die gerade Linie steht zur Abszissenachse in einem Winkel von 45°.

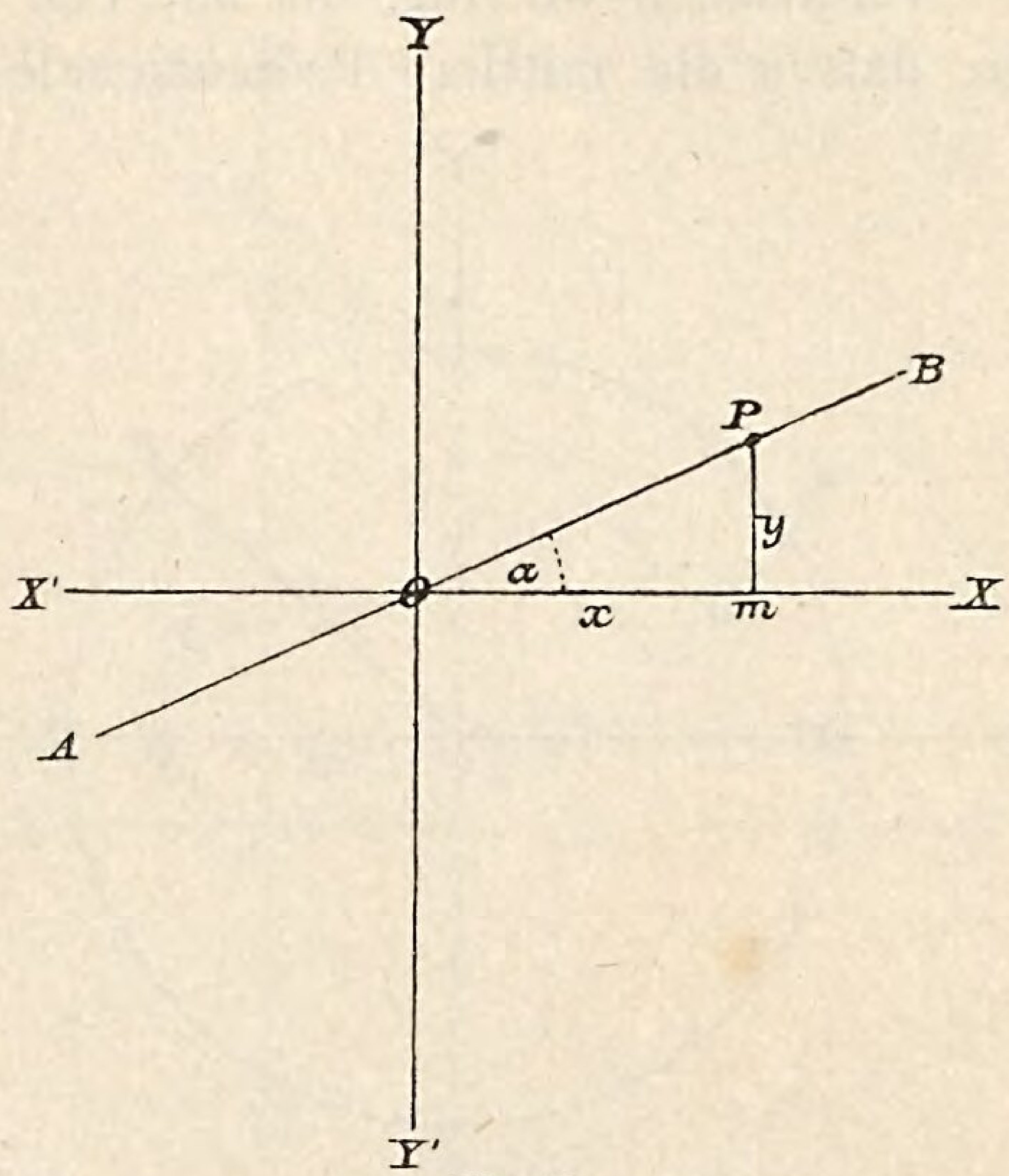


Fig. 67.

Der Kreis.

Mit dem Schnittpunkt O der Koordinatenachsen falle das Zentrum eines Kreises (Fig. 68) zusammen. Verknüpfen wir P, einen Punkt seines Umfanges, mit dem Mittelpunkt, und fällen wir das Perpendikel PN, so gewinnen wir hierdurch die Koordinaten x, y und durch OP den Radius des Kreises selbst, den wir mit r bezeichnen wollen. Dann ist nach dem Pythagoräer

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Somit bildet der Pythagoräer die Gleichung für einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt der Koordinatenachsen zusammenfällt.

Setzen wir $y^2 = r^2 - x^2$

so erhalten wir durch eine weitere Umformung der vorstehenden Gleichung eine zweite Gleichung, durch welche der Kreis charakterisiert ist. Denn es ist

$$r^2 - x^2 = (r + x) \cdot (r - x)^{*}).$$

*) Die Summe zweier Zahlen in ihre Differenz multipliziert führt auf die Differenz ihrer Quadrate; also $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Die Differenz zweier

Nun ist $r + x = MN$ und $r - x = LN$, somit ist

$$y^2 = MN \cdot LN.$$

Vergleichen wir Fig. 68 mit Fig. 34 auf S. 22, so gewahren wir, dafs y die mittlere Proportionale, zwischen den Abschnitten MN und LN des Durchmessers LM vorstellt. Diese mittlere Proportionale führte uns auf den Pythagoräischen Lehrsatz, welcher somit vorzugsweise die Gleichung des Kreises bezeichnet.

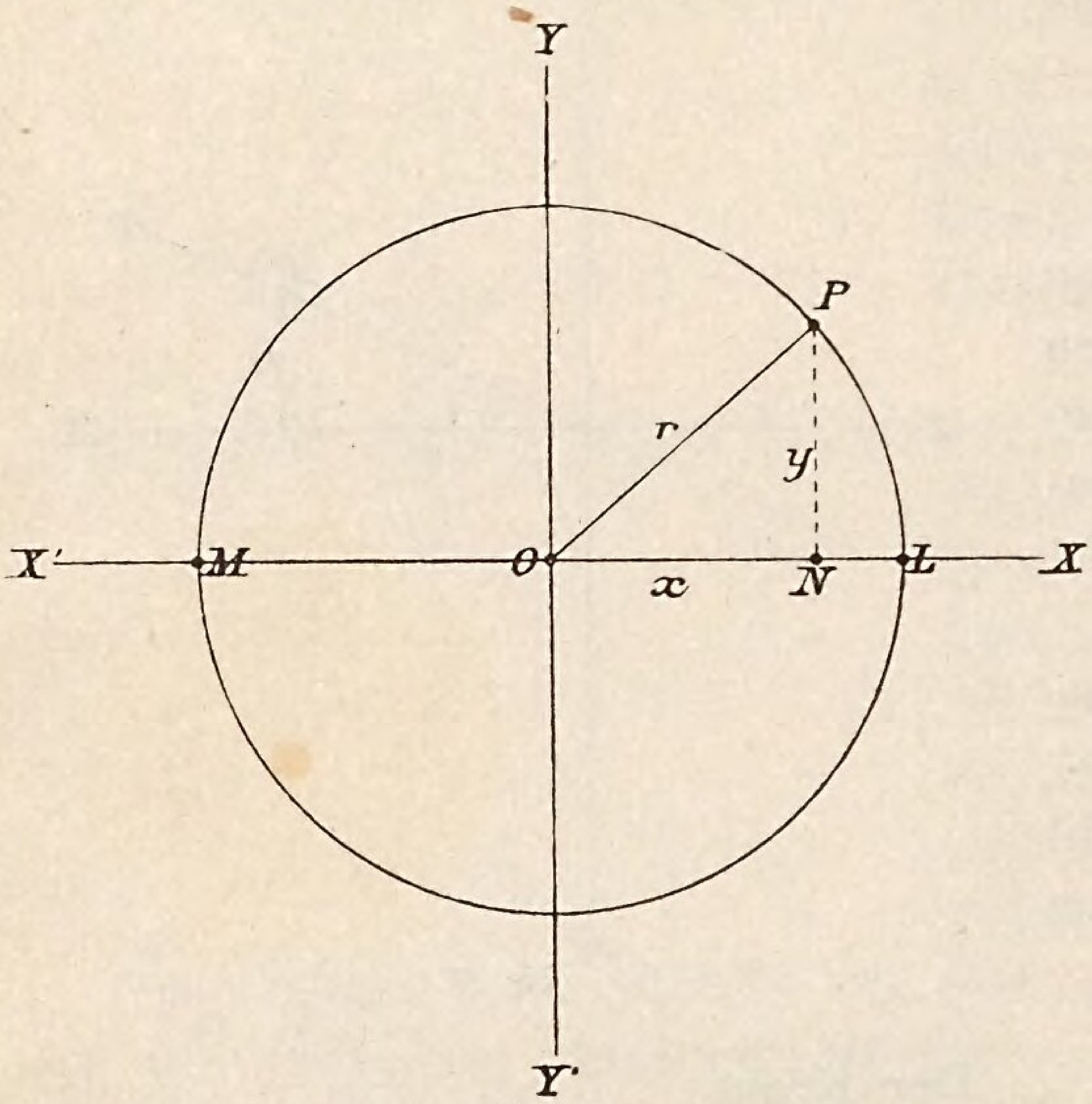


Fig. 68.

Nach Figur 34 verhält sich

$$a : p = p : b$$

und dann ist

$$p^2 = a \cdot b,$$

welche Gleichung mit der vorstehenden aufs Haar übereinstimmt und die aufgestellte Behauptung zur Evidenz beweist.

Der Kreisbogen.

Ingleichen wie die Linie ist der Bogen aus einer Reihe von Punkten zusammengesetzt zu denken. Suchen wir dieselben auf, so haben wir durch sie den verlangten Kreisbogen. Flache Bögen sind Teile eines Kreises, dessen Radius weder mit einem gewöhnlichen Zirkel, noch mit einem Stangenzirkel konstruiert werden können. Hier heifst es, die Bogenelemente ausfindig zu machen und aus ihnen den Kreisbogen zu erstellen. Wie dies zu bewerkstelligen ist, soll das Folgende lehren.

Zunächst ziehen wir die Koordinatenachsen, deren Schnittpunkt O der Anfangspunkt des zu konstruierenden Bogens OB (Fig. 69) ist. Die Entfernung Oz sei der Radius R, PP' Punkte des Bogens OB. Dieselben verbinden wir mit z, wodurch wir die Zentriwinkel λ und

Quadrate ist gleich dem Produkte aus der Summe der beiden Grundfaktoren in ihre Differenz

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$\lambda + \lambda'$ gewinnen. Fällt man von P' und P Senkrechte auf YY', so erhält man hierdurch die Sinuse der Zentriwinkel und zwar

$$Pn = R \sin \lambda \text{ und}$$
$$P'm = R \sin(\lambda + \lambda').$$

Überträgt man die Sinuse auf die Achse der x, so bekommt man in den Strecken $Os = Pn$ und $Ot = Pm$ die Abszissen x und x'. Vorstehende Gleichungen erhalten hierdurch ein anderes Gesicht, wir können nämlich auch sagen

$$x = R \sin \lambda$$
$$x' = R \sin(\lambda + \lambda').$$

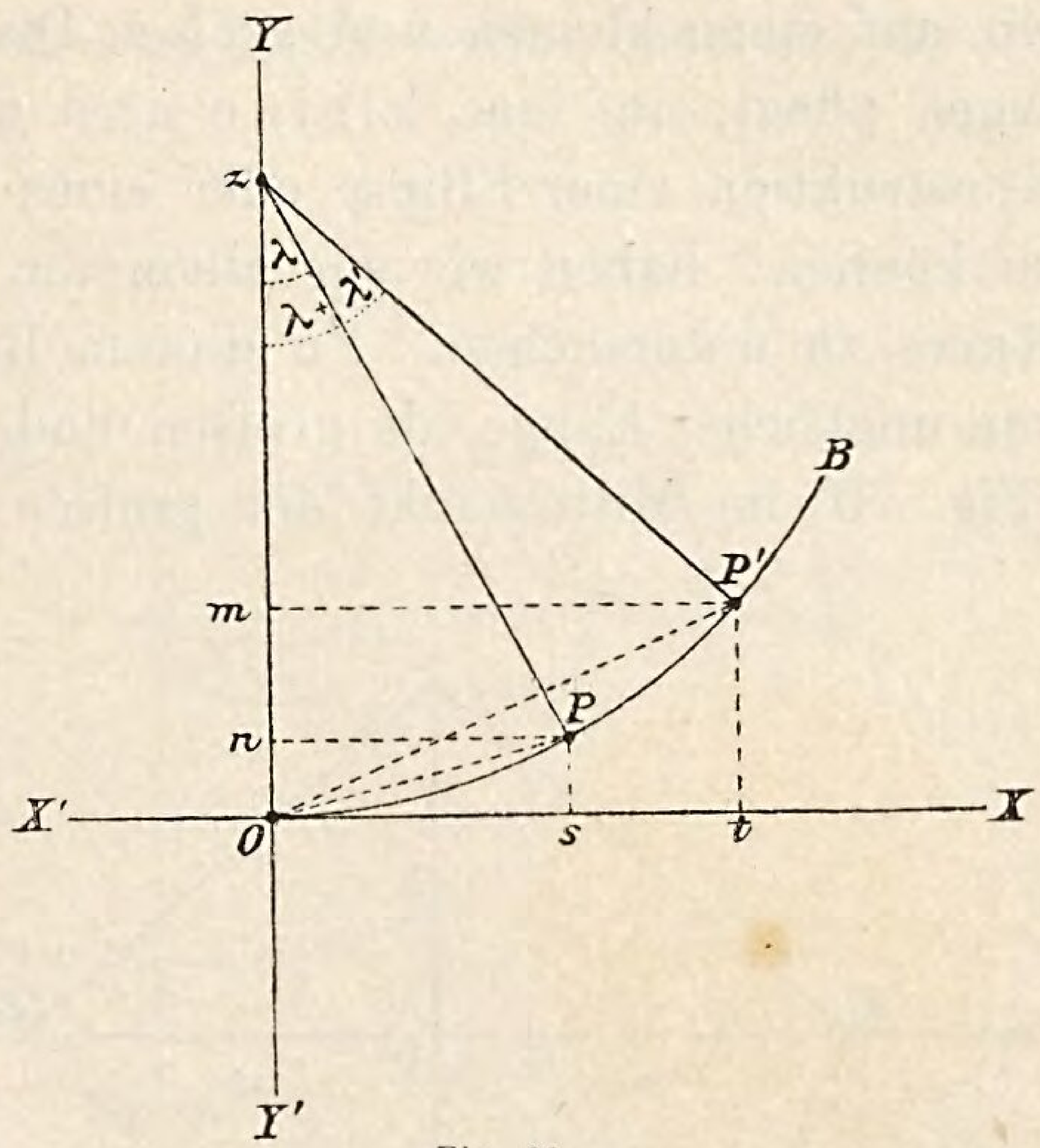


Fig. 69.

Noch fehlen die Ordinaten, ohne welche die Peripheriepunkte unbestimmbar sind und die Bogenkonstruktion unmöglich wäre. Um nun zu den zugehörigen Ordinaten y und y' zu gelangen, bringen wir P und P' mit O in Verbindung. Hierdurch erhalten wir zunächst die Winkel POs und $P'Ot$. Da innerhalb derselben die Bogenlinie zu laufen hat, so sind die erhaltenen Winkel Tangentialwinkel. Durch diesen Umstand sind wir auch mit ihrer Gröfse im Reinen. So mufs nach S. 19 $\sphericalangle POs = {}^1\!/_2\,\lambda$ und $\sphericalangle P'Ot = {}^1\!/_2\,(\lambda + \lambda')$ sein.

Alsdann ist

$$y = x \tan {}^1\!/_2\,\lambda$$
$$y' = x' \tan {}^1\!/_2\,(\lambda + \lambda').$$

Für die Rechnung selbst ist es vorteilhafter für x und x' die Sinuse zu belassen, so dafs wir in diesem Falle setzen

$$y = R \sin \lambda \cdot \tan {}^1\!/_2\,\lambda$$
$$y' = R \sin(\lambda + \lambda') \cdot \tan {}^1\!/_2\,(\lambda + \lambda').$$

Die Ellipse.

Kreis und Ellipse, das sind die zwei kurvischen Linien, die in der mathematischen Geographie eine hervorragende Rolle zu spielen berufen sind. Der Kreis ist uns schon mehrfach begegnet, erst jetzt können wir auch die Ellipse zum Gegenstand unserer Betrachtung machen.

Beim Kreis sind die Durchmesser einander gleich, alle Punkte der Peripherie beziehen sich auf einen Punkt, den Mittelpunkt oder das Zentrum. Nicht also steht es um die Ellipse, bei ihr stofsen wir auf einen kleinen und grofsen Diameter oder, wie man hier zu sagen pflegt, auf eine kleine und grofse Achse. Um nun die Konstruktion einer Ellipse oder eines gedrückten Kreises bethätigen zu können, haben wir vor allem die Eigenschaft einer elliptischen Kurve zu untersuchen. Zu diesem Behufe stellen wir zwei Gerade von ungleicher Länge als grofsen und kleinen Diameter $2a$ und $2b$ (Fig. 70) im Mittelpunkt der grofsen Achse senkrecht zu einander. Ihre Endpunkte mn und op müssen Peripheriepunkte sein. Nehmen wir $mz = nz = a$ in den Zirkel und tragen wir diese Strecke von o oder p auf mz und zn ab, so erhalten zwei neue Punkte F_1 und F_2, von denen wir wissen, dafs sie von o ebensoweit entfernt sind als m oder n von z.

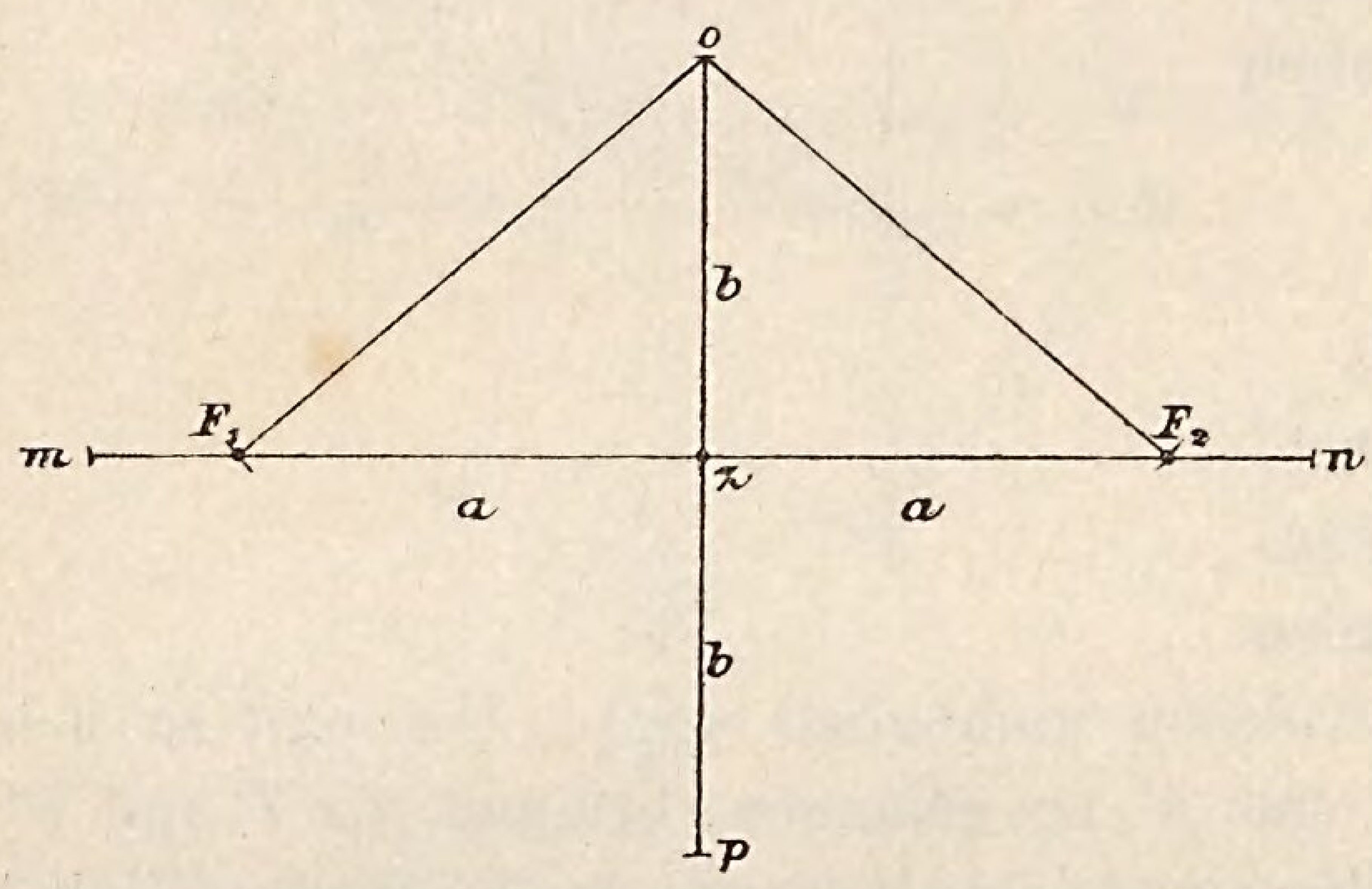


Fig. 70.

Damit haben wir zwei feste Punkte gefunden, von denen aus man zu einem Peripheriepunkt gelangen kann. Sie führen den Namen Brennpunkte. Die Linie $F_1 o$ oder $F_2 o$, welche auf einen Ellipsenpunkt führt oder leitet, heifst Leitstrahl oder Zuglinie oder Radius vector. Nun ist aber $F_1 o + F_2 o = mz + nz = 2a$, d. i. gleich der grofsen Achse. Infolgedessen wissen wir die Lage eines und damit aller Ellipsenpunkte aufzufinden und die Eigenschaft der elliptischen Kurve dahin zu präzisieren:

Die Ellipse ist eine ebene Kurve, bei welcher die Abstände von den beiden Brennpunkten für einen Peripheriepunkt gleich der grofsen Achse sind.

Je näher die Brennpunkte sich liegen, um so mehr gleicht die Ellipse dem Kreise, fallen sie in einem Punkt zusammen, so schwindet der Unterschied zwischen grofser und kleiner Achse, aus der Ellipse wird ein Kreis.

Die Gleichung der Ellipse.

Um eine Gleichung für die Ellipse herzustellen, ziehen wir die Koordinatenachsen XX' und YY'; ihr Schnittpunkt ist O (Fig. 71). Die halbe grofse Achse sei a, die halbe kleine Achse b, die

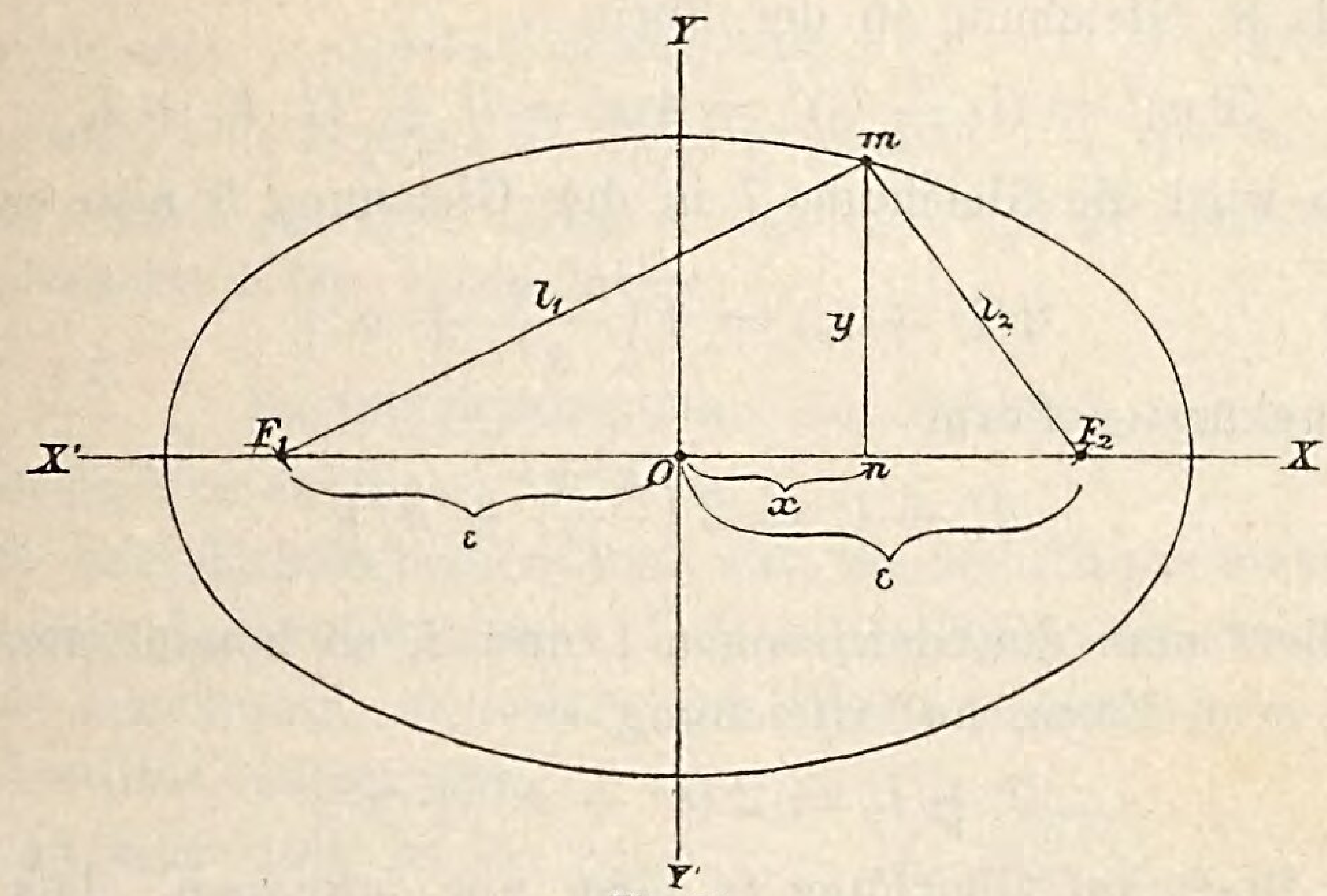


Fig. 71.

Brennpunkte seien F_1 und F_2. Ist m ein Ellipsenpunkt, alsdann mufs $F_1m + F_2m = 2a$ sein. Projizieren wir m auf XX', so erhalten wir die Koordinaten

$$x = On \text{ und } y = mn.$$

Ferner sei der Leitstrahl $F_1 m = l_1$ und der zugehörige andere Radius vector $F_2 m = l_2$. Die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte OF_1 und OF_2, ihre Exzentrizität geheifsen, sei mit ε bezeichnet. Dann ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$l_1^2 = (\varepsilon + x)^2 + y^2 \qquad (1$$

$$l_2^2 = (\varepsilon - x)^2 + y^2. \qquad (2$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, so erhalten wir die Differenz

$$l_1^2 - l_2^2 = (\varepsilon + x)^2 - (\varepsilon - x)^2. \qquad (3$$

Da sich $l_1^2 - l_2^2$ in die Faktoren $(l_1 + l_2)(l_1 - l_2)$ auflösen läfst und $l_1 + l_2 = 2a$ ist, so vermögen wir der Gleichung 3 auch die Form zu geben

$$2a\,(l_1 - l_2) = (\varepsilon + x)^2 - (\varepsilon - x)^2. \qquad (4$$

Lösen wir die Klammern rechts auf, so haben wir

$$2a\,(l_1 - l_2) = 4\,\varepsilon\,x, \qquad (5$$

woraus hervorgeht

$$l_1 - l_2 = \frac{2\,\varepsilon\,x}{a}\cdot \qquad (6$$

Beide Seiten erheben wir ins Quadrat, so erhalten wir die Gleichung

$$l_1^2 - 2\,l_1\,l_2 + l_2^2 = 4\,\frac{\varepsilon^2\,x^2}{a^2}. \tag{7}$$

Dieser Gleichung 7 fügen wir noch das Quadrat von der grofsen Achse als 8. Gleichung in der Form

$$(2\,a)^2 = (l_1 + l_2)^2 = 4\,a^2 = l_1^2 + 2\,l_1\,l_2 + l_2^2 \tag{8}$$

hinzu, so wird die Gleichung 7 in der Gleichung 9 also erscheinen

$$2\,(l_1^2 + l_2^2) = 4\left(\frac{\varepsilon^2\,x^2}{a^2} + a^2\right) \tag{9}$$

oder in gekürzter Form

$$l_1^2 + l_2^2 = 2\left(\frac{\varepsilon^2\,x^2}{a^2} + a^2\right).$$

Addiert man die Gleichungen 1 und 2, so kommt man wieder auf eine neue Form, auf Gleichung

$$l_1^2 + l_2^2 = 2\,(\varepsilon^2 + x^2 + y^2). \tag{10}$$

Ein Blick auf Gleichung 9 läfst uns erkennen, dafs wir für den Ausdruck $l_1^2 + l_2^2$ zwei Werte gefunden haben, diese können wir einander gegenüberstellen und eine 11. Gleichung hieraus formulieren, nämlich

$$2\,(\varepsilon^2 + x^2 + y^2) = 2\left(\frac{\varepsilon^2\,x^2}{a^2} + a^2\right) \tag{11}$$

oder gekürzt $$\varepsilon^2 + x^2 + y^2 = \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} + a^2.$$

Aber auch diese letzte Form befriedigt noch nicht, wir müssen die halbe kleine Achse b mit heranziehen und versuchen durch sie die Exzentrizität ersetzen zu können. Nun lehrt uns Fig. 70, dafs

$$a^2 = b^2 + \varepsilon^2 \tag{12}$$

und somit $$\varepsilon^2 = a^2 - b^2 \text{ ist.} \tag{13}$$

Setzen wir in Gleichung 11 überall wo ε^2 vorkommt, dafür $a^2 - b^2$ ein, so wird die Gleichung 11 also erscheinen

$$(a^2 - b^2) + x^2 + y^2 = \frac{(a^2 - b^2)\,x^2}{a^2} + a^2. \tag{14}$$

Schaffen wir den Nenner a^2 weg, indem wir alle Glieder der Gleichung hiermit multiplizieren, so haben wir

$$a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^2x^2 - b^2x^2 + a^4. \tag{15}$$

Dies ist endlich die Gleichung der Ellipse, die nur noch einer Reduktion bedarf. Führen wir dieselbe aus, so haben wir als

Endresultat $$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \qquad (16$$
oder durch Division mit $a^2 b^2$
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Zusatz:

Setzen wir $y = o$, so wird die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} = 1$; $x^2 = a^2$; $x = \pm a$ und setzen wir $x = o$, so haben wir $\frac{y^2}{b^2} = 1$; $y^2 = b^2$; $y = \pm b$. In dem einen Fall ist die Abszisse gleich der halben grofsen Achse und im andern Fall ist die Ordinate gleich der halben kleinen Achse.

Konstruktionsarten der Ellipse.

Erstes Verfahren:

Statt eines Zirkels bedient man sich bei der Ellipse einer Schnur von der Länge der grofsen Achse. In den Brennpunkten (Fig. 72) seien zwei Stifte angebracht, an welche die Schnur befestigt wird. Mittels eines Fahrstiftes spannt man dieselbe an und stellt so in den Knickungen $l_1 + l_2 = 2a$ die grofse Achse vor. In der Knickung selbst befindet sich ein Peripheriepunkt der Ellipse. Bewegt man innerhalb der Schnur über- und unterhalb der grofsen Achse den Stift fort, so beschreibt er die gewollte Ellipsenperipherie.

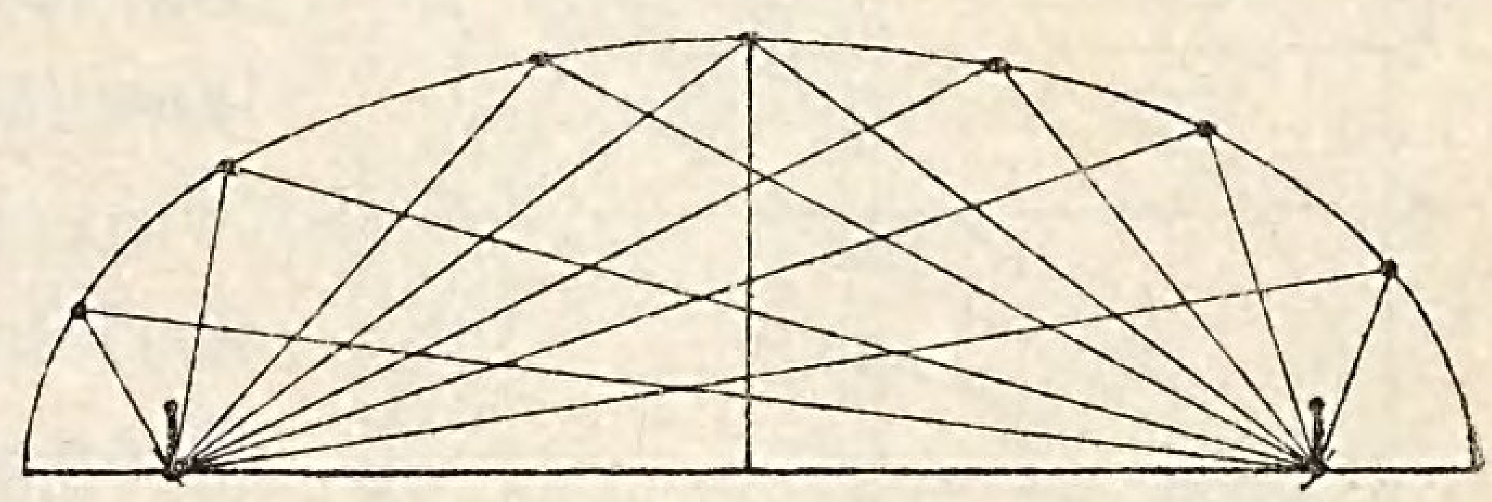


Fig. 72.

Zweites Verfahren:

Die Ellipsenpunkte findet man von den Brennpunkten aus mittels eines Zirkels durch Kreuzbögen. Der grofsen Achse $2a$ entsprechend, zieht man (Fig. 73) die konstante Gröfse $l_1 l_2$. Der Abschnitt $ml_1 = \lambda_1$ und der $m l_2 = \lambda_2$. Zuerst nimmt man λ_1 in den Zirkel und schlägt von F_1 die Bögen ik und op, dann λ_2 und zieht von F_2 die Bögen qr und st. Die Punkte u und w müssen Peripheriepunkte sein, denn ihre Abstände von den Brennpunkten F_1 und F_2 sind der grofsen Achse gleich. Mit der Teilung der konstanten Gröfse $l_1 l_2$ und der Übertragung dieser

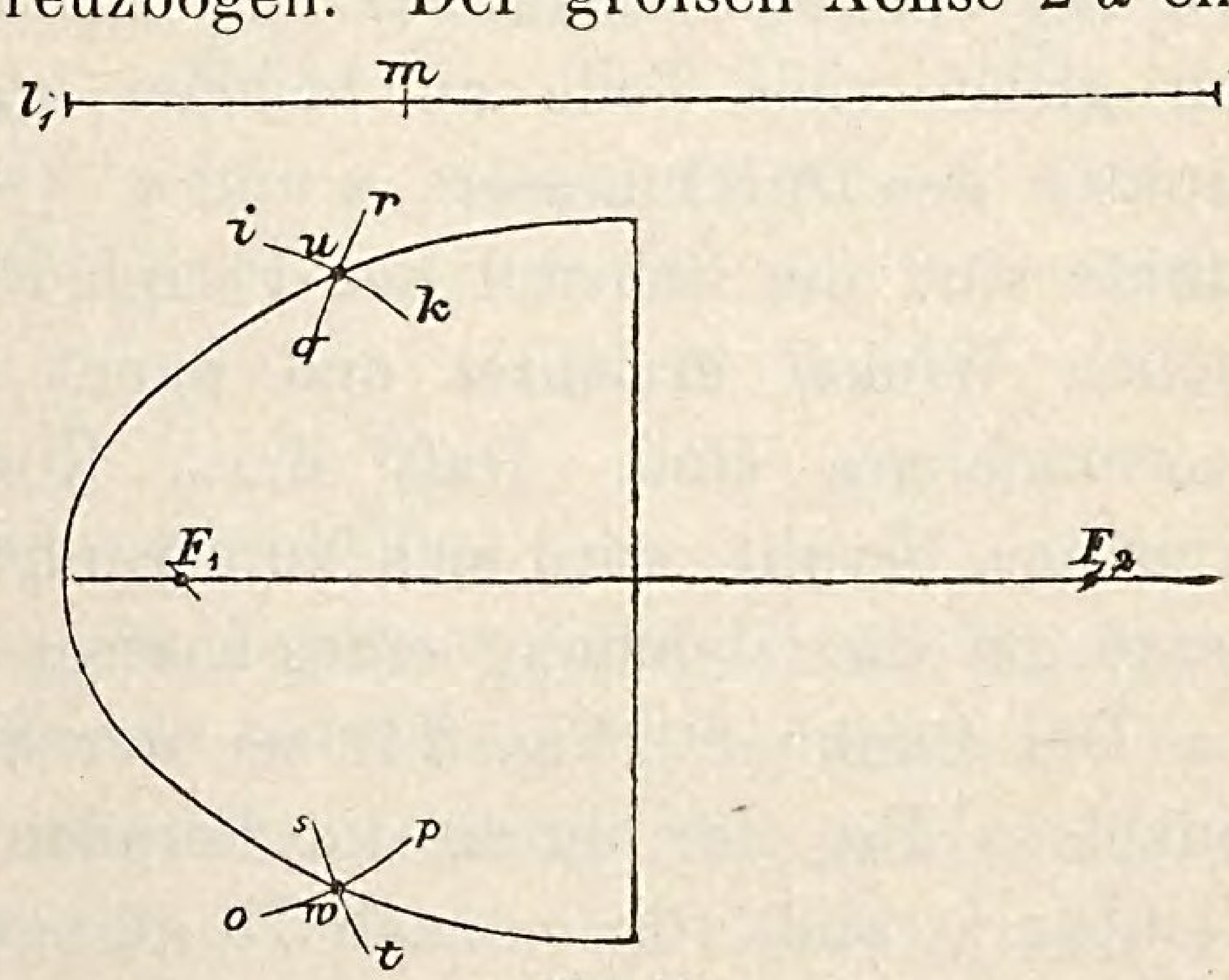


Fig. 73.

Teilstrecken von den Brennpunkten gegen die Peripherie hin fährt man so lange fort, bis man eine hinreichende Zahl von Ellipsenpunkten gefunden hat. Werden diese aus freier Hand oder durch ein Kurvenlineal in Verbindung gebracht, so hat man die Ellipse selbst.

Drittes Verfahren:

Da sowohl das Eindrücken der Stifte und das oftmalige Einsetzen des Zirkels in die Brennpunkte das Papier beschädigt, so hat man sich bemüht, Methoden ausfindig zu machen, wodurch die Konstruktion einer Ellipse ohne die genannten Hilfsmittel bewerkstelligt werden kann. Wie erhält man auch ohne die Brennpunkte die Peripheriepunkte? das ist die Frage, auf deren Lösung jedes weitere Verfahren zu basieren hat. Für den Gang unserer Untersuchung wählen wir die Kreisperipherie. Stellen wir (Fig. 74) die Radien ao und bo senkrecht zu einander und beschreiben den Halbkreis aba'. Schliefsen wir den Quadranten oba in ein Viereck ein, so erscheint dasselbe als Quadrat. Der Winkel aba' ist als Peripheriewinkel, der über einem flachen Winkel errichtet ist, ein rechter. Auf ihn kommt man, sobald man b mit a und a', d. i. den Endpunkten des horizontalen Diameters, verbindet. Rückt man von b nach 3 und um das gleich grofse Stück von b nach III, und zieht man die Geraden $a'3$ und aIII, so ist der Scheitelpunkt des Peripheriewinkels um dieses Stück nach rechts geschoben und hiermit ein Peripheriepunkt gefunden worden. Hierauf gründet sich das einfache Verfahren, die Linie bo und bp in gleich grofse und gleich viele Teile zu bringen und durch sie von den Endpunkten des Durchmessers a und a' Gerade zu führen. Die Schnittpunkte sind die Scheitel der Peripheriewinkel, welche über einem flachen Winkel errichtet und damit Punkte des zu erstellenden Kreisumfanges sind. Dafs diese Konstruktionsart auf richtigen Prinzipien beruht, wird sich zu erkennen geben, wenn wir ihre Elemente auf die Gleichung eines Kreises zurückzuführen vermögen.

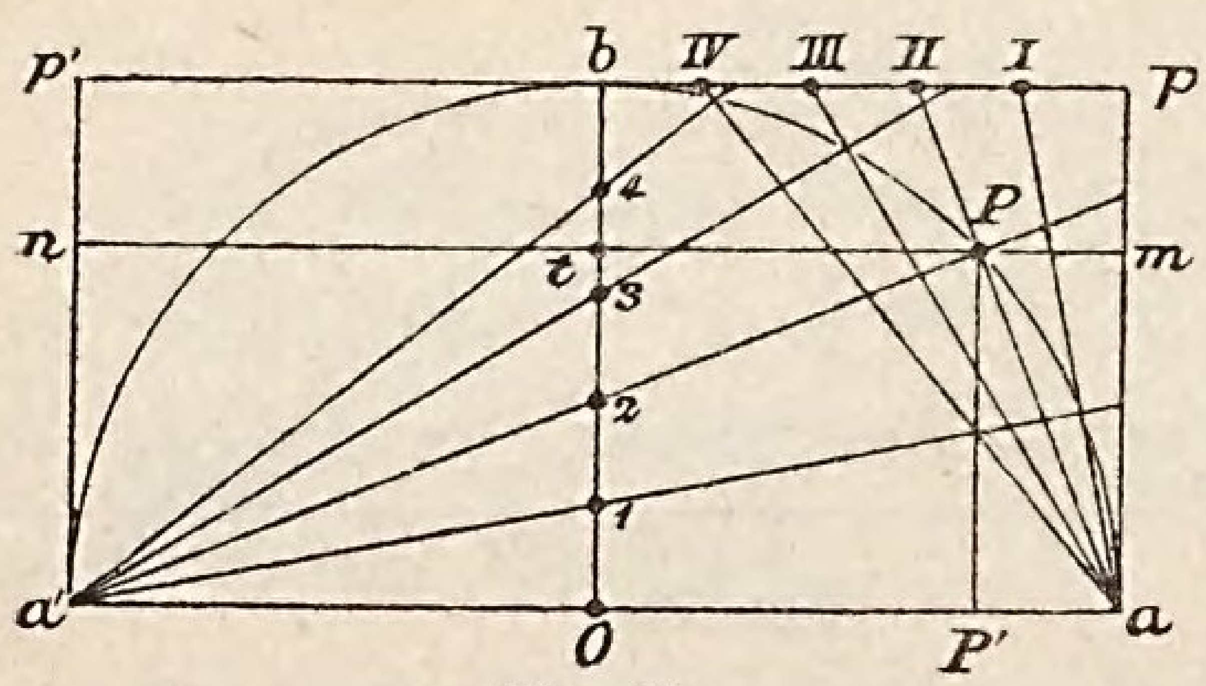


Fig. 74.

Der Punkt P (Fig. 74) sei der Scheitelpunkt des Peripheriewinkels $a'Pa$, der durch die Geraden erzeugt wurde, welche von a' über 2 und von a nach II gezogen sind. Errichten wir auf ao die Senkrechte PP', so ist $P'o = x$ die Abszisse und $PP' = y$ die Ordinate des Scheitelpunktes P. Legen wir ferner durch denselben zum Diameter die Parallele mn, so erhalten wir $Pt = x$,

$ot = y$ und schaffen hierdurch je zwei einander ähnliche Dreiecke, nämlich $\triangle Pna' \sim \triangle a'o2$ und $\triangle Pma \sim IIpa$.

Aus diesen ziehen wir die Doppelverhältnisse

$$\begin{aligned} Pn : a'n &= a'o : o2 \\ Pm : am &= pII : ap. \end{aligned} \tag{1}$$

Vereinigen wir dieselben zu einer Proportion, so erhalten wir

$$Pn \cdot Pm : a'n \cdot am = a'o \cdot pII : o2 \cdot ap, \tag{2}$$

d. i. in Bruchform $$\frac{a'n \cdot am}{Pn \cdot Pm} = \frac{o2 \cdot ap}{a'o \cdot pII}. \tag{3}$$

Um diese Gleichung verständlicher zu machen, setzen wir bekannte Werte, soweit dieselben anzuwenden sind, ein. Nun ist, wie die Fig. 74 klar erkennen läfst, $a'o$ und $ob = ap$ gleich dem Radius R; $Pt = P'o = x$; $a'n = am = y$ und endlich $Pn = R + x$, $Pm = R - x$. Fügen wir diese Werte an den passenden Stellen ein, so wird die Gleichung 3 ihr fremdes Aussehen verlieren, sie bekommt bekannte, leicht zu deutende Züge. Schreiben wir

$$\frac{y \cdot y}{(R + x)(R - x)} = \frac{R \cdot o2}{R \cdot pII} = \frac{o2}{pII}. \tag{4}$$

Nun zeigt uns die Figur, dafs $o2 : ob$ sich ebenso verhält, wie $pII : bp$. Demnach führt die Proportion $pII : R = o2 : R$ oder $pII : o2 = R : R$ auf die Gleichung

$$\frac{o2}{pII} = \frac{R}{R}. \tag{5}$$

Substituieren wir, indem wir dabei die Gleichung 4 in reduzierter Form ausdrücken, den für $\frac{o2}{pII}$ erweiterten Bruch $\frac{R}{R} = 1$, so haben wir in fünfter Form

$$\frac{y^2}{R^2 - x^2} = 1. \tag{6}$$

Daraus wird $$\begin{aligned} y^2 &= R^2 - x^2 \\ \text{oder} \quad R^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned} \tag{7}$$

welch letzte Form die Gleichung des Kreises ist und hiermit die Richtigkeit des angewendeten Verfahrens seine Bestätigung gefunden hat.

Nun ist die Bahn für eine möglichst einfache Ellipsenkonstrution geebnet. Die Quadrate der Ellipsenquadranten dehnen sich zu Rechtecken aus, die Radien verlieren ihre Gleichheit, aus ihnen entstehen die kleine und grofse Halbachse. Die Teile auf ihnen sind gleich viel; aber nur gleich grofs auf je einer der Halbachsen. Ein

Teil der kleinen Halbachse steht in einem unveränderlichen Verhältnis zu einem Teil der grofsen Halbachse. Verbinden wir a mit b und b mit a' (Fig. 75), so gewinnen wir dadurch den Peripheriewinkel $a b a'$ mit dem Scheitelpunkt b. Teilen wir bp und bo in 4 gleiche Teile und ziehen $a2$ und $a'II$, so wird der Scheitelpunkt von b nach m verschoben und dies geschieht im richtigen Verhältnis. Somit ist m der Scheitelpunkt eines Peripheriewinkels von einer Ellipse. Fährt man in analoger Weise fort, so ist, weil genügende Peripheriepunkte geschaffen sind, die Möglichkeit geboten, aus freier Hand oder mit Hilfe eines Kurvenlineals die Ellipse aus Ellipsenquadranten zu konstruieren. Selbstverständlich wird die Ellipsenkurve um so genauer, je weniger man die Mühe scheut, viele Ellipsenpunkte zu suchen. Die Richtigkeit des Verfahrens nachzuweisen, wird nicht schwer halten.

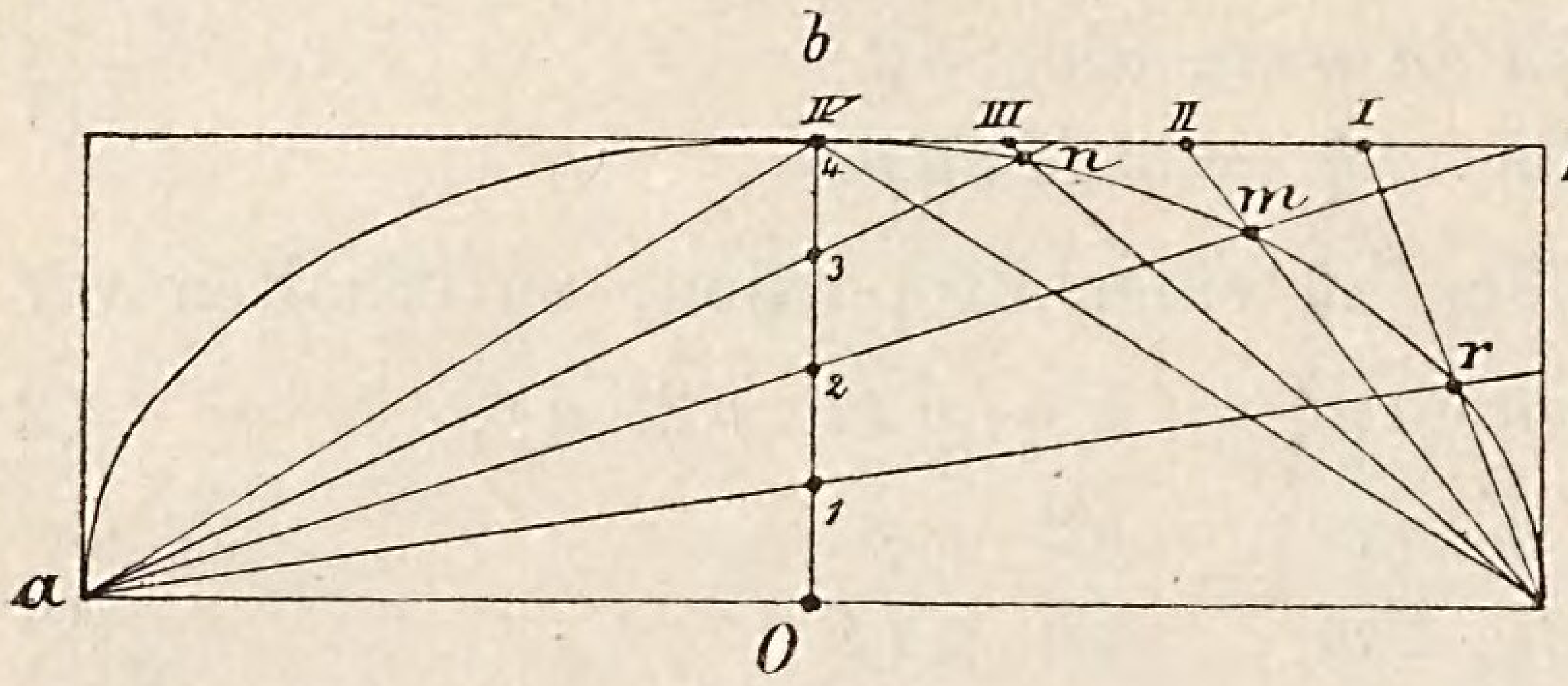


Fig 75.

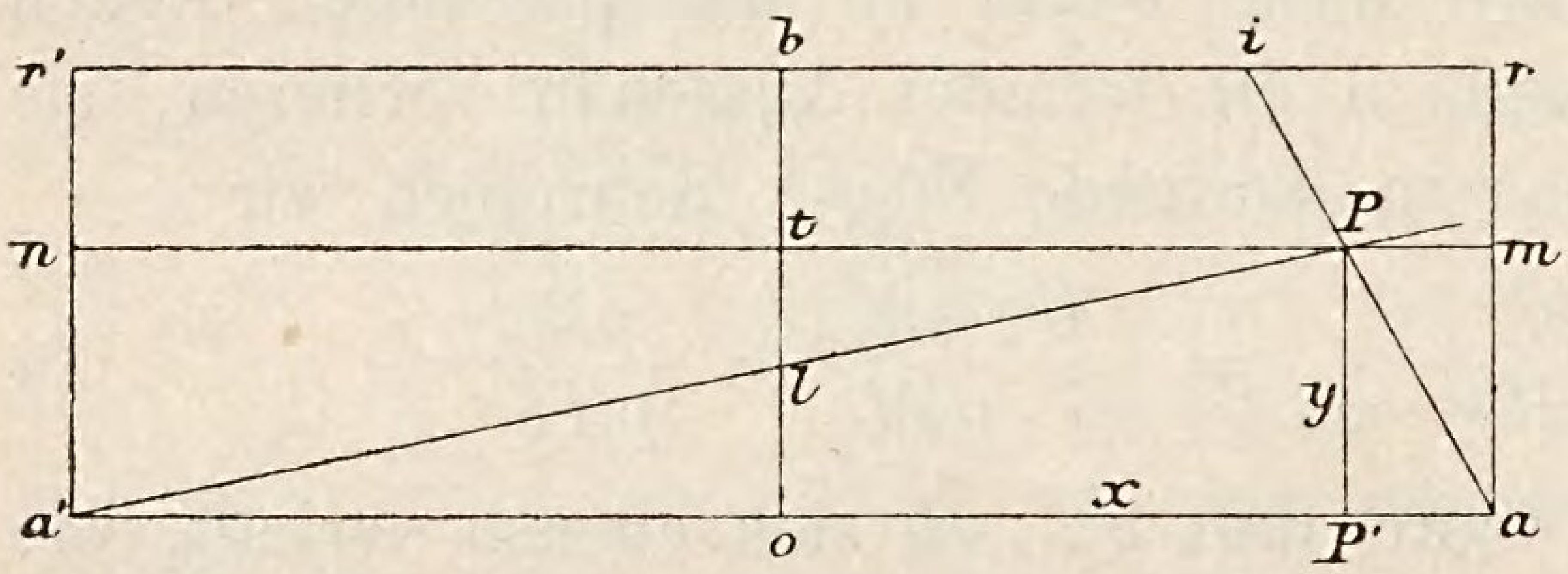


Fig. 76.

Es ist nach Fig. 76

$$
\begin{aligned}
a'o &= oa = a \text{ die halbe grofse Achse,}\\
bo &= ar = b \text{ die halbe kleine Achse,}\\
PP' &= am = ot = a'n = y \text{ die Ordinate,}\\
P'o &= Pt = x \text{ die Abszisse,}\\
Pn &= a + x;\quad Pm = a - x.
\end{aligned}
$$

Die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Pna' und $a'ol$ einesteils und der Dreiecke Pma und ira andernteils aufzufindenden Verhältnisse sind

$$
\left.\begin{aligned}
a + x : y &= a : lo\\
a - x : y &= ir : b.
\end{aligned}\right\} \quad (1
$$

Dieselben lassen sich zusammenfassen in die Gleichung

$$
\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b \cdot lo}{a \cdot ir} \qquad (2
$$

Nun steht ir zu a in demselben Verhältnis, als ol zu b. Also

$$ir : a = ol : b \text{ oder } ir : ol = a : b,$$

welche Proportion zur Gleichung führt

$$\frac{ol}{ir} = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Setzen wir in Gleichung 2 den für $\frac{ol}{ir}$ erweiterten Quotienten $\frac{b}{a}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b \cdot b}{a \cdot a} = \frac{b^2}{a^2} \tag{4}$$

und daraus wird

$$a^2 b^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2. \tag{5}$$

Die Ellipsengleichung ist gefunden, jeder Scheitelpunkt eines Peripheriewinkels ist ein Ellipsenpunkt und die Konstruktion der Ellipse ohne Brennpunkte ist richtig basiert.

Viertes Verfahren:

Dasselbe stützt sich auf zwei konzentrische Kreise. Der äufsere Kreis ist mit dem Radius a, der der halben grofsen Achse und der innere Kreis mit dem Halbmesser b, der der halben kleinen Achse entspricht, beschrieben. Ist nun $b = a$, so geht die Ellipsengleichung in die eines Kreises

$$Y^2 + x^2 = a^2 \text{ über.}$$

Der Wert einer Kreisordinate ist

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und der Wert einer Ellipsenordinate nach Gleichung 5 oben

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Stellen wir beide in ein Verhältnis, so bekommen wir die Proportion

$$y : Y = \frac{b}{a} : 1 \text{ oder auch } y : Y = b : a,$$

welche in Worten heifst:

Die Ordinate der Ellipse verhält sich zur Ordinate des Kreises wie die halbe kleine Achse zur halben grofsen Achse.

Vermittels dieser Wahrnehmung vermag man aus zwei konzentrischen Kreisen, deren Radien im Verhältnis $b : a$ stehen, eine

Ellipse zu konstruieren, indem man darauf ausgeht, dieses Verhältnis auf die Ordinaten beider Kreise zu übertragen. Wie dies zugeht, wird eine nähere Betrachtung mit Zuhilfenahme der Fig. 77 lehren. Bei ihr bemerken wir die Peripheriepunkte P_1 und P_2, deren Radien auf ein und derselben Linie zu liegen kommen. Projizieren wir dieselben, so haben wir $P_1 m$ und $P_2 n$ als ihre Ordinaten. Übertragen wir den Punkt P_1 mittels einer Senkrechten auf $P_2 n$, so erhalten wir den Fuſspunkt h. Nun gewahren wir, daſs hn zu $P_2 n$ in dem gleichen Verhältnis als wie b zu a steht. Somit ist hn als die Ellipsenordinate aufzufassen, die zur Kreisordinate das bestimmte Verhältnis $y : Y$ einhält und damit ist h ein Ellipsenpunkt.

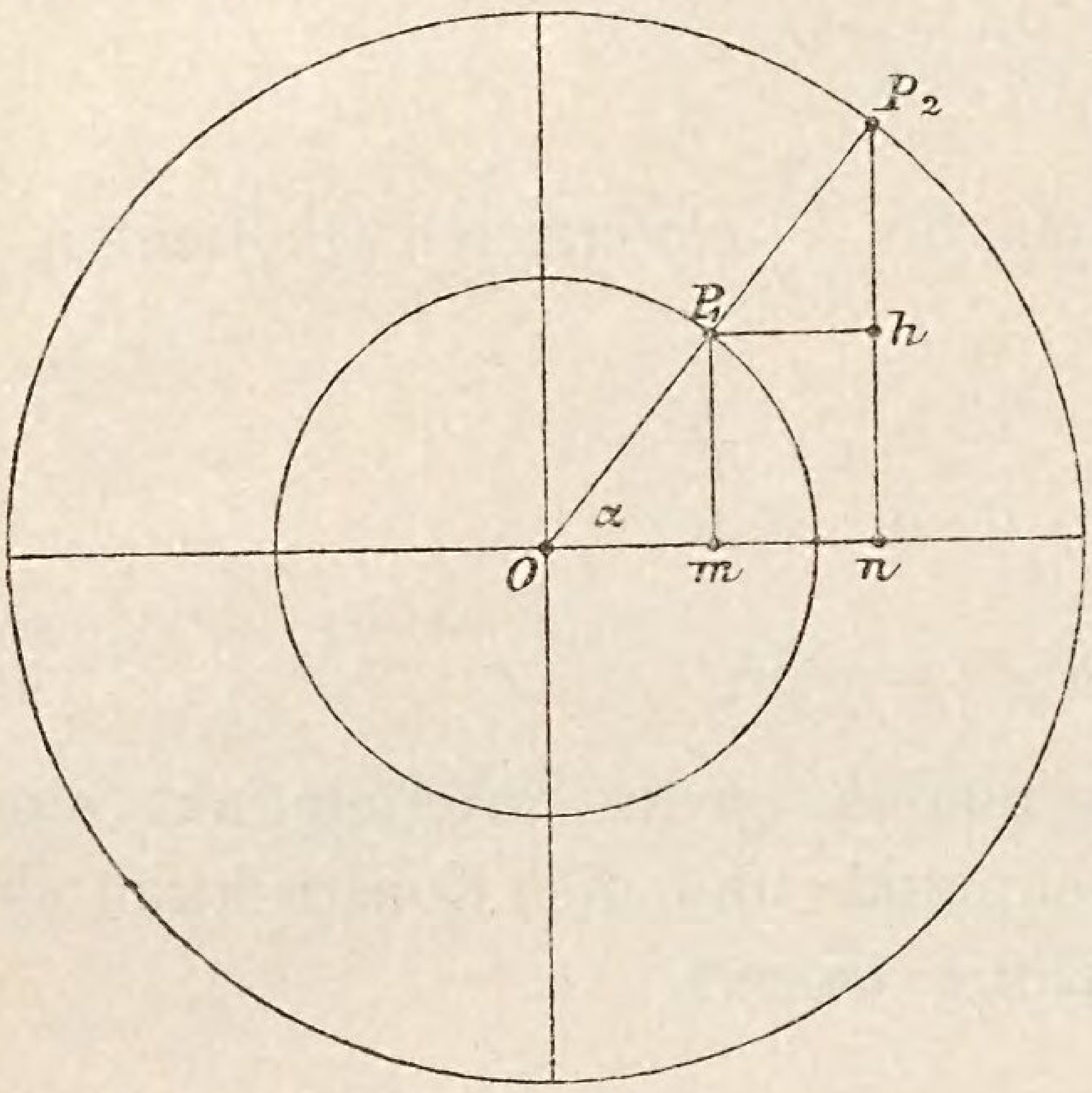


Fig. 77.

Für die Konstruktion der Ellipse ergibt sich hieraus ein sehr einfaches Verfahren. Man teilt den Radius a (Fig. 78) in eine Anzahl von Abschnitten ein und errichtet in den Teilpunkten Perpendikel. Dieselben schneiden die Peripherie des äuſseren Kreises, welche Schnittpunkte man mit dem Zentrum in Verbindung bringt. Hiedurch wird der Umfang des inneren Kreises durch die Radien gleichfalls geschnitten.

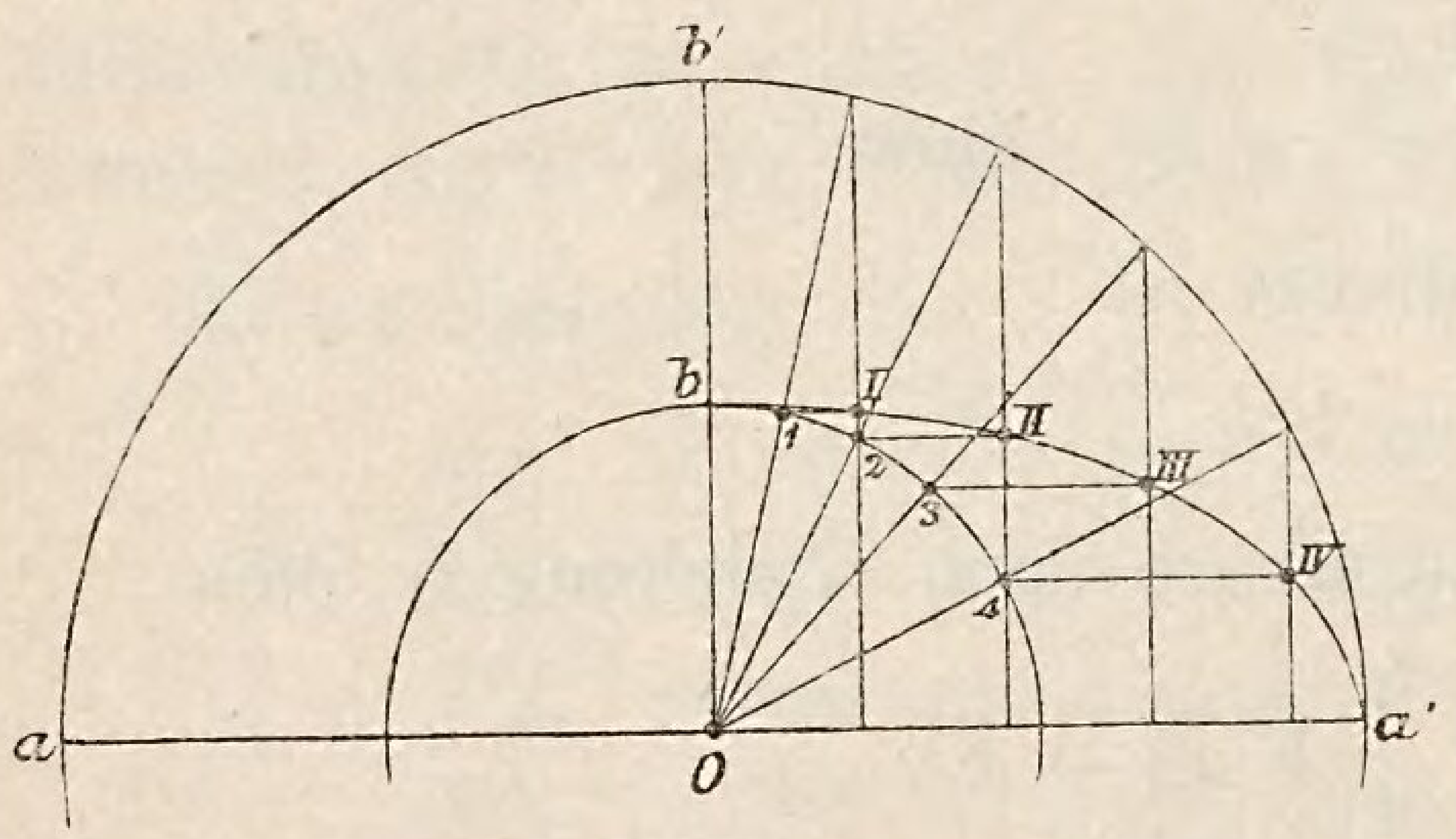


Fig. 78.

Diese Schnittpunkte trägt man auf die bezüglichen Ordinaten des äuſseren Kreises über, wodurch man auf ihnen die gewünschten Ellipsenpunkte erhält.

Die Figur 77 bringt uns zugleich auf den Gedanken, die Ellipsenpunkte durch Berechnung zu finden. Denn da die Strecke $on = x$ die Abszisse und $P_2 n = Y$ die Kreisordinate ist, so ist die Ellipsenordinate

$$y = \frac{b}{a} \cdot Y.$$

Es ist aber nach den trigonometrischen Lehrsätzen

$$x = a \cos \alpha \quad \text{und} \tag{1}$$

$$Y = a \sin \alpha = a \cos (90 - \alpha), \tag{2}$$

woraus sich ergibt

$$y = \frac{b}{a} \cdot a \sin \alpha = b \sin \alpha = b \cos (90 - \alpha).$$

Handelt es sich nur darum, annähernd eine elliptische Kurvenlinie zu erstellen, so kann die sogenannte Ovallinie als Ersatz dienen. Ihre Konstruktion bedarf keiner weiteren Erörterung, die Fig. 79 läfst sie deutlich erkennen. Durch den Ellipsographen*) ist man im Stande die Ellipse in ähnlicher Weise mechanisch zu erstellen, wie den Kreis durch den Zirkel.

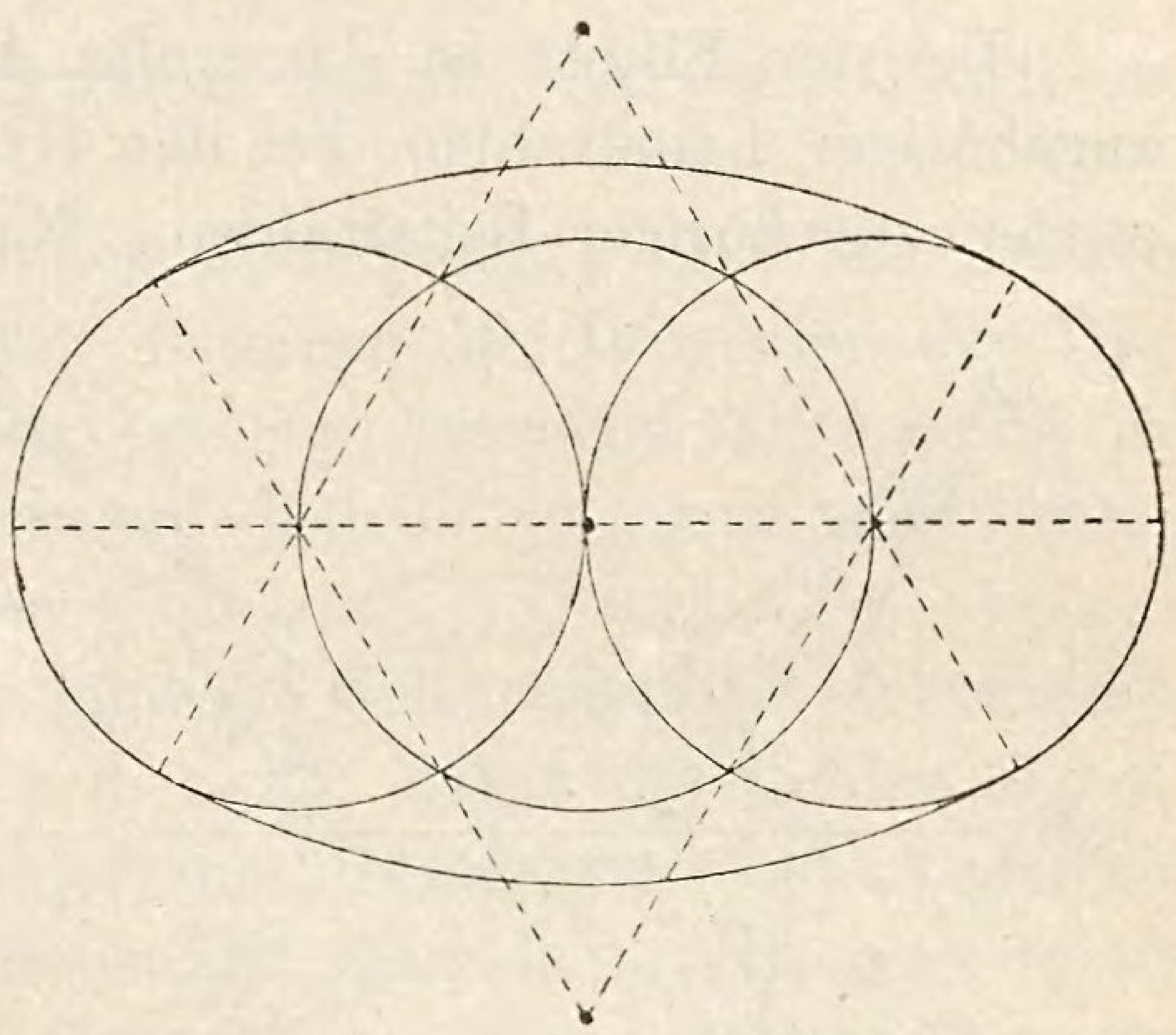


Fig. 79.

Noch sei beigefügt, wie eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Ellipse, z. B. an Punkt II Fig. 78, zu legen ist. Mit dem Radius der halben grofsen Achse beschreibt man einen Kreis und legt durch den Punkt II zur Achse $o\,a'$ eine Senkrechte, welche die Kreisperipherie schneidet. In diesem Schnittpunkt konstruiert man nach S. 21 Fig. 32 eine Kreistangente, welche die verlängerte Achse in irgend einem Punkte trifft. Von diesem Treffpunkt aus zieht man eine Linie an Punkt II und man hat durch sie die begehrte Ellipsentangente.

Flächenberechnung der Ellipse.

Aus dem unabänderlichen Verhältnis, das zwischen den Kreis- und Ellipsenordinaten für jede Abszisse besteht, mufs offenbar zwischen der Kreis- und Ellipsenfläche ein diesen Ordinaten entsprechendes Verhältnis stattfinden. Bezeichnen wir jene mit K, diese mit E, so ist

$$E : K = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} : \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{1}$$

*) Derselbe ist zu beziehen bei Ott und Coradi in Kempten. Preis 26 Mark

oder auch, wenn für $K = a^2 \pi$ gesetzt wird

$$E : a^2 \pi = \frac{b}{a} : 1. \qquad (2$$

Alsdann ist
$$E = \frac{a^2 \pi \cdot b}{a} = a b \pi, \qquad (3$$

welches Resultat in Worten lautet:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, wenn man das Produkt der halben grofsen und halben kleinen Achse mit der Ludolphine multipliziert.

Hyperbel und Parabel.

Bei der Ellipse ist die grofse Achse gleich der Summe zweier zugehöriger Leitstrahlen, bei der Hyperbel bildet sie die Differenz zweier zugehöriger Leitstrahlen. Nach Fig. 80 sei $a a = 2 a$ auf $X X'$ die grofse Achse und die in ihrem Endpunkt errichtete Senkrechte $n r$ die halbe kleine Achse b. Inmitten der grofsen Achse ist der Mittelpunkt z, den man mit r in Verbindung bringt. Mit dem Radius $z r$ beschreibt man den Halbkreis $F' r' r F$, wodurch man die Brennpunkte $F F'$ erhält. Da

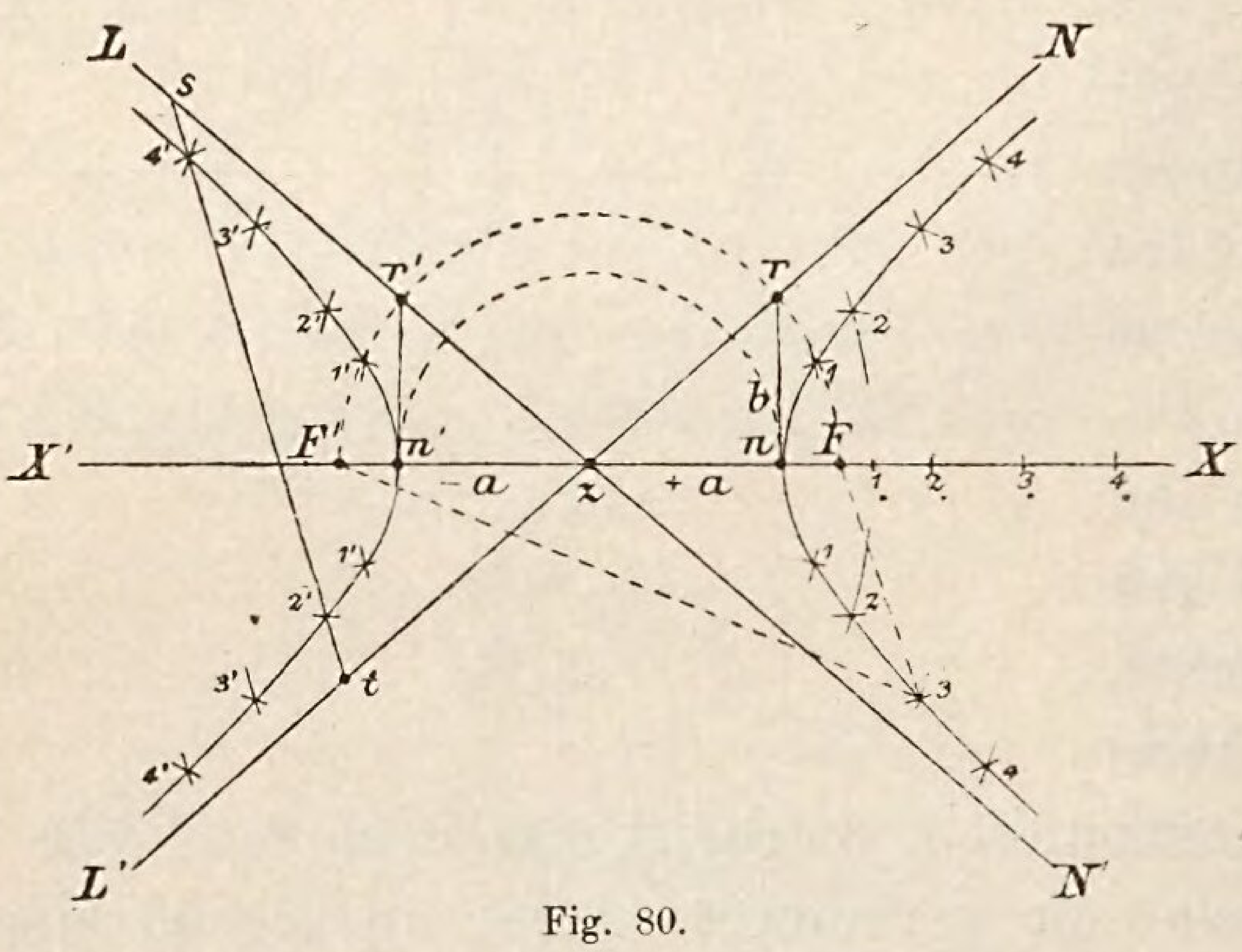


Fig. 80.

nun $Fz = F'z = rz$ ist und diese Strecke die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkt ausdrückt und lineare Exentrizität geheifsen wird, so gibt der Pythagoräer

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Auf der Hauptachse $X X'$ gibt man in gleichen oder beliebigen Abständen die Punkte $1_\times$, $2_\times$, $3_\times$, $4_\times$ u. s. f. an. Die Endpunkte n, n' der ersten oder grofsen Achse bilden den Anfang der hyperbolischen Kurve oder ihren Scheitel. Vom Scheitelpunkt n' mifst man nach $1_\times$ und beschreibt mit dieser Zirkelweite von den beiden Brennpunkten aus die Bogen 1, 1′ rechts und links, oben und unten. Alsdann nimmt man die Strecke $n 1_\times$ in den Zirkel und kreuzt von den Brennpunkten aus die ersten Bogen. In dieser Weise fährt man

fort und erhält hiedurch rechts die Kreuzbogen 1, 2, 3, 4 oben und unten und links oben und unten die Kreuzbogen 1′, 2′, 3′, 4′. Führt man durch sie eine Linie, so gewahrt man, daſs die Hyperbel eine Kurve aus zwei Ästen, Zweigen oder Armen ist, die es nie zu einer Vereinigung bringen. Noch ist der Nachweis, daſs $2a$ die Differenz zweier zugehöriger Leitstrahlen ist, nicht geliefert. Bekannt ist, daſs Fz als Radius gleich sein muſs dem Radius $F'z$. Nimmt man a in den Zirkel, so schneidet dieser mit a beschriebene Kreis die Strecken Fn und $F'n'$, die wiederum einander gleich sein müssen, ab. Dann ist

$$F'n - Fn = F'n - Fn' = aa = 2a,$$

desgleichen auch $F'3 - F3 = aa = 2a.$

Was bei diesen beiden Leitstrahlen zutrifft, hat für alle anderen die gleiche Geltung.

Zieht man endlich durch den Mittelpunkt z und die Punkte r und r' zwei Gerade, so bilden dieselben die Tangenten der Hyperbel, welche nicht mit deren Zweigen zusammenfallen, erst in unendlicher Ferne sie berühren und deshalb Asymptoten (συμπιπτεῖν zusammenfallen) heiſsen.

Diese Geraden bieten eine günstige Gelegenheit die Kurve ohne Zirkel zu konstruieren. Legt man z. Ex. durch die Punkte 2′, 4′ eine Sekante, so gewahrt man, daſs die Strecken $t2'$ und $s4$ gleiche Längen haben. Diesen Umstand benützt man dazu, daſs man durch einen Punkt, der bekannt ist, eine Sekante legt. Die Entfernung zwischen ihm und der Asymptote miſst man ab und trägt sie auf der entgegengesetzten Seite auf. Der Schnittpunkt der Sekante ist alsdann ein Punkt der hyperbolischen Kurve. Hat man eine hinreichende Anzahl solcher Punkte gewonnen, so ist die Kurve aus freier Hand leicht zu zeichnen.

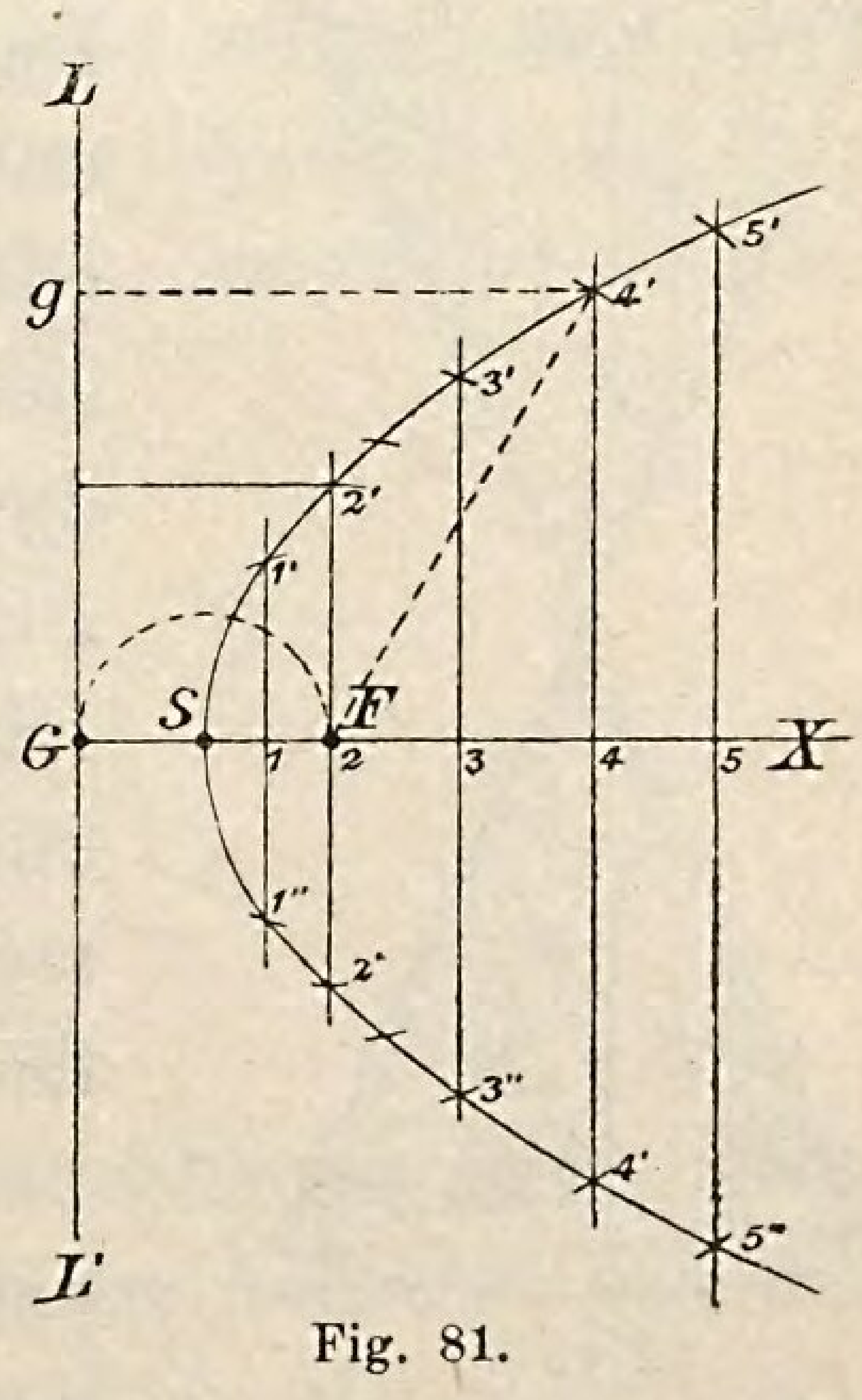


Fig. 81.

Stellen wir die Geraden LL' und GX (Fig. 81) senkrecht zu einander und schneiden wir auf der Achse GX die Strecken $GS = SF$ ab. Errichten wir ferner in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, die gleich oder beliebig von einander entfernt sein können, die parallelen Perpendikel 1′1″, 2′2″ u. s. f., nehmen die Strecken G_1, G_2 u. s. f. in den Zirkel und machen endlich mit diesen Zirkelöffnungen an den parallelen Geraden von F aus Schnitt-

punkte, so erhalten wir durch ihre Verbindung eine neue kurvische Linie, welche den Namen Parabel führt. Während bei der Ellipse die Charakteristik in der Summe, bei der Hyperbel in der Differenz der zugehörigen Leitstrahlen ausgesprochen ist, so bei der Parabel in der Gleichheit oder Egalität eines Peripheriepunktes von zwei feststehenden Punkten. Beschreiben wir mit dem Radius GS einen Bogen, so ist S von G ebenso weit entfernt, als von F. Darum sind G und F zwei feststehende Punkte und S ist der Scheitelpunkt der Parabel. Ingleichen ist Punkt $2'$ von LL', der Leitlinie oder Direktrix, ebenso weit wie von F, dem Brennpunkt, und wiederum Punkt $4'$ von dieser Leitlinie wie vom Brennpunkt gleichweit entfernt. Nun ist $g4' = G4$ als Parallele. Aus dieser Ursache bezeichnet man auf der Achse eine Anzahl von Punkten, nimmt die Strecken von G aus in den Zirkel und trägt vom Brennpunkt F an die durch die Teilpunkte der Achse GX geführten Senkrechten oben und unten auf, wodurch die Schnittpunkte, welche zur Erstellung der Parabel gehören, gefunden werden. Da Parabel und Hyperbel viel seltener als Kreis und Ellipse zur Anwendung kommen, so können wir von einer genauern Betrachtung und der Entwicklung ihrer Gleichungen Umgang nehmen. Sie beide, Hyperbel und Parabel, gehören zu derselben Kategorie von Kurven wie der Kreis und die Ellipse und man begreift sie sämtlich unter dem Namen Kegelschnitte. Schneidet man einen Kegel parallel zur Grundfläche, so bildet die Schnittfläche einen Kreis K (Fig. 82), der parallele Schnitt zur Seitenfläche gibt die Parabel P, der schiefe Schnitt zwischen Grund- und Seitenfläche erzeugt die Ellipse E und endlich der parallele Schnitt zur Kegelachse gibt sich als Hyperbel H zu erkennen. Ein Schnitt durch die Spitze des Kegels an der Ebene der Achse hin und senkrecht zur Direktrix (Fig. 83), schneidet die Kegelfläche in den Erzeugenden cm und cn und die Ebene der Direktrix in dem Durchmesser mn. Der Schnitt liefert eine Dreiecksfläche, welche Achsendreieck genannt wird.

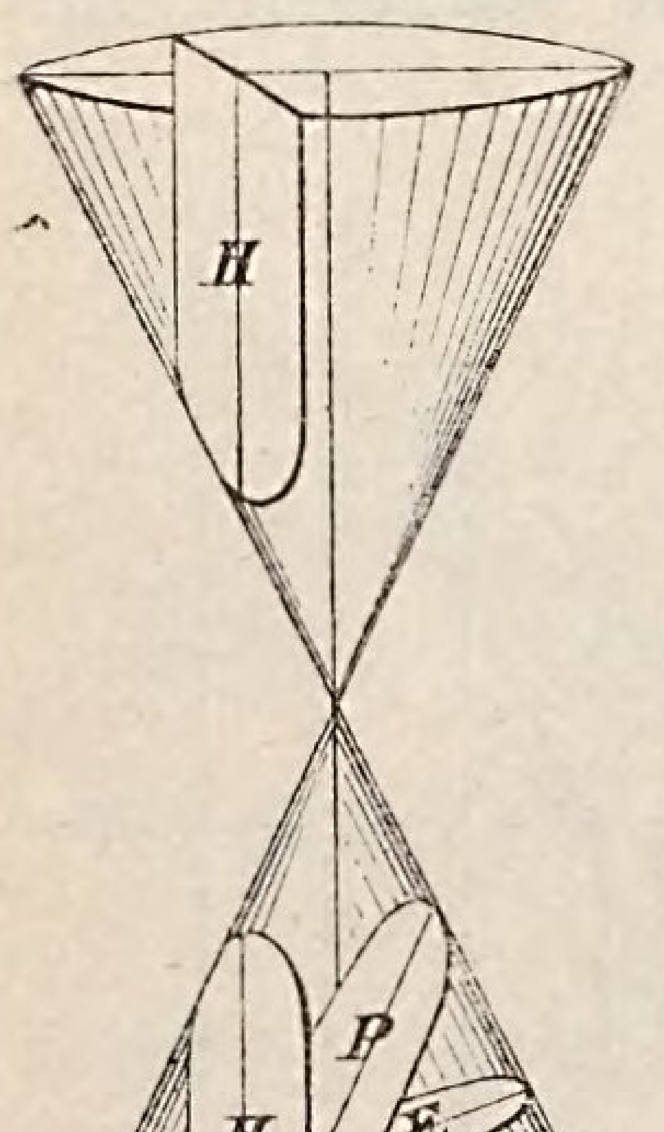


Fig. 82.

Parallele Schnitte zur Grundfläche liefern eine Schar von Kreisen. Aber diese Kreisschnitte sind noch nicht die einzigen, die es gibt. Der parallele Schnitt $gsht$ (Fig. 83) liefert eine Kreisfläche. Schneidet man hingegen den Kegel antiparallel, so dafs $\sphericalangle cal = \sphericalangle \alpha$ und

$\sphericalangle\, cla = \sphericalangle\, \beta$ ist, so erhält man die Schnittfläche $atls$. Verlängert man al nach r und legt man an nr die Senkrechte PQ, so steht nach Seite 49 auch ar, welche Gerade mit der Geraden nr in einer Ebene liegt, senkrecht auf PQ. Zieht man ts parallel, so mufs diese

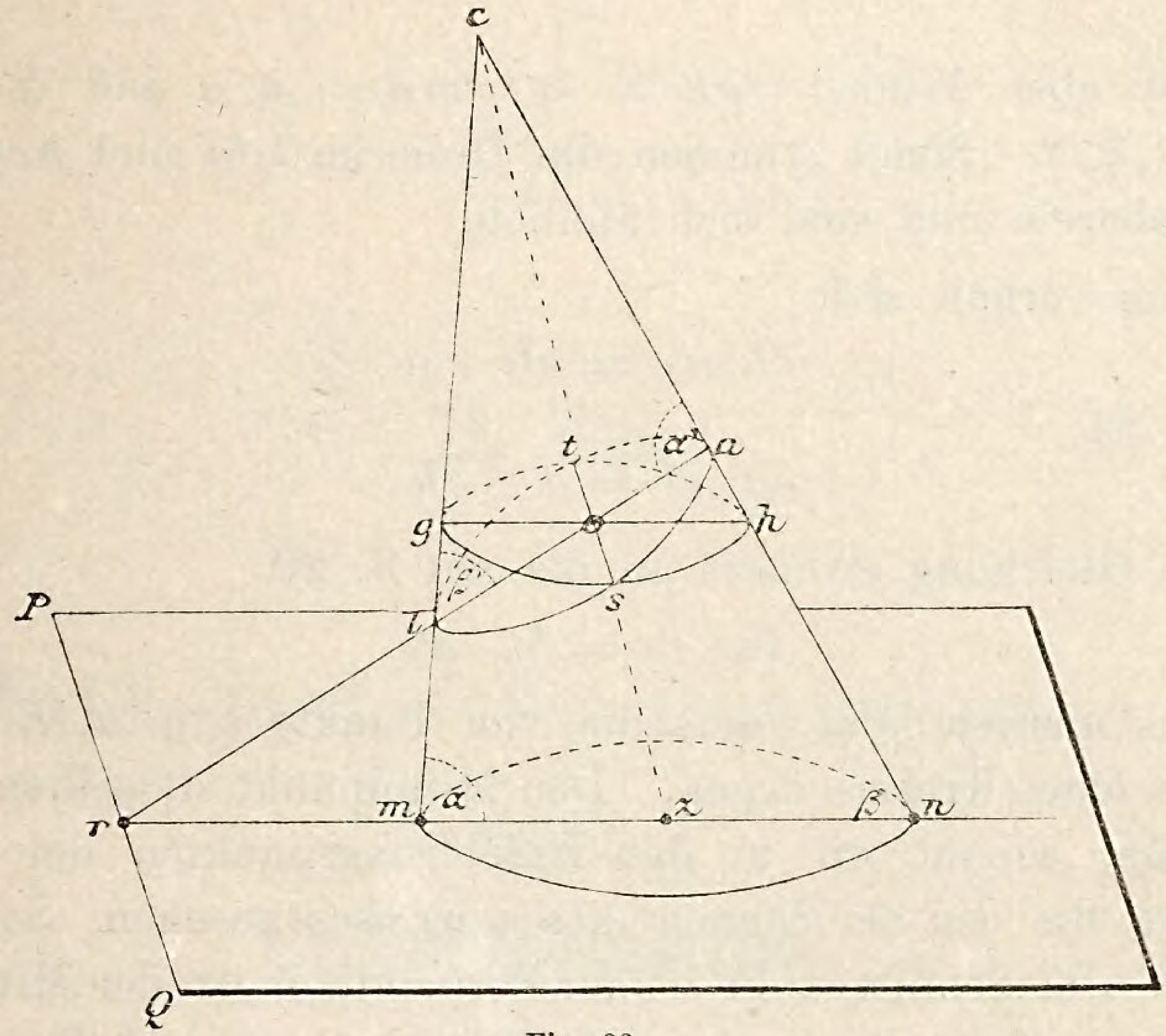


Fig. 83.

Gerade ts auf gh, der Paralellen von rn, wie auch auf al senkrecht stehen. Die Schnittfläche $gsht$ bildet einen Kreis, und nach S. 56 ist $so^2 = go \cdot ho$. In den Dreiecken aoh und gol sind die Winkel gol und aoh als Scheitelwinkel einander gleich. Nun ist $\sphericalangle\, cla$ ex dato $= \beta$ und, da cn durch die Parallelen nm und gh geschnitten ist, $\sphericalangle\, chg = \beta$; folglich sind die angeführten Dreiecke, da sie in den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich. Alsdann ergibt sich, dafs sich verhält

$$go : lo = ao : ho.$$

Hieraus erhalten wir die Gleichung

$$go \cdot ho = ao \cdot lo.$$

Sohin können wir setzen

$$so^2 = go \cdot ho = ao \cdot lo$$

und daraus schliefslich folgern, dafs die Schnittfläche $atls$, welche ebenso wie die Kreisfläche $gsht$ auf der durch die Achse cz gehenden Ebene mcn senkrecht steht, ein Kreis ist. Der Durchschnitt $atls$ einer Ebene mit einer schiefen Kegelfläche wird daher ein Kreis, wenn dieselbe auf dem Achsendreieck

senkrecht steht und mit den Seitenlinien *cm* und *cn*, in welchen die Ebene *mcn* die Kegelfläche schneidet, die nämlichen Winkel bildet, wie die Ebene der Direktrix. Man nennt diesen Schnitt den antiparallelen oder Wechselschnitt.

Es ist aber Winkel $cgh = \sphericalangle cmn = \sphericalangle \alpha$ und $\sphericalangle chg = \sphericalangle cnm = \sphericalangle \beta$. Somit stimmen die Dreiecke *lca* und *hcg* in den Winkeln überein und sind sich ähnlich.

Sodann verhält sich

$$cl : ac = ch : cg$$

und dann ist

$$cg \cdot cl = ac \cdot ch.$$

Diese Gleichung erinnert an die auf S. 20

$$in \cdot is = bi \cdot ai,$$

welche uns merken läſst, daſs die vier Punkte *l*, *g*, *a*, *h* auf der Peripherie eines Kreises liegen. Den Mittelpunkt desselben werden wir gewahr, sobald wir in den Halbierungspunkten der Geraden *gh* und *al*, die wir als Sehnen dieses Kreises ansehen, Senkrechte errichten. Der Schnittpunkt beider Perpendikel ist der Mittelpunkt des Kreises, auf dessen Umfang die Punkte *l*, *g*, *a*, *h* liegen.

Faſst man diesen Kreis als Haupt- oder gröſsten Kreis auf, so werden nach S. 30 die Kreise *gsht* und *atls* zu Schnittflächen einer Kugel und der Kreismittelpunkt zum Kugelmittelpunkt, von dem die Peripheriepunkte dieser Schnittkreise gleichweit entfernt sind.

Damit ist noch gezeigt, daſs sich eine Kugel durch zwei Wechselschnitte legen läſst.

II. Teil.

Mathematische Geographie

und die

Projektionslehre.

»Die gründliche Kenntnis der mathematischen Geographie ist nicht sowohl ein Lob, als die Unbekanntschaft mit ihr ein Tadel ist.«
O. Schulz.

»Die mathematische Geographie ist der Thorweg der Geographie: sie steht zunächst im Dienste der Geographie; die Astronomie aber im Dienste der Humanität.«
Dr. Kühner.

»Landkarten sind Steine der Weisen, sie sind also auch nichts weiter als Steine, wenn ihnen der Weise mangelt.«
Oskar Peschel.

A. Mathematische Geographie.

Gestalt und Gröfse der Erde.

Horizont.

Das griechische Wort Horizont ist ein Partizip, beigefügt dem Substantiv Kyklos (ὁρίζων κύκλος). Da nun ὁρίζειν begrenzen bebedeutet, so ist der Horizont als ein Kreis, der unsern Blick begrenzt, aufzufassen. Unser deutsches Wort: Gesichtskreis entspricht dem fremden Worte durchaus. Die Begrenzung geschieht durch Himmel und Erde. Wir definieren Horizont oder Gesichtskreis also: Der Horizont ist die unsern Blick begrenzende kreisförmige Linie, in welcher der Himmel mit dem übersehbaren Teil der Erdoberfläche scheinbar zusammentrifft.

Jeder Kreis hat einen Mittelpunkt, somit auch der Horizont. Der Standort des Beobachters ist dieser Mittelpunkt. Ändert er diesen, so ändert er auch den Gesichtskreis. Über sich hat er als Hohlkugel den Himmel und unter und um sich die Erde. Diese dünkt ihm eine Fläche oder Ebene zu sein, und sie wird die Horizontalfläche oder Horizontalebene genannt. Blickt der Beobachter über sich und fixirt er am Himmel den Punkt über seinem Haupte, so hat er damit die Mitte des über ihn sich wölbenden Himmels, an dem Sonne, Mond und Sterne auf und untergehen, gefunden. Er selbst befindet sich im Zentrum des Weltalls, er ein Stäubchen des unermefslichen Weltraumes.

Einteilung des Horizontes.

Zwei Punkte im Horizonte des Beobachters sind uns bekannt und damit bestimmbar geworden, erstens sein Standort *B* (Fig. 84) und zum andern der Punkt senkrecht oder vertikal über seinem Scheitel, der Scheitelpunkt oder das Zenit. Die die beiden Punkte verbindende Linie ist die Scheitel- oder Vertikallinie.

Nun geht Tag für Tag die Sonne an einem Punkte des Horizontes auf. Verknüpfen wir diesen Aufgangspunkt mit dem Standort, so erhalten wir hiedurch den Radius des Gesichtskreises und durch seine gerade Verlängerung dessen Durchmessser. Derselbe teilt den Horizont in eine südliche und nördliche Hälfte und seine Endpunkte bezeichnen den Auf- und Untergang der Sonne oder den Ost- und Westpunkt des Horizontes (Fig. 84) die wiederum in mitten der Ost- und Westgegend zu liegen kommen. Ein zweiter Durchmesser, senkrecht zum ersten gestellt, deutet den Süd- und Nordpunkt und damit die Süd- und Nordgegend an. Dieser Durchmesser teilt den Horizont in eine östliche und westliche Hälfte.

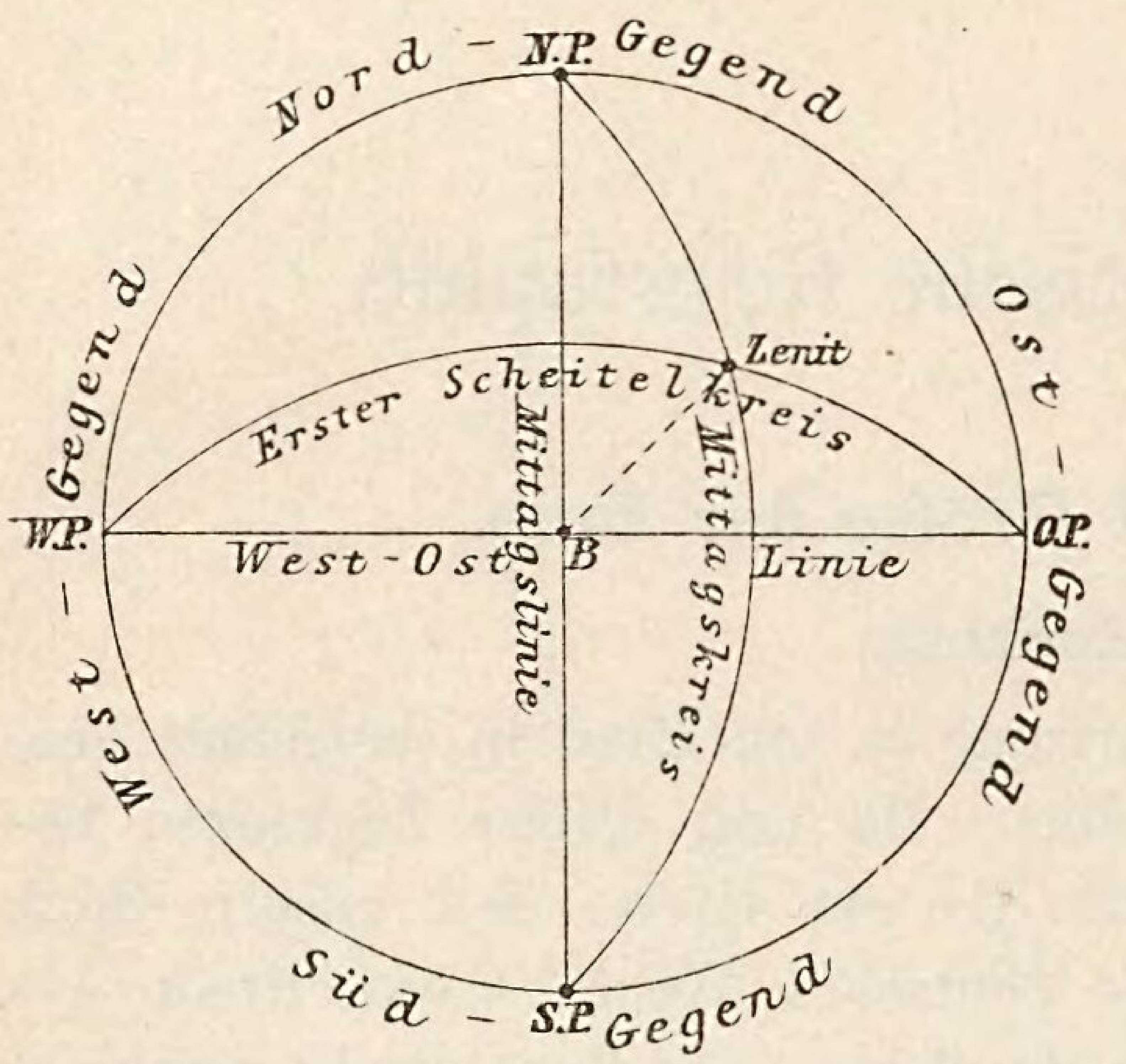


Fig. 84.

Denken wir uns über diesen Linien Bogen am Himmel gezogen, so erhalten wir Halbkreise, die sich in dem Scheitelpunkt schneiden und darum Scheitel- oder Vertikelkreise heifsen. Hat die Sonne bei ihrem Lauf von Osten nach Westen den südnördlichen Scheitelkreis des Beobachters gewonnen, so hat sie damit ihren höchsten Stand am Himmel in dessen Horizont erreicht, es ist für ihn Mittag geworden. Solche Scheitelkreise, welche die Sonne zur Mittagszeit passiert, werden Mittagskreise oder Meridiane und die zugehörige Süd-Nordlinie Mittagslinie genannt. Der andere Kreis, welcher den Ost-Westpunkt des Horizontes verbindet, führt den Namen erster Vertikalkreis. Dieser teilt das Himmelsgewölbe in eine nördliche und südliche Hälfte, der Meridian in eine östliche und westliche Hälfte und endlich der Horizont teilt es in eine sichtbare und unsichtbare Hälfte, auf welch letzterer der diametral entgegengesetzte Punkt vom Zenit des Beobachters, das Nadir oder der Fufspunkt desselben zu suchen ist.

Wir überschauen, wo wir uns auch befinden, die halbe Hohlkugel des Himmels. Durch die am Horizont gewonnenen Punkte hat man Anhaltspunkte zur Bestimmung seines Standortes, man weifs sich durch sie zu orientieren oder zurechtzufinden. Orientieren

vom lat. oriens (sol) gebildet, heifst den Ostpunkt und darnach alle übrigen Punkte bestimmen. Der Begriff hat sich dahin erweitert, dafs man unter orientieren die Bestimmung der Weltgegenden versteht, im allgemeinen auch, dafs man sich in irgend einer Sache zurechtzufinden weifs.

Die Mittagslinie.

Beobachtungen über den täglichen Lauf der Sonne haben ergeben, dafs sie nur zweimal des Jahres am 21. März und 22. September genau im Ostpunkt auf- und im Westpunkt untergeht. Aufser diesen genannten Tagen wird die Orientierung nach dem Auf- und Untergang der Sonne unsicher und man ist deswegen genötigt, zuverlässigere Mittel für die Orientierung zu ersinnen. Zur Ost-Westlinie steht die Mittagslinie senkrecht, über sie wölbt sich der Mittagskreis, der die Himmelskugel halbiert. Passiert ihn die Sonne, so hat sie die eine Hälfte ihrer Bahn zurückgelegt, es ist für den Beobachter Mittag geworden. Sein Schatten fällt in die Mittagslinie, und dieser selbst belehrt ihn, die Mittagslinie aufzufinden und dies um so mehr, da er zugleich die Wahrnehmung macht, dafs dieser Schatten der kürzeste ist von allen Schattenlängen, die sein Körper in die Horizontalebene wirft. Bringt er an seinem Standort einen Stab an, so hat er das Instrument gefunden, das ihm als Sonnenzeiger dient und an dem er seine Beobachtungen anstellen kann. Den kürzesten Schatten weifs er auf den Durchgang der Sonne durch den Meridian seines Standortes zu deuten, er gibt ihm die Richtung der Mittagslinie an. Hat er diese, so weifs er den Nord-, Süd-, Ost- und Westpunkt zu bestimmen, er ist, mit einem Wort, orientiert.

So einfach diese Manipulation sich auch ausnimmt, so ist das eine Bedenkliche dabei, den Augenblick zu erspähen, da der Sonnenzeiger oder Gnomon den kürzesten Schatten wirft. Und haben wir nicht den denkbar kürzesten Schatten, so gehen wir trotz unseres Gnomonen fehl, statt der Mittagslinie haben wir eine andere Linie gefunden und unser Orientierungsverfahren ruht auf falscher Basis. Aus dieser Verlegenheit hilft uns das Kapitel von den gleichgrofsen positiven und negativen Winkeln (S. 43). Die Mitte zwischen ihnen stellt nach Fig. 56 eine gerade Linie dar. Entgegengesetzte Winkel erhält man aus gleichlangen Vormittags- und Nachmittagsschatten. Da nun die Bogen nach den Zentriwinkeln gemessen werden, so zieht man um den Fufspunkt des

Stabes konzentrische Kreise (Fig. 85) und merkt sich an ihnen gleichgroſse Schatten an. Halbieren wir den Winkel, welche diese gleichen Schattenlängen einschlieſsen, so haben wir die Linie, welche den Winkel in einen positiven und negativen Winkel scheidet oder besser: den Winkel, welchen der vormittägige Schatten mit der Mittagslinie und den, welchen der nachmittägige Schatten mit ihr bildet. Diese Mittellinie kann keine andere als die Mittagslinie sein. Statt vormittägige und nachmittägige gleich lange Schatten in den konzentrischen Kreisen aufzusuchen, kann man sich das Verfahren auch dadurch erleichtern, daſs man in entsprechenden Zeitabständen, also vormittags 8 Uhr, nachmittags 4 Uhr oder vormittags 10 Uhr und nachmittags 2 Uhr, die Schattenlängen anmerkt und daraus durch die Winkelhalbierung die Ermittlung der Mittagslinie vornimmt. Sie bestimmt genau die Punkte Norden *N* und Süden *S* und durch eine senkrechte Linie zu ihr wiederum die Punkte Osten *O* und Westen *W*.

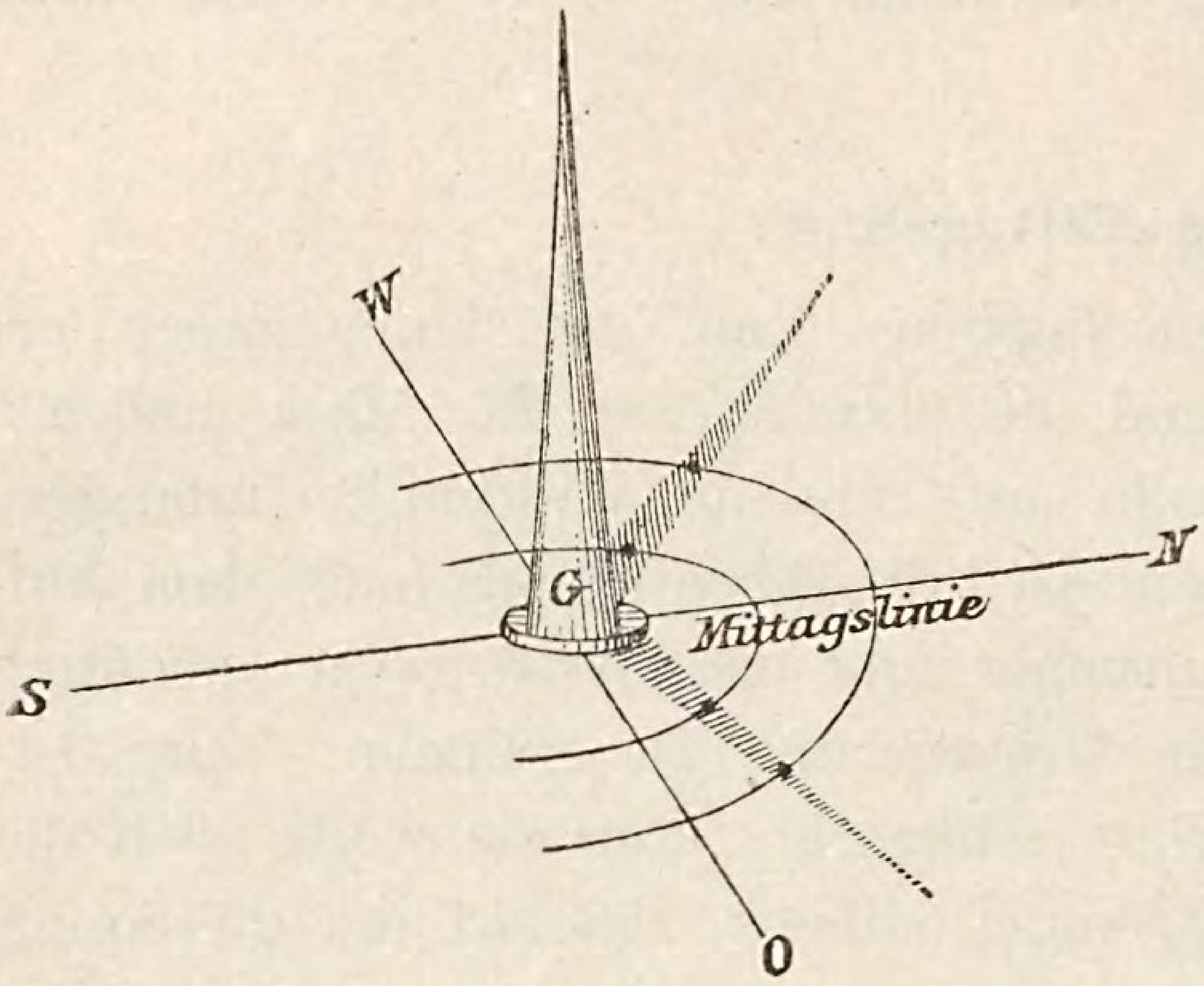


Fig. 85.

Die Gestalt der Erde, der scheinbare und wahre Horizont.

Nie verliert der Horizont, so oft wir unsern Standort auch ändern wollen, seine Kreisform. Er halbiert den Himmel in eine sichtbare und unsichtbare Hälfte. Da es nur bei kugelförmigen Körpern möglich ist, daſs jeder Abschnitt eine Kreisfläche zeigt, so ist anzunehmen, daſs die E r d e e i n e K u g e l s e i.

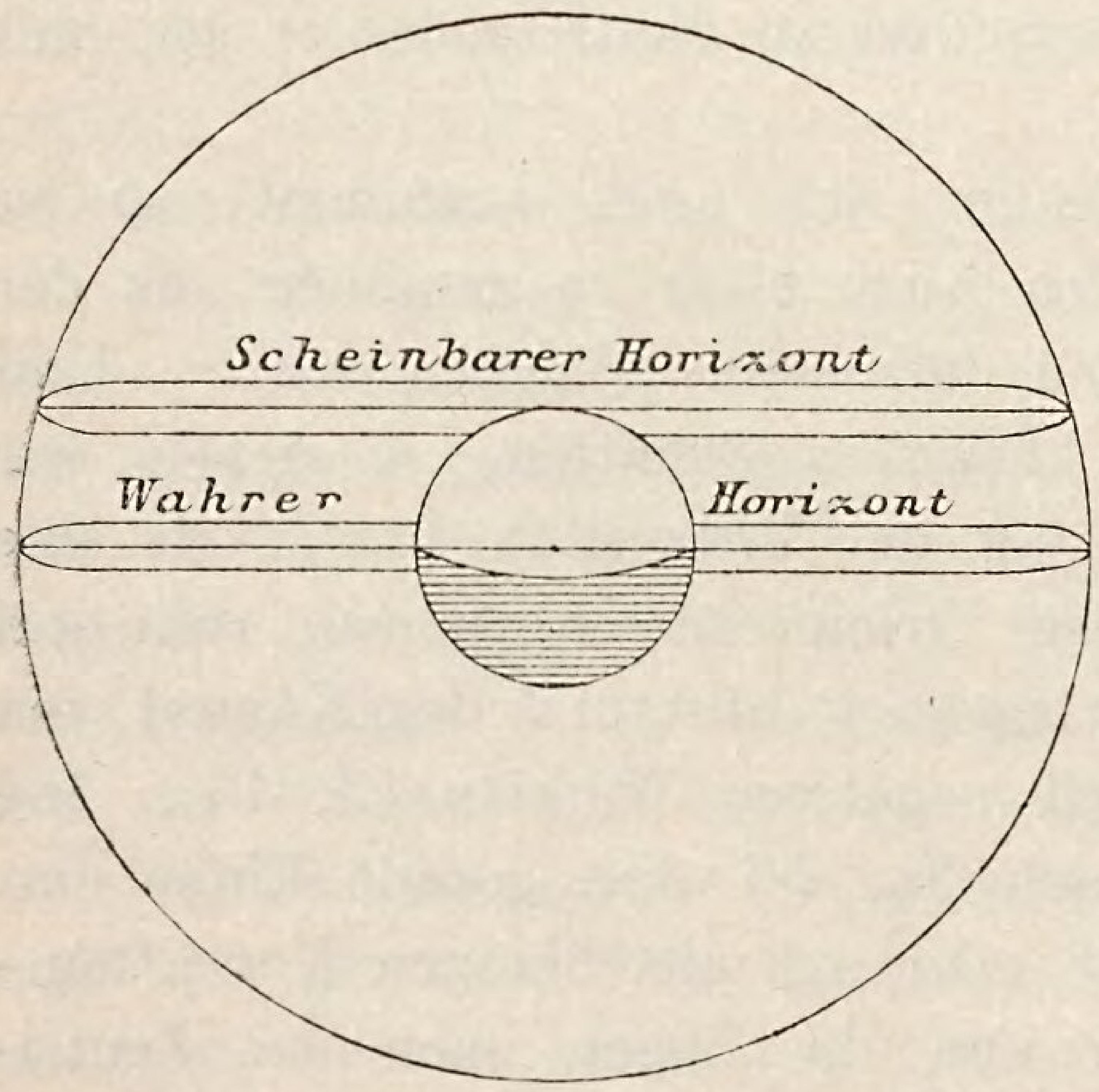


Fig. 86.

Den Teil der Erdoberfläche, den wir wirklich übersehen, nennt man den natür-

lichen oder scheinbaren Horizont (Fig. 86). Da jedoch die Entfernung dieser Horizontalebene vom Erdmittelpunkt in Vergleich zur unermeſslichen Weite der Gestirne verschwindend klein ist, so ist der scheinbare Horizont mit der durch den Mittelpunkt der Erde gehenden parallelen Horizontalebene, welche die Erd- und Himmelskugel halbiert zusammenfallend zu denken. Diese Ebene heiſst der wahre oder mathematische Horizont (Fig. 86). Von ihm allein nur wird in der Folge die Rede sein.

Beweise für die Kugelgestalt der Erde.

Die Kugelform der Erde behauptete zuerst der Philosoph und Mathematiker Pythagoras, der um 540 v. Chr. in Kroton lebte. Er sagte: Die vollkommenste, mathematische Körperform ist nicht die Scheibe, nicht die Tafel, nicht der Würfel, sondern die Kugel und diese vollkommene Form ist der Erde zuzutrauen. Den ersten sinnlichen Beweis hiefür lieferte Alexanders groſser Lehrer, Aristoteles. Er wies auf die Thatsache hin, daſs der Erdschatten, den der Mond bei Mondverfinsterungen erhält, bei allen vorkömmlichen Stellungen immer nur rund ist. Nur einer Kugel komme in allen möglichen Lagen zu einem andern Körper ein stets runder Schatten zu, nicht auch einer Scheibe oder einem Cylinder. Einen weitern Beweis fügte der Alexandrinische Astronom und Geograph Ptolemäus, der um 130 v. Chr. lebte, hinzu. Die allbekannte Thatsache, daſs dem Schiffer die Höhen eher ansichtig werden als die Küste, erhob er zum Beweis für die Krümmung der Erdoberfläche und damit für die Kugelform der Erde. Treten wir diesem Beweise näher. Nehmen wir an, das Schiff befinde sich in *a* (Fig. 87), so kommt der Gipfel *a′* in den Gesichtskreis des Schiffers. Ist es nach *b* gelangt, so überblickt man vom Berge das Stück *a′ b′* und in *c* hat er ihn samt dem Uferrand vor sich. Wäre das Stück Meer, das er durchfahren hat, nicht

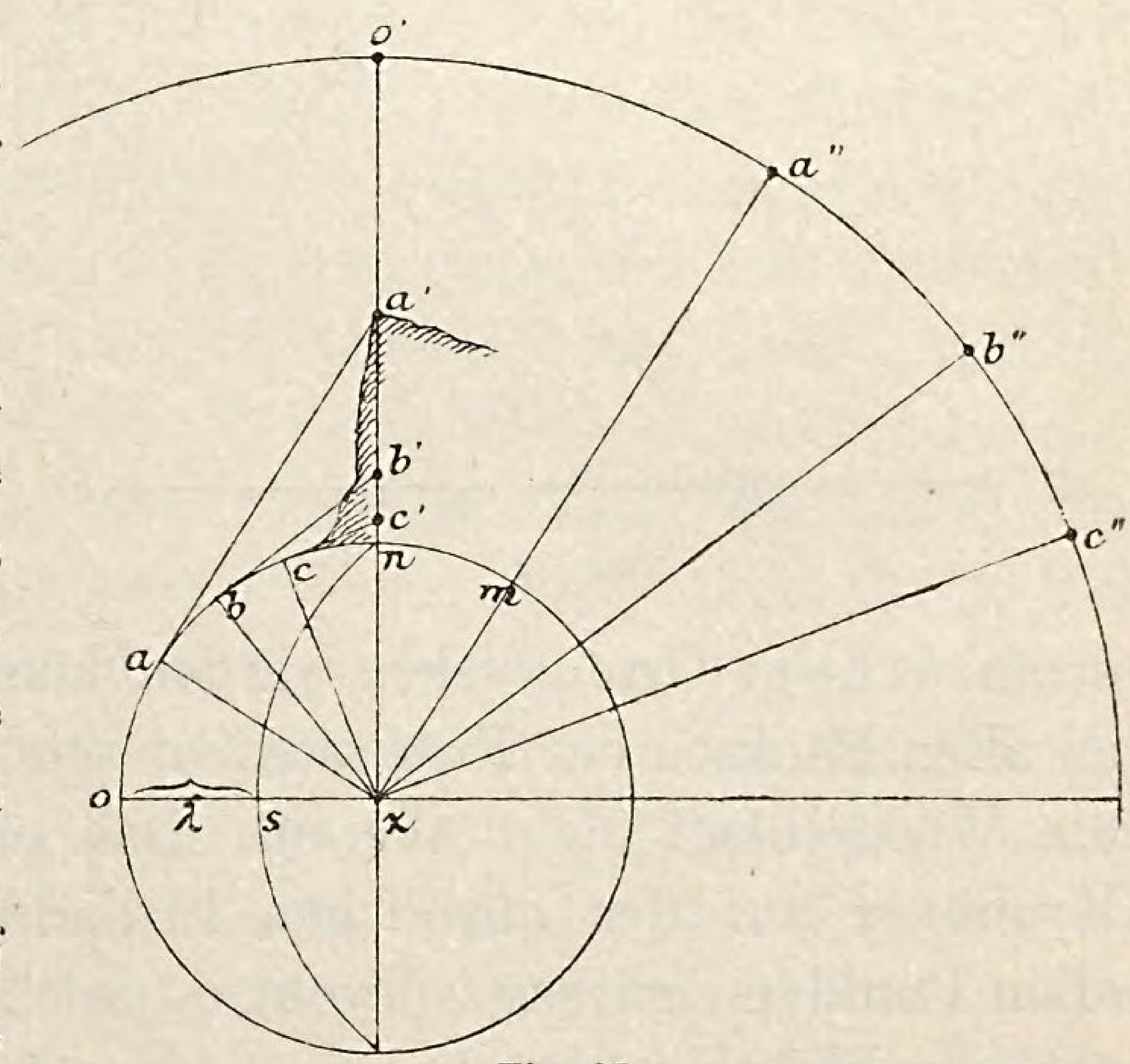


Fig. 87.

gekrümmt, sondern flach, so hätte er nicht nach und nach, sondern mit einem Mal den Berg in seinen Gesichtskreis bekommen. Von selbst drängt sich uns der Gedanke auf, zu untersuchen, welche Folge für den Ausblick eine Bergbesteigung an einer Küste haben müsse. Offenbar reicht am Ufer des Besteigers Blick von c' nach c, ist er in b' angekommen nach b und am Gipfel bis nach a. Der Horizont hat sich Schritt für Schritt erweitert. Das wäre nimmermehr der Fall, wenn die Erde flach und nicht gekrümmt wäre, d. h. wenn sie eine scheiben- oder tafel- und nicht eine kugelförmige Gestalt besäfse. Verbinden wir die Peripheriepunkte a, b, c mit dem Kugelzentrum, so gewahren wir, dafs die Sehstrahlen als Tangenten sich an die Kugel anlegen und so ein Mittel bieten, wenn Radius und Bergeshöhe bekannt sind, die Sehweite mittels des Pythagoräers zu erfahren. Denn es ist, wenn $na' = h$, der Radius r und $aa' = t$ ist

$$t^2 + r^2 = (r + h)^2$$
$$t^2 = (r + h)^2 - r^2$$
$$t = \sqrt{h\,(2\,r + h)}\ ^{*)}.$$

Untersuchen wir, um die Beweise zu mehren, ob die Erscheinungen am Himmel zu der Annahme besser stimmen, ob die Erde eine Ebene oder aber eine Kugel sei. Figur 88 sei EE' diese Ebene und A und B Wohnplätze auf der Erde. Der Polarstern würde von A aus in P_1 gesehen, von B aus in derselben oder parallelen Richtung ob der weiten Entfernungen der Gestirne in P zu suchen sein. Damit wäre die mittägige Höhe des Polarsternes überall auf der Erde gleich und der Stern, wenn er an einem Orte gesehen werden könnte, müfste selbstverständlich an allen Punkten der Erde sichtbar sein. Mit dieser Annahme stimmt die Wirklichkeit nicht überein. Das südliche Kreuz z. B. sieht kein Bewohner auf der nördlichen Erdhälfte; demnach ist es nicht an allen Punkten sichtbar, obwohl es gesehen werden kann. Versuchen wir der Wahrheit durch eine andere Konstruktion näherzukommen. Nehmen wir das Gegenteil von einer geraden ebenen Fläche an und

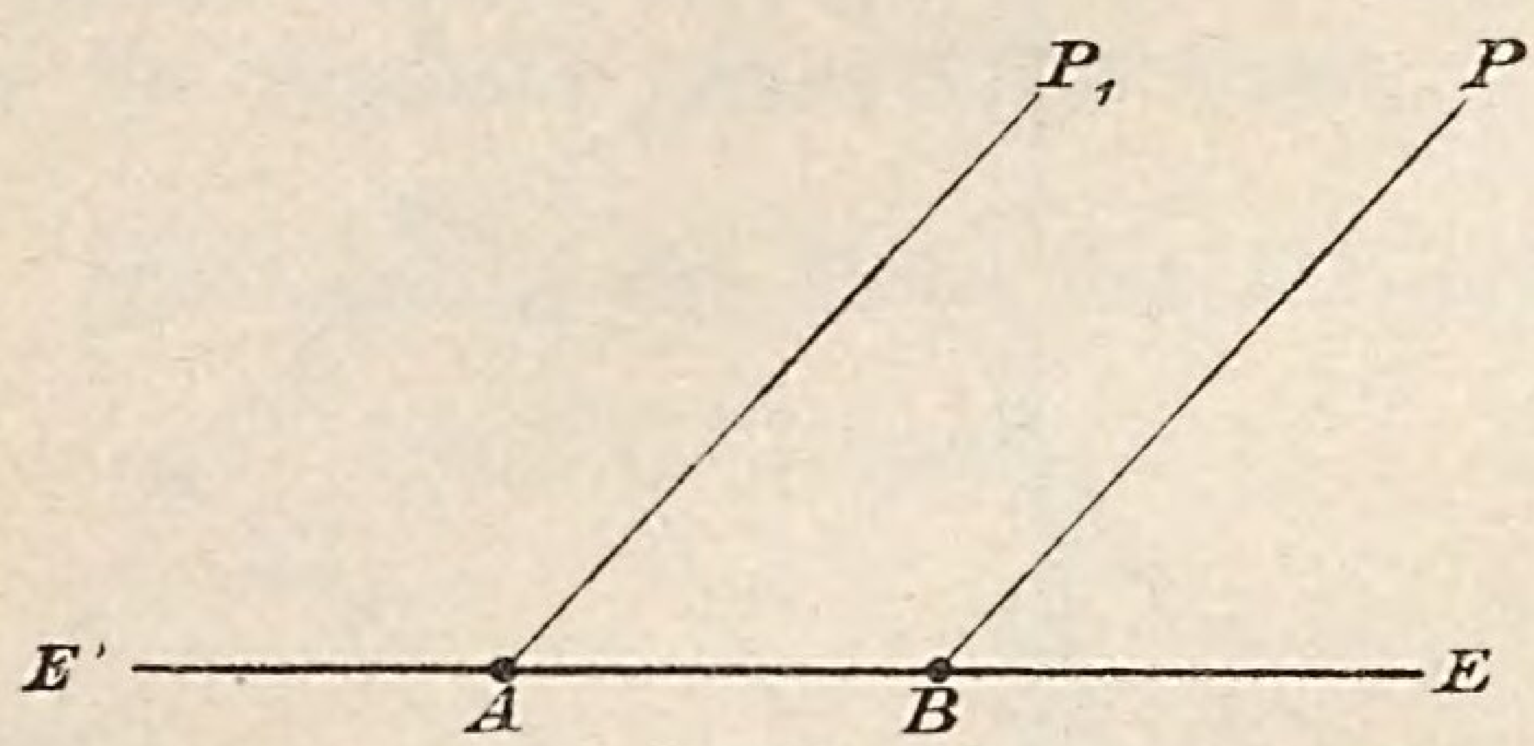


Fig. 88.

*) Die Sehweite vom Montblanc beträgt 246 km und die vom Gaurisankar 335 km.

zeichnen eine gekrümmte Fläche (Fig. 89) *NR* an. In *N* steht der Polarstern im Zenit, Horizont und Vertikallinie stehen im rechten Winkel. In *B* wird der Winkel schief, in *K* noch spitzer und in *Q* zu Null, in *R* gewahrt man nichts mehr vom nördlichen Polarstern, hier wird man Sterne erblicken, die dem Bewohner der nördlichen Erdhälfte verborgen sind. Die Wahrnehmung, daſs die mittägige Höhe der Sterne des nördlichen Himmels immer kleiner wird, je weiter man nach Süden sich begibt, trifft auf der Erde vollständig zu. Sie zwingt uns, in der Richtung von Nord nach Süd für unsere Erde eine gekrümmte oder bogenförmige Gestalt anzunehmen.

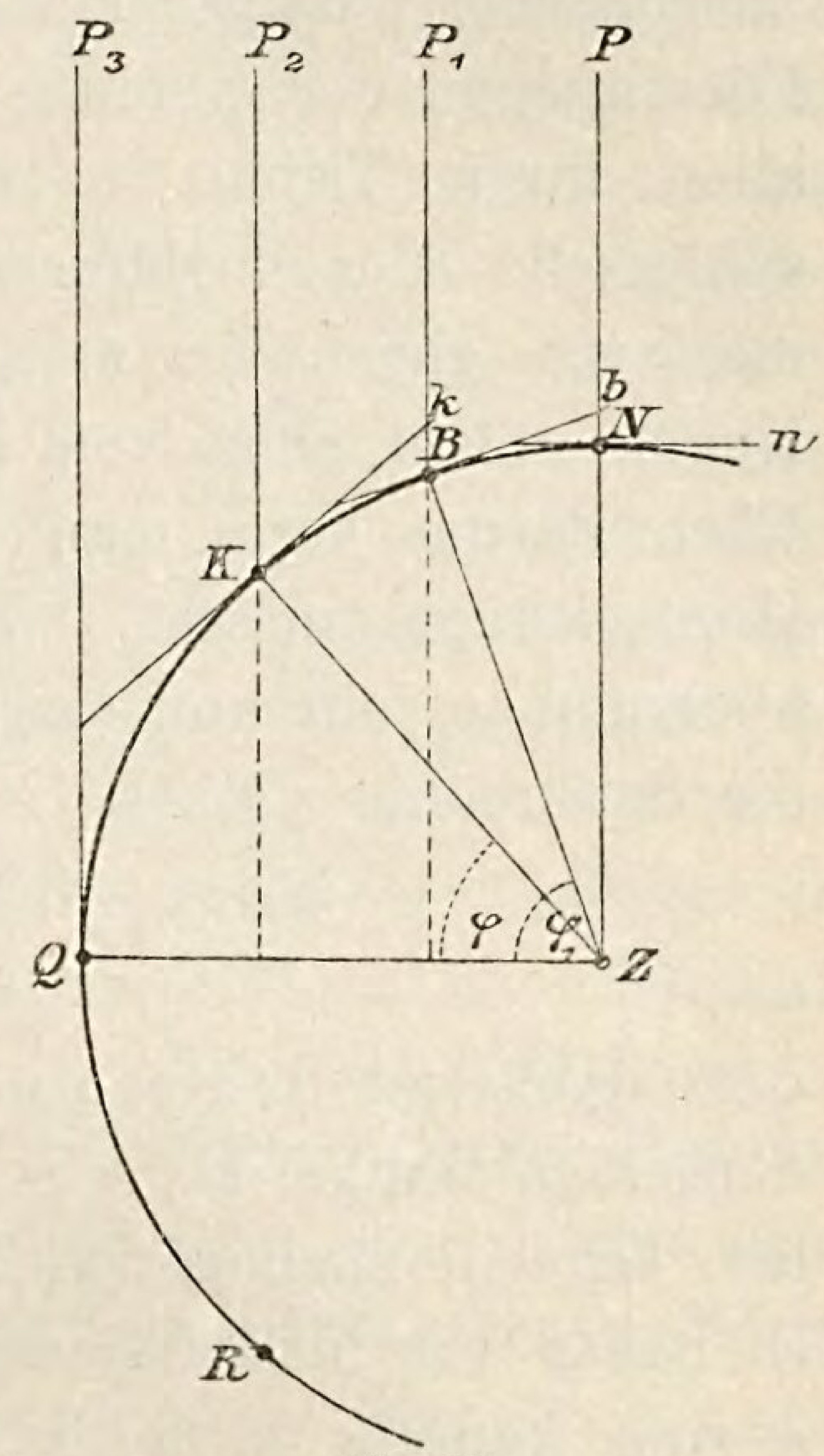


Fig. 89.

Soll aber die Krümmung der Erde auch von Ost nach West stattfinden, so kann den Erdbewohnern die Sonne nicht zu gleicher Zeit in den Horizont treten, dem Ort *s* (Fig. 87) muſs sie früher aufgehen als dem Orte *o*. Eine Folge hiervon ist, daſs die Uhren östlich gelegener Orte denen der westlichen Orte in der Zeit voraus sein müssen. Nehmen wir an, die Uhr sei nach Münchner Zeit gerichtet, d. h. sie gehe so, daſs sie für München stets die richtige Zeit angibt, so wird diese Uhr, sobald man sich an westliche Orte begibt, vorausgehen und kommt man nach östlichen Ortschaften, so wird sie deren Uhren gegenüber zurück sein. Diese Annahme stimmt wiederum mit der Wirklichkeit vollkommen überein, so daſs kein Zweifel bestehen kann, daſs die Erde auch von Osten nach Westen gekrümmt ist. Wenn nun die Erde kugelförmig ist, so muſs man schlieſslich wieder, sobald man von Westen nach Osten oder umgekehrt reist, am Ausgangsorte ankommen. Der thatsächliche Beweis für die Kugelgestalt der Erde durch Weltumseglungen ist seit Ferdinand Magelhaens erster Fahrt um die Welt, die von 1519 bis 1522 geschehen, schon vielfach erbracht worden.

Durch solche Reisen um die Erde ist auch die Wahrheit erkannt worden, daſs von einem Halt oder einer Stütze, wodurch die Erde im Weltenraum gefestigt sei, nichts wahrzunehmen ist. Dann bleibt nichts übrig, als zu glauben, daſs die Erde frei im Weltenraum schwebe, gehalten von einer unsichtbaren Hand. Dieselbe hat

uns der grofse Gelehrte Newton in der Gravitation geoffenbart. Und nach den Gesetzen der Schwere ist für die Erde keine andere Form als die Kugelgestalt möglich. Denn eine sich selbst überlassene, flüssige Masse, wie die Erde zu aller Anfang nach den Forschungen der Geologen gewesen sein mufs, kann nur dann in allen ihren Teilen im Gleichgewicht verharren, wenn sie eine sphärische oder kugelförmige Gestalt angenommen hat. Und so ist die Erde gleich den andern Himmelskörpern eine frei schwebende Kugel, welche rings vom Himmel oder dem Firmament umgeben ist. Eben darum kann man die Bogen der Erdkugel an der hohlen Himmelskugel messen. Denn die Bogen nm und $o'a''$ (Fig. 87) überspannen ein und denselben Zentriwinkel. Errichten wir auf az die Senkrechte za'', so ist $on = am = 90^0$. Es ist dann

$$\sphericalangle oza + \sphericalangle azn = \sphericalangle azn + \sphericalangle nzm$$

also
$$\sphericalangle oza = \sphericalangle nzm$$

und damit ist Bogen oa = Bogen nm. Da aber der Bogen $o'a''$ denselben Winkel als wie Bogen nm überspannt, so ist Bogen $o'a''$ den Graden nach gleich dem Bogen oa. Da m von a 90^0 abliegt, so haben wir in der Geraden za'' den Horizont von a. Soweit nun a vom Äquator entfernt ist, eben so hoch über dem Horizont des Ortes a steht der Stern o'.

Einteilung der Erde.

Ist die Erde eine Kugel und beabsichtigen wir sie einzuteilen, so bleibt uns nichts übrig als dies nach den Lehrsätzen der Stereometrie (S. 30 u. f.) zu bewerkstelligen.

Man geht dabei von einem Punkte der Kugel, Pol genannt, aus. Der zweite Endpunkt des durch den Pol gehenden Kugeldurchmessers ist der gegenüberliegende Punkt auf der Kugel, der Gegenpol. Die Verbindungslinie beider Pole, die auf der Erde Nord- und Südpol heifsen, führt den Namen Achse. Die Kreise, welche man durch die Pole legt, sind Haupt- oder Grofskreise und sie werden Mittagskreise oder Meridiane genannt. Durch irgend welchen Meridian kann man die Erde in eine östliche und westliche Hemisphäre abteilen. Ebenen, senkrecht zur Achse gelegt, schneiden die Kugel in Parallelkreisen. Der Parallelkreis, welcher durch das Kugelzentrum geht und die Erde in eine nördliche und südliche Hälfte teilt, ist gleichfalls ein gröfster Kreis. Sein Name ist Äquator oder Gleicher, in der Schiffersprache Linie. Der Äquator wird wie jeder andere Kreis in 360 Grade geteilt. Zieht man durch je zwei

Teilpunkte einen Hauptkreis, so müssen 180 ganze oder 360 halbe Meridiankreise entstehen. In eben so viele Grade bringt man auch irgend einen Meridian und legt durch die Teilpunkte zur Erdachse senkrechte Schnittflächen. Die Zählung der hierdurch entstandenen 180 ganzen Parallelkreise beginnt man vom Äquator aus und zwar zählt man 90 Kreise dem Nordpol und ebenso viele dem Südpol zu. Der 90. Parallel fällt mit dem Pol in einen Punkt zusammen. Alle Meridiane sind unter sich und mit dem Äquator als gröfste Kreise gleich, somit auch ihre Radien und Gradlängen. Zwei Meridiane schliefsen ein sphärisches Zweieck ein, dessen Winkel durch die Tangenten, welche im Schnittpunkt an die Kugelkreise zu legen sind, gemessen wird. Ein bestimmt angenommener Mittagskreis dient als Null- oder Anfangsmeridian und zwar in der Geographie der von Ferro, astronomisch für Deutschland der von Berlin, für die Schiffahrt der von Greenwich. Die Entfernung eines Meridians vom Anfangsmeridian, gemessen im Bogen am Äquator, nennt man die geographische Länge (Zeichen λ) Fig. 87. Der Abstand eines Parallelkreises vom Äquator im Bogen am Meridian gemessen, wird seine geographische Breite (Zeichen φ) genannt. Diese Bogen bilden die geographischen Bestimmungslinien oder Koordinaten, durch welche ein Punkt auf der Erde genau bestimmt ist. Figur 93 S. 91 stellt die halbe Erdkugel vor. ANA' ist der Anfangsmeridian, AOA' der Äquator. Die geographischen Koordinaten des Punktes M sind sonach $AR = \lambda$ und $MR = \varphi$*).

Die zwischen zwei Parallelen gelegene Kugeloberfläche heifst Zone. Ein Kugelabschnitt wird Kugelsegment und die entsprechende Kugeloberfläche Kugelhaube oder Kalotte genannt. Ist der Kugelschnitt ein gröfster Kreis, so sind die Kugelstücke Hemisphären oder Halbkugeln. Während alle Mittelpunkte der Hauptkreise mit dem Erdmittelpunkt zusammenfallen, liegen die Zentra der Parallel- oder Nebenkreise aufserhalb desselben, senkrecht übereinander in der Erdachse.

Meridiane und Parallelen schneiden sich gegenseitig in rechten Winkeln und rufen ein Liniensystem hervor, mittels dessen jede Stelle auf der Erde bestimmbar wird. Dieses Liniensystem führt den Namen Netz und die Teile des Gitters heifsen Maschen. In der äquatorialen Zone bilden die Maschen Quadrate, in der

*) Die Umrechung des einen Systems in das andere, also die Umrechung der Längen in Ferro, in Pariser oder Greenwicher Längen oder auch umgekehrt, ist in der Anmerkung der Tabelle III zu finden.

nördlichen oder südlichen gemäſsigten Zone Trapeze und um die Pole herum Dreiecke.

Die Radien der Parallelkreise nehmen mit der Entfernung vom Äquator ab. Bei Figur 90 sei $lz = nz$, der Äquator- oder Meridianradius $= r$ und nz' sei der Radius eines Parallels von der Breite $\varphi = r'$. Projizieren wir nz' auf lz, so ist

$$zm = r' = r \cos \varphi,$$

welche Gleichung uns sagt, daſs der Radius eines Parallelkreises gefunden wird, wenn man den Äquator- oder Meridianradius mit dem Kosinus der Breite multipliziert.

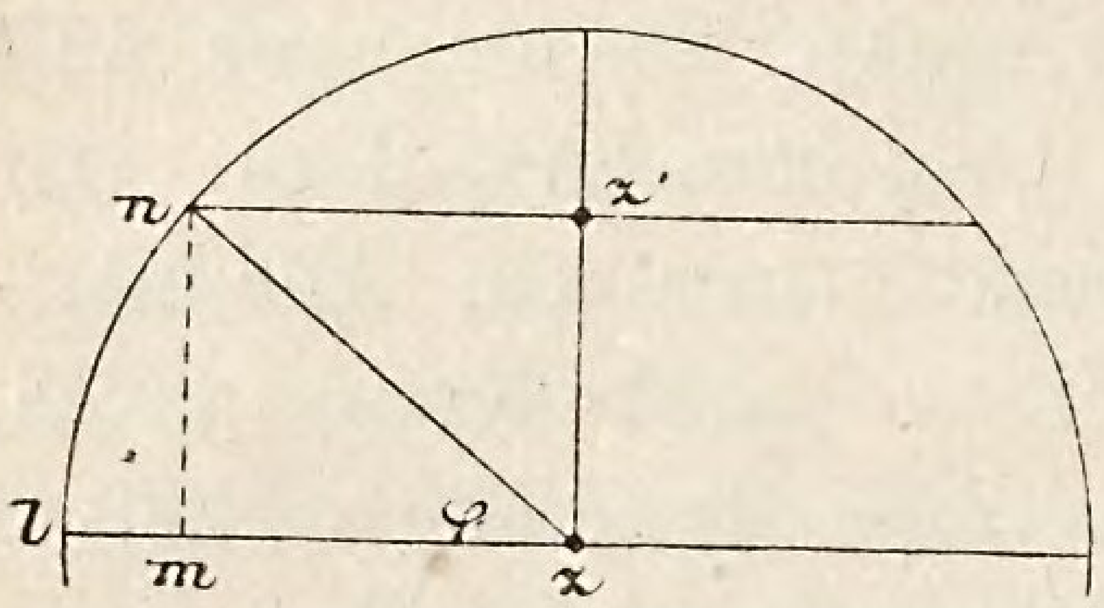


Fig. 90.

Bringen wir die Radien zu einander in ein Verhältnis, so ergibt die Gleichung

$$r : r' = r : r \cos \varphi$$

oder, wenn wir $r = 1$ nehmen

$$1 : r' = 1 : \cos \varphi,$$

daſs sich der Äquator- oder Meridianradius zu einem Parallelradius verhält, wie

$$1 : \cos \varphi.$$

Ist der Äquator- oder Meridianradius r bekannt, so findet man den Radius r' des Parallels φ durch den Ansatz

$$1 : \cos \varphi = r : r'$$
$$r' = r \cos \varphi.$$

Den Äquator- oder Meridianradius r aus dem Radius r' des Parallelkreises φ erhält man gleichfalls durch den Ansatz

$$1 : \cos \varphi = r : r'$$

denn es ist

$$r = \frac{r'}{\cos \varphi} = r' \sec \varphi.$$

Da jeder Kreisumfang $2r\pi$ ist, so hängt das Verhältnis des Umfanges zwischen dem Äquator oder einem Meridian und einem Parallelkreis lediglich nur von dem Verhältnis der Radien ab. Ist der Äquatorumfang $= U$ und der Umfang eines Parallels von der Breite $\varphi = U'$, so erhält man den einen oder andern aus den Gleichungen

$$1 : \cos \varphi = U : U'$$
$$U' = U \cos \varphi \quad (1$$

$$1 : \cos \varphi = U : U'$$
$$U = U' \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = U' \sec \varphi. \quad (2$$

Weil aber jeder Kreis in 360 Teile oder Grade gebracht wird, so bleibt durch diese gleiche Teilzahl das Verhältnis zwischen einem Äquator- oder Meridian- und Parallelgrad wiederum dasselbe. Bezeichnen wir einen Äquator- oder Meridiangrad mit λ, einen Parallelgrad von der Breite φ mit λ', so ergibt dies Verhältnis für den einen oder andern Grad:

$$1 : \cos\varphi = \lambda : \lambda'$$
$$\lambda' = \lambda \cos\varphi \qquad (1$$

$$1 : \cos\varphi = \lambda : \lambda'$$
$$\lambda = \lambda' \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = \lambda' \cdot \sec\varphi, \qquad (2$$

welche Gleichungen in Worten also lauten:

Die Gröfse eines Parallelgrades wird gefunden, wenn man einen Äquator- oder Meridiangrad mit dem Kosinus der Breite multipliziert, und ein Äquator- oder Meridiangrad wird aus einem Parallelgrad erhalten, wenn man denselben mit der Sekante seiner geographischen Breite multipliziert.

Die Längen- und Breitengrade der Gradabteilungen der Erde nach den Bessel'schen Dimensionen von Bremiker berechnet enthält die Tabelle II.

Die Bestimmung der geographischen Länge und Breite oder der geographischen Koordinaten.

Durch die geographische Breite oder den Abstand vom Äquator ist man im Stande einen Ort nach seiner Äquatorferne anzugeben. Die Entfernungen vom Äquator lassen sich, wie wir bereits wissen, am Himmel, wenn man einen Stern hiezu benützt, messen. Ein Stern, der im Zenit des Poles sich befände, müfste im Horizont eines Äquatorbewohners erscheinen. Zum Glück existiert ein derartiger Fixstern, der unter dem Namen Polarstern bekannt ist. Ihn aufzufinden unter den Millionen von Sternen ist nicht schwer. In seiner Nähe ist ein Gestirn mit sieben hellleuchtenden Sternen. Niemandem auf der nördlichen Erdhälfte kann dasselbe am Himmelszelt entgehen. Von alter Zeit her trägt es den Namen: Himmels- oder grofser Wagen oder auch grofser Bär. Verbindet man (Fig. 91) die „Hinterräder des grofsen Wagens“ durch eine Linie, und verlängert man dieselbe bis sie einen hellleuchtenden Stern trifft, so wird man auf ein Gestirn geführt, welches dem grofsen

Bären in Miniatur aufs Haar gleicht und deshalb der kleine Bär genannt wird. Der aufgefundene Stern ist der Polarstern. Ihn erblickt der Äquatorbewohner jahraus jahrein im Horizont. Der Parallel des Äquatorbewohners zählt Null, die Höhe des Polarsterns über seinem Horizont oder die Polhöhe ist gleichfalls Null. Somit entsprechen sich in diesem Falle geographische Breite und Polhöhe. Werfen wir einen Blick auf Figur 87 S. 79, so finden wir diesen Satz allgemein bestätigt, wenn wir o als den Sitz eines Äquatorbewohners annehmen und o' als den Polarstern, der im Zenit von dem Erdpol n sich befindet. Macht sich derselbe Bewohner von o nordwärts auf den Weg, Tag für Tag sieht er mehr und mehr den Polarstern über seinem Horizont. In a angekommen steht derselbe in dem Bogen $a''o'$ über dem Horizont seiner neuen Heimat. Nun ist uns gar wohl bekannt, daſs der Bogen oa in Graden gemeſsen ebenso groſs ist, als der Bogen $o'a''$ (S. 82). Demnach kann die geographische Breite eines Ortes aus der Höhe des Polarsterns über dem Horizont erforscht werden und wir können allgemein die Sache dahin aussprechen:

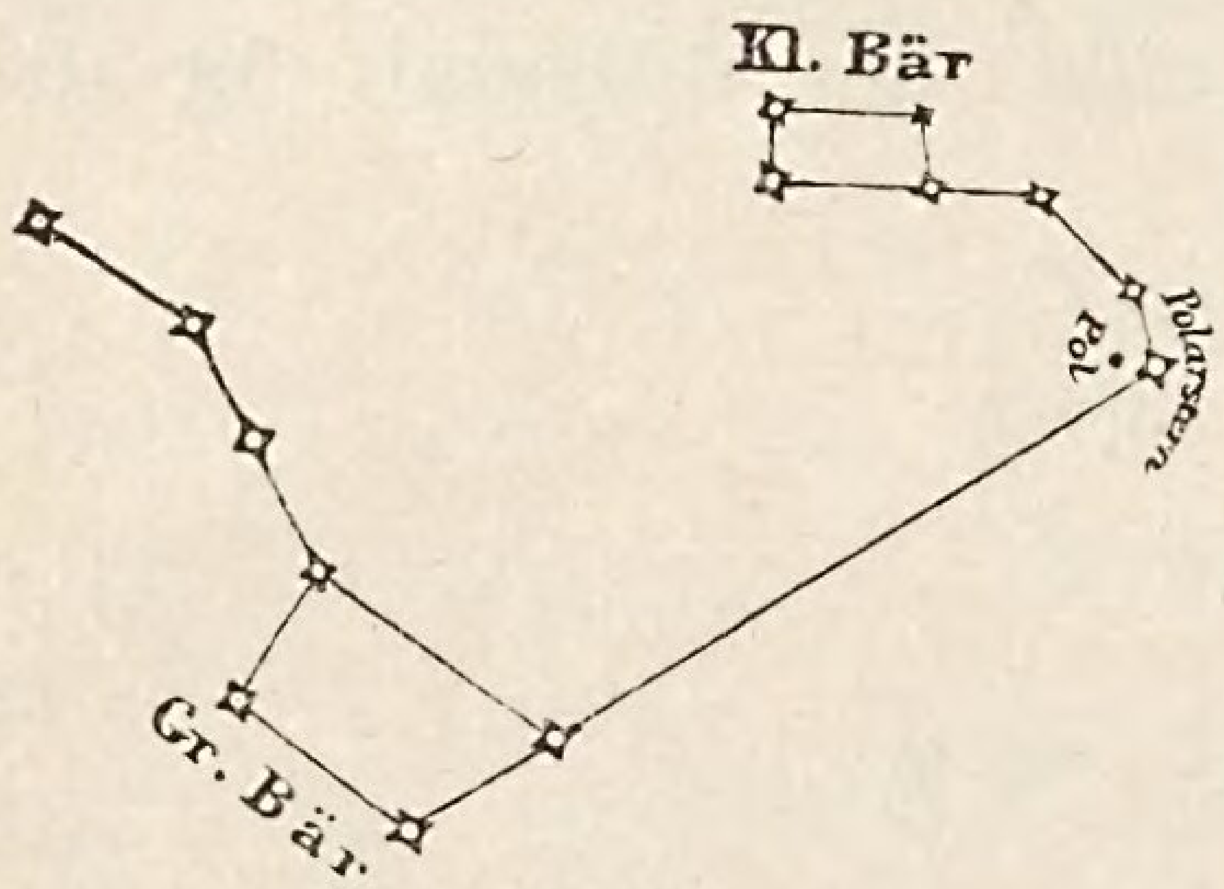


Fig. 91.

Die geographische Breite ist der Polhöhe gleich.

Diese soeben ausgesprochene Wahrheit läſst uns auch Figur 89 S. 81, durch welche wir die Krümmung der Erdoberfläche zu erkennen Gelegenheit hatten, einsehen. Die Breite von B sei φ_1. Nun steht $Bb \perp BZ$ und die verlängerte Linie $P_1B \perp QZ$, folglich ist $\sphericalangle bBP_1 = \sphericalangle \varphi_1$. In gleicher Weise läſst sich darthun, daſs $\sphericalangle kKP_2 = \varphi$ ist. Bei Q fällt Horizont und Polhöhe in eine Gerade zusammen, die Differenz zwischen beiden ist Null. Die geographische Breite für $N = 90^0$. Nn und NP stehen gleichfalls 90^0 auseinander. Somit bietet die Bestimmung der geographischen Breite keine Schwierigkeit dar. Es ist jedoch wohl zu beachten, daſs der Polarstern, wie Figur 91 zeigt, im Nordpol selbst nicht weilt, sondern sich nur in unmittelbarer Nähe desselben befindet. Er, wie der kleine und groſse Bär umkreisen samt dem Firmament den Weltpol. Ihre Bahnen kann man von B aus vollständig am Himmel sehen, sie gehören zur Kategorie der Zirkumpolarsterne, der Fixsterne, welche beständig über dem Horizont des Beobachters weilen. Der Punkt s (Fig. 92) der Sternbahn ss' heiſst die obere und die Stelle s' die

untere Kulmination des Sternes s. Der Meridianbogen $ss' = Ps + Ps'$ ist der sphärische Diameter der Sternbahn. So sind die Bogen Ps und Ps' Radien und deshalb einander gleich. Beziehen wir die Punkte P, s und s' auf den Horizont h, so ist Ph die Polhöhe, hs die obere und hs' die untere Kulmination des Sternes s. Für hs können wir auch schreiben $Ph + Ps$ und für hs' auch $Ph - Ps$, da $Ps' = Ps$ ist. Addieren wir die Kulminationen in den beiden Schreibweisen, so erhalten wir die Gleichung

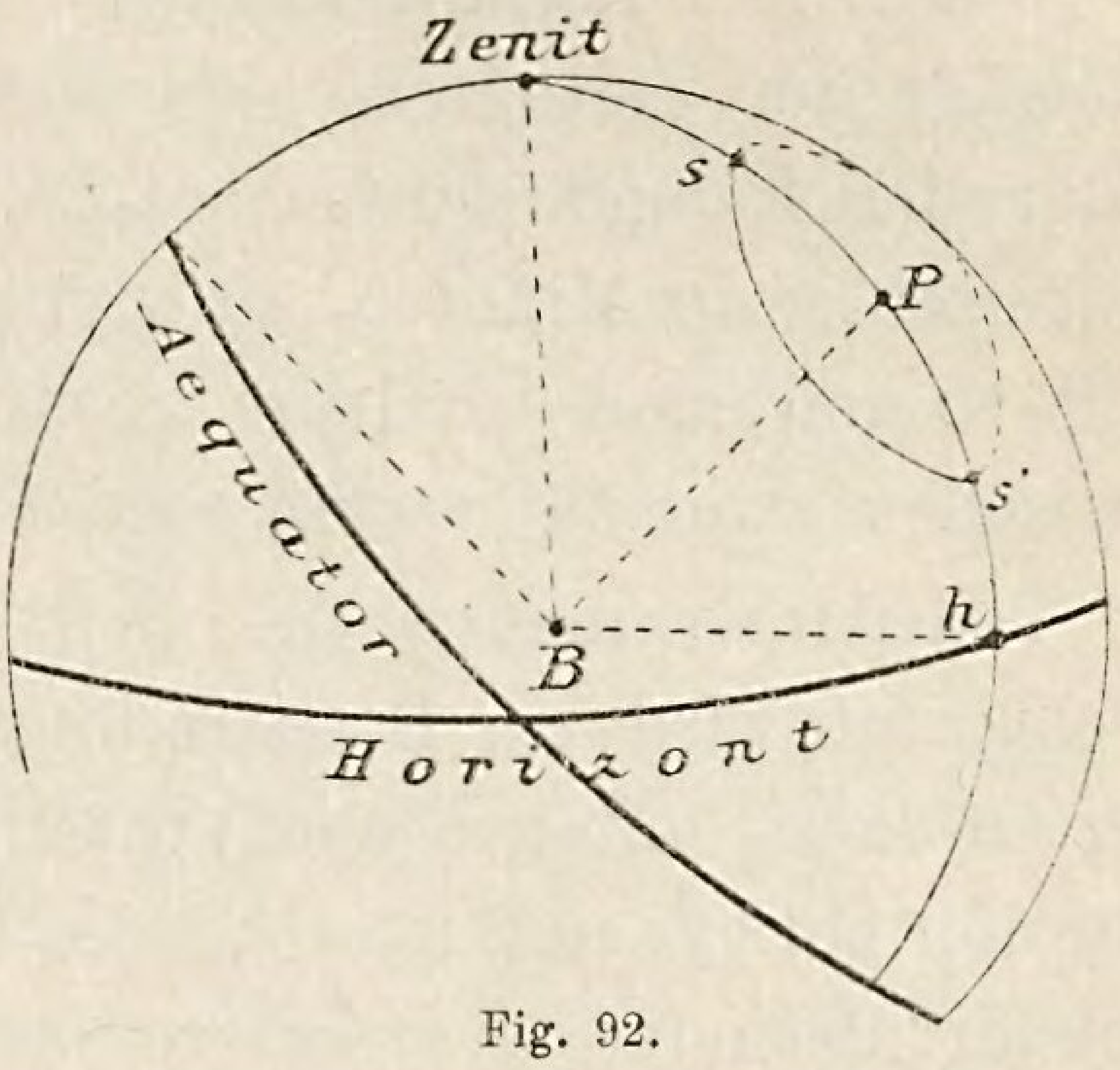


Fig. 92.

$$(Ph + Ps) + (Ph - Ps) = hs + hs'$$

und daraus $$2\,Ph = hs + hs'$$

und durch Division mit 2

$$Ph = \tfrac{1}{2}(hs + hs'),$$

welch letzte Gleichung in Worten lautet:

Die halbe Summe der Höhen eines Zirkumpolarsternes in seinen beiden Kulminationen gibt die Polhöhe.

Hiemit wäre auch das Mittel gefunden, welches uns die Erforschung der Polhöhe und damit der geographischen Breite auf das Genaueste gestattet. Wie steht es nun um die Bestimmung der geographischen Länge?

Zunächst sagen wir, Orte, die zu gleicher Zeit Mittag haben, müssen in ein und derselben Richtung nach S. 76 und Fig. 84 oder unter demselben Mittagskreis liegen, sie sind der Reihe nach unter einen Meridian von Süden nach Norden zu bringen. So gehören wiederum Orte, welche früher oder später, aber doch zu gleicher Zeit Mittag haben, unter einen Meridian. Die Entfernung der Orte nach Osten oder Westen fällt, wie schon S. 81 dargethan wurde, mit dem Unterschied der Zeit zusammen. Wie es sich bei der geographischen Breite um die Polhöhe handelt, so bei der Bestimmung der geographischen Länge um den Zeitunterschied. Um die Erdkugel denkt man sich 360 Meridiane gelegt, die werden in einem Tage von der Sonne scheinbar durchschritten. Zu 360 Graden bedarf sie 24 Stunden, zu einem Grad nur 4 Minuten Zeit. Wenn also zwei Orte nicht zu gleicher Zeit Mittag haben, sondern ihre Mittage

4 Minuten Zeitunterschied Tag für Tag aufweisen, so müssen sie 1 Längengrad auseinander liegen.

Auf 1^{min} Zeitunterschied*) treffen 15′ Unterschied im Bogen. Beträgt der Zeitunterschied δ^{min}, so ist der Unterschied im Bogen oder der Längenunterschied $\lambda = 15\,\delta$. Kennt man somit den Zeitunterschied in Minuten, so bedarf es nur der Multiplikation desselben mit 15 und man erhält hiedurch den gewünschten Längenunterschied zwischen zwei zu bestimmenden Punkten auf der Erde.

Meſsinstrumente für den Zeitunterschied sind Uhren. Der Telegraph wird zur Bestimmung des Zeitunterschiedes zwischen zwei Orten dabei mit groſsem Vorteil benützt. Der Beobachter der einen Station notiert sich nämlich die Uhrzeit, in welcher er das elektrische Signal absendet, der andere beobachtet die Uhrzeit, in welcher er es wahrnimmt. Die Differenz δ dieser Uhrzeiten multipliziert mit 15 gibt den gewünschten Längenunterschied λ. Durch diese Methode, wenn sorgfältig verfahren wird, gelangt man zu sehr genauen Resultaten. Um Längenbestimmungen zur See zu erhalten, wendet man genau gehende Uhren oder Chronometer an. Diese Zeitmesser werden für den Meridian irgend einer Sternwarte, z. B. den von Greenwich, reguliert. Für jeden Augenblick geben sie die Greenwicher Zeit an. Ebendeshalb hat man nur die Zeit des Ortes, da man sich gerade befindet, mit der des Chronometers zu vergleichen und die Differenz der Zeit in Minuten führt durch Multiplikation mit 15 auf die Längendifferenz. Liegen zwei Orte, die in ihrer Längendifferenz zu bestimmen sind, weit auseinander oder sind sie durch Meere getrennt, so wendet man statt der irdischen, himmlische Signale, als da sind Sternbedeckungen, Verfinsterungen u. dgl., an. In beiden Orten beobachtet man den Moment, in welchem derartige Erscheinungen am Himmel eintreten und notiert die Zeit. Aus der Differenz, welche man aus den Notizen erhält, leitet man den Längenabstand beider Orte ab.

Die Orte, welche in der Mittagszeit voraus sind, liegen östlich, die nachfolgen, westlich. Hat z. B. München um $36^{min}\ 57^{s}$ früher Mittag als Paris, so liegt erste Stadt um $15 \times 36{,}95$ Minuten im Bogen $= 9^0\ 14'\ 15''$ östlicher als die andere. Durch eine Reise um die Welt in östlicher Richtung gewinnt man, in westlicher Richtung

*) Tag, Stunde, Minute, Sekunde bezeichnet man durch d (dies), h (hora), min (pars minuta prima), s (pars minuta secunda). $1^d = 24^h$, $1^h = 60^{min}$, $1^{min} = 60^s$.

dagegen verliert man einen Tag. Segelt z. Ex. ein Schiff von Lissabon durch die Strafse von Gibraltar, das mittelländische Meer, den Kanal von Suez und so immer weiter ostwärts, und ist der Chronometer auf Lissaboner Zeit eingestellt, so ergibt sich mit der örtlichen Zeit und dem Chronometer Grad für Grad ein Unterschied von 4 Minuten in der Zeit. Kommt das Schiff auf seinem Cours bei den Raliks-Inseln an, so hat es sich 180 Grad von der Heimat entfernt, örtliche Zeit und Chronometer differieren um $180 \times 4^{min} = 12^h$. Kehrt es endlich, indem es die östliche Richtung beibehält, wieder in seine Heimat zurück, so kommt es im Westen von Lissaben an. Nach seiner Rückkehr hat es die Erde umsegelt oder aber 360 Grade durchlaufen und damit schliefslich $360 \times 4^{min} = 24^h = 1^d$ gewonnen. Während man in Lissabon z. B. den 4. Mai schreibt, zählt die Schiffsmannschaft den 5. Mai. Nimmt dagegen ein Schiff seinen Cours von Lissabon westwärts, so wird es östlich von Lissabon durch die Strafse von Gibraltar nach seiner Umschiffung der Erde heimkehren. Auf diesem Cours verliert es Grad um Grad 4^{min} an Zeit, welcher Umstand zu einem endlichen Zeitverlust von $360 \times 4^{min} = 1^d$ führt. Statt des 4. Mai wird auf dem Schiff der 3. Mai als Datum gelten. Um aber mit der gewohnten Rechnung in der Heimat sich in Einklang zu wissen, mufs man bei einem westlichen Cours einen Tag in der Zählung überspringen, im anderen Fall einen Tag doppelt zählen. Gewöhnlich geschieht dies 180 Grad von Greenwich entfernt, an dem Meridian, der von der Beringstrafse aus durch den grofsen Ozean an den Viti- und Freundschaftsinseln vorübergeht. Dieser Meridian führt den Namen Datumsgrenze.

Tabelle III enthält die geographischen Längen und Breiten wichtiger Orte.

Die Gröfsenbestimmungen und Gröfsenverhältnisse der Erde.

Die Erde ringsum zu messen, ist eine Unmöglichkeit. Ein derartiges Unternehmen ist auch nicht notwendig, um über Gröfsenverhältnisse der Erde aufgeklärt zu werden. Wissen wir nur einen Teil eines gröfsten Kreises nach Graden im Längenmafs zu bestimmen, so ergibt sich aus diesem kleinen Stück alles andere vermittelst der stereometrischen Lehrsätze von selbst. Die Gradmessung zwischen zwei Orten unter einem Meridian wird durch die Bestimmung nach ihrer Polhöhe und durch direkte Messung ihres Bogenabstandes mit der Mafseinheit, dem Kilometer, vorgenommen. Gelangt man zu α^0

Bogenunterschied der beiden Orte und zu k^{km} Länge des Meridianbogens von α^0, so ist

$$k : 2 r \pi = \alpha : 360$$

und
$$r = \frac{180}{\alpha \pi} \cdot k^{km},$$

wodurch auch der Erdradius bestimmt ist.

Stützen wir unsere Berechnung auf eine Gradmessung, die zwischen Berlin (Polhöhe 52° 31′ 19,06″) und Strauch-Groſsberg (Polhöhe 51° 23′ 7,72″) ausgeführt wurde. Beide Orte liegen um 1° 8′ 11,34″ = 4091,34″ oder um 126,35745^{km} auseinander, so ist, wenn x den Umfang eines gröſsten Kreises bedeutet,

$$4091{,}34'' : 360^0 = 126{,}35745^{km} : x$$
$$x = 40000^{km} \; (40025{,}5^{km})$$

und
$$r = \frac{180^0 \cdot 126{,}35^{km}}{4091{,}34'' \cdot 3{,}1416} = 6370{,}26^{km}.$$

(Berechnet man den Umfang des Äquators nach der halben groſsen Achse $a = 6377^{km}$ (Tabelle II Anm.), so trifft auf einen Äquatorgrad 111,307^{km}.)

Durch die Differenz der Polhöhe zweier Orte, die auf einem und demselben Meridian liegen, vermögen wir ihre Entfernung in Kilometern zu berechnen; ingleichen auch die zweier Punkte, die auf gleichem Parallel vorkommen und deren Zeitunterschied oder geographische Länge bekannt ist. Zwei Beispiele mögen diese beiden Sätze erläutern.

1. Venedig und Leipzig liegen so ziemlich unter einem Mittagskreis, die geographische Breite von Venedig ist 45° 25′ 53″, die von Leipzig 51° 20′ 6″. Ihre Differenz ist 5° 54′ 13″ =21253″. Die Bogenlänge x gibt dann die Proportion

$$1^0 : 21253'' = 111{,}3^{km} : x$$
$$x = 657^{km}.$$

2. Eisenach und Altenburg sind sich in ihrer Entfernung vom Äquator gleich. Ihr Parallel ist 50° 59′, bei welchem auf einen Grad 70^{km} *) zu rechnen sind. Wenn nun Eisenach 28° östlicher Länge von Ferro sich befindet und Altenburg 30° 6′ 2″, so ist

*) $111{,}307^{km} . \cos 50^0\,59' = \lg 111{,}307 = 2{,}04652$
$+ \lg \cos 50^0\,59' = 0{,}79903 - 1$
$1{,}84555 = 70^{km}.$

ihre Differenz $2^0\ 6'\ 2'' = 7562''$ und ihre Entfernung im Längenmafs

$$1^0 : 7562'' = 70^{km} : x$$
$$x = 147^{km}.$$

Nun mufs zugestanden werden, dafs Entfernungsbestimmungen zweier Erdstellen von verschiedener Breite und Länge nach diesen Methoden nicht ausführbar sind. Hier schafft Mittel und Wege die sphärische Trigonometrie.

Wenn (Fig. 93) AA' den Äquator vorstellt und die Strecke LO zu berechnen ist, so sind in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck die Seiten OQ und LQ bekannt. Denn $LQ = \varphi$ und $OQ = \lambda$, dann ist die Länge LO nach S. 51

$$\cos c = \cos \varphi \cdot \cos \lambda.$$

Fährt von Lissabon ein Schiff nach der Mündung des Amassonas, welche unterm Äquator liegt, so ist seine Wegstrecke LO oder $\cos c$.

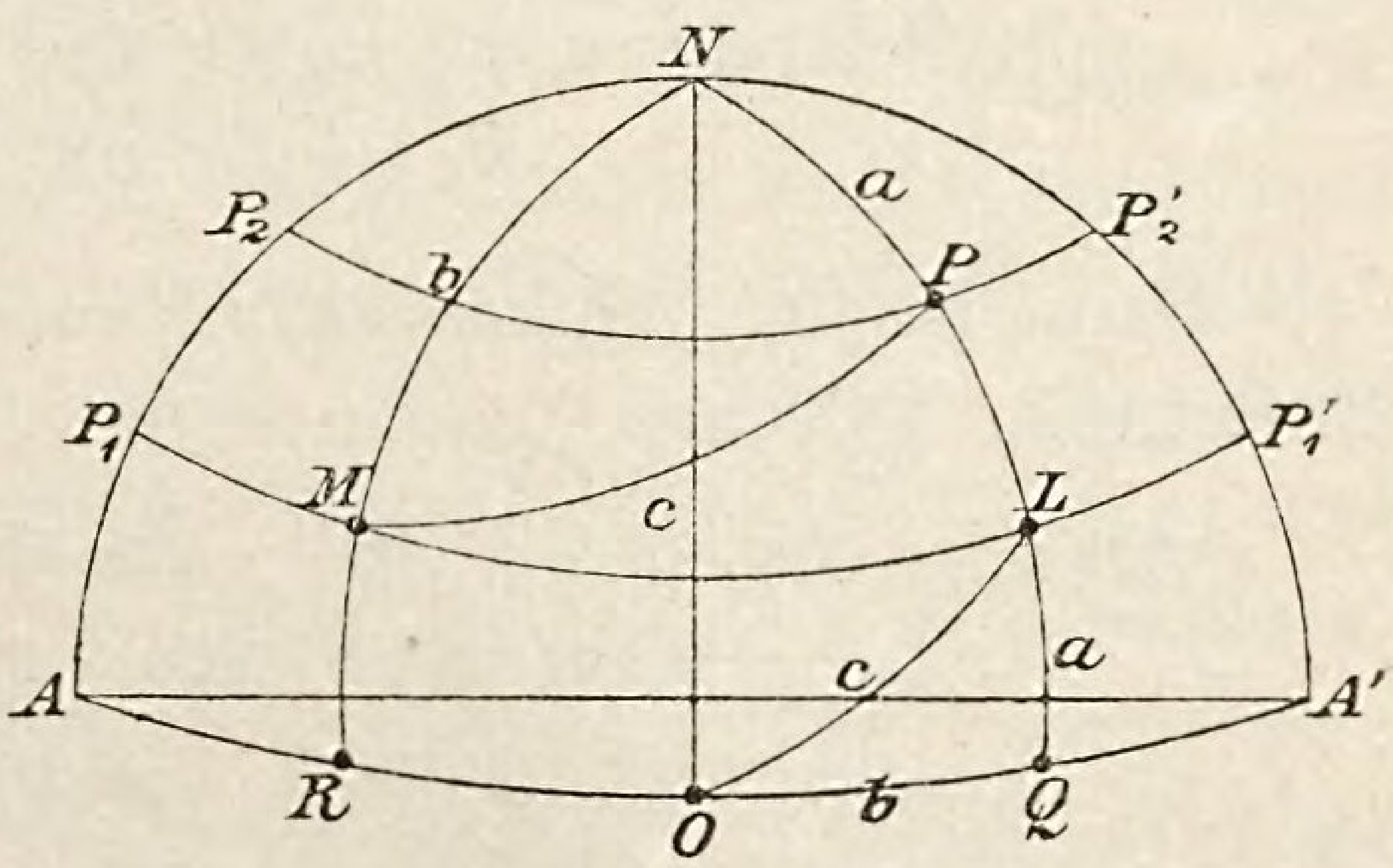


Fig. 93.

Nun ist die Breite von Lissabon $38^0\ 42'\ 24''$. Nehmen wir den Meridian von Lissabon, also NQ als den Anfangsmeridian, so ist die Länge des Bogens OQ $38^0\ 31'\ 15''$ und

$$\cos c = \cos 38^0\ 42'\ 24'' \cdot \cos 38^0\ 31'\ 15''.$$

Die Ausrechnung gibt für die Länge LO $52^0\ 22'\ 12''$ oder $5828{,}78^{km}$. Zu diesem Resultat gelangt man auch, wenn man den Ort L unter den Messingmeridian eines Erdglobus bringt, über dem Punkt L den Quadranten anschraubt und ihn gegen O hin legt. Sodann liest man auf ihm die Grade ab, welche die Entfernung zwischen L und O angeben. Diese Grade verwandelt man durch Multiplikation von $111{,}3^{km}$, da sie einem gröfsten Kreis angehören, in Kilometer. Ist die Wegstrecke von M und P (Fig. 93) zu berechnen, so gewahrt man, dafs weder M noch P auf dem Äquator zu liegen kommen und das sphärische Dreieck MNP ein schiefwinkliges ist, von dem die Seiten MN und PN bekannt sind.

Es ist aber NR der Meridian λ von M und $NQ = \lambda_1$ der von P. Sonach ist der Winkel $MNP = \lambda_1 - \lambda$. Es sei aber die Breite von $M = \varphi$ und die von $P = \varphi_1$, alsdann ist die Seite $NM = 90 - \varphi$ und die Seite $PN = 90 - \varphi_1$, mithin ist die Seite MP des sphä-

rischen schiefwinkligen Dreiecks oder die Wegstrecke MP nach der Kosinusregel S. 53 zu finden:

$$\cos c = \cos(\lambda_1 - \lambda)\sin(90 - \varphi)\sin(90 - \varphi_1) + \cos(90 - \varphi)\cos(90 - \varphi_1)$$

oder $$\cos c = \cos(\lambda_1 - \lambda)\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1.$$

Als erläuterndes Beispiel nehmen wir München und Petersburg. Die Koordinaten nach Tabelle III sind von

a) München $\varphi = 48^0\ 8'\ 20'$
$\lambda = 29^0\ 14'\ 14''$ östlich von Ferro;

b) Petersburg $\varphi_1 = 59^0\ 56'\ 30''$
$\lambda_1 = 47^0\ 58'\ 2''$ östlich von Ferro.

Dann ist der Winkel $MNP = \lambda_1 - \lambda = 18^0\ 43'\ 48''$ und die Entfernung zwischen München und Petersburg

$$\cos c = \cos 18^0\ 43'\ 48'' \cdot \cos 48^0\ 8'\ 20'' \cos 59^0\ 56'\ 30'' + \sin 48^0\ 8'\ 20'' \cdot \sin 59^0\ 56'\ 30''$$

$$x = \cos 18^0\ 43'\ 48'' \cdot \cos 48^0\ 8'\ 20'' \cdot \cos 59^0\ 56'\ 30''$$

$$y = \sin 48^0\ 8'\ 20'' \cdot \sin 59^0\ 56'\ 30''.$$

Die Berechnung ergibt für x den numerischen Wert 0,31655 und für y den 0,64460, für $x + y$ also 0,96115. Mithin ist

$$\lg \cos c = \lg 0{,}96115 = 0{,}9827912 - 1.$$

Dieser Logarithmus führt auf den Bogen von $16^0\ 1'\ 22''$ oder auf 1781 km.

Nun gilt es noch die Oberfläche und den Kubikinhalt der Erde kennen zu lernen. Nach den Lehrsätzen der Stereometrie S. 34 ist

$$O = 4\pi r^2$$

was in runder Zahl 510 Mill. qkm ausmacht.

Für den Kubikinhalt haben wir die Gleichung S. 35

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

welche sich auf 1,08 Bill. ckm entziffert.

Die Berechnung des Flächeninhaltes einzelner Teile der Kugeloberfläche (der Länder) kommt später.

B. Projektionslehre.

I. Kugelbilder.

Der Globus.

Kugelförmig ist die Erde, ihr entsprechendes Abbild ist dann eine Kugel. Der Erde Antlitz zieren Meere, Seen und Flüsse, Höhen und Tiefen. Der Mount Everest ragt über dem Meeresspiegel 8840^{m} empor. Seine Überhöhung darf im Abbild nimmermehr fehlen. Setzen wir den Durchmesser der künstlichen Erdkugel oder des Globus zu 1^{m}, so trifft auf den Mount Everest $0{,}7^{mm}$. Mittelgebirge von 1500^{m} Seehöhe müssen sich mit $0{,}1^{mm}$ begnügen. Welchem Künstler möchte es gelingen derlei Höhenunterschiede auf einer Kugel aufzutragen? Keinem und sei er auch der geschickteste. Wir müssen von einer richtigen plastischen Wiedergabe der Überhöhungen, da sie ins Reich der Unmöglichkeiten gehört, absehen und uns darauf beschränken, sie durch konventionelle Zeichen auszudrücken. Damit fallen auch die grofsen Kugeldimensionen weg, die Globen können in handlicherer Gröfse angefertigt werden. Sie überzieht man zunächst mit dem Netz der Mittags- und Parallelkreise behufs des richtigen Auftragens von Orten, Seen, Flüssen, Landes- und Meeresumrissen. So ein Netz trotz seiner bedeutenden Reduktion ist stets dem Netz der Wirklichkeit ähnlich, so dafs jedweden Verzerrungen in den Ländergemälden vorgebeugt ist. Länder im Detail zu geben, dazu bietet der Globus nicht hinreichend Raum, auf Einzelbilder müfsten wir verzichten, würden sich nicht andere Hilfsquellen für die bildliche Wiedergabe der Erde und ihrer Länderräume erschliefsen. Dieselben bieten sich in der Papierebene, Zeichenebene, Bildfläche, Kartenebene, Tafel genannt, dar; die Kugel, sie müssen wir verlassen. Zugestanden mufs freilich werden, dafs es nicht möglich ist eine Kugel oder auch Kugelflächen in der Ebene in Übereinstimmung mit ihrem Original darzustellen. Hier heifst es eben, sich bescheiden und die gröfstmöglichste Annäherung an das Original anzustreben suchen. Um diese zu erzielen war man schon seit Hipparchs Zeiten (ca. 150 v. Chr.) darauf bedacht; Regeln zur Erstellung der geographischen Koordinaten, deren Gesamtheit ein Liniensystem

oder ein (Kugel-) Gradnetz bildet, ausfindig zu machen. Von den verschiedenen Entwurfsarten der Kugel- oder Zonen-Gradnetze handelt die *Projektionslehre*. Demzufolge hat uns dieselbe mit den mathematischen Grundsätzen, nach welchen ein Kugel- oder Zonen-Gradnetz in der Ebene zu konstruieren ist, bekannt zu machen.

Die Projektions- oder mathematischen Entwurfsarten scheiden sich in zwei Gruppen, nämlich:

in *perspektivische* und

in *nicht perspektivische Projektionen*.

Die gebräuchlichsten Projektionen beider Gruppen sollen in den folgenden Kapiteln abgehandelt werden.

Die perspektivischen Projektionen.

Der Standort des Zeichners.

Jeder Gegenstand, der von einem Blick aus der Ferne zur Aufnahme bestimmt ist, mufs von einem gewissen Ort aus ins Auge gefafst werden. Dieser Ort ist der *Augen- oder Gesichtspunkt* des Zeichners. Alle derartigen Abbildungen, deren Konstruktion sich auf einen Gesichts- oder Augenpunkt aus der Ferne beziehen, werden perspektivische Abbildungen genannt.

Denkt man sich den Zeichner inmitten der Sonne befindlich, so sieht er aus weiter Ferne unsere Erde, sie wird ihm ob der weiten Strecke so klein vorkommen, dafs alle vom Auge ausgehenden Sehstrahlen zu einander parallel laufen (Fig. 94). Ein Gradnetz diesem fernen Standort entsprechend, liefert die *orthographische Projektion*.

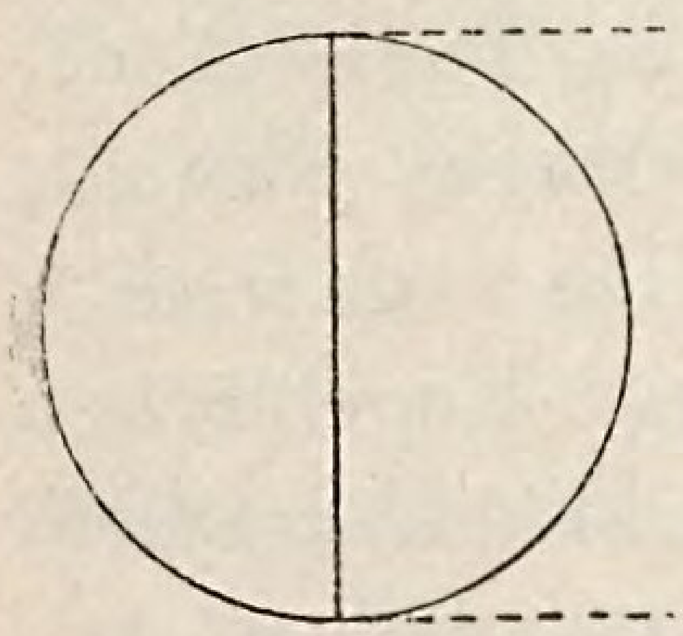


Fig. 94.

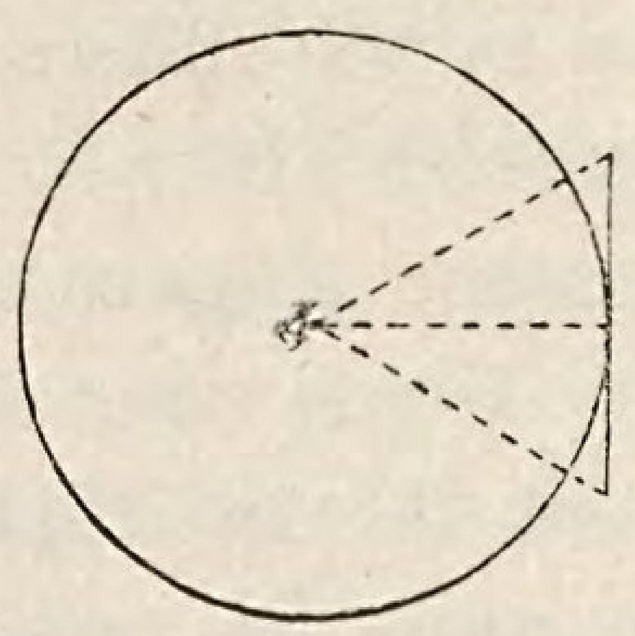
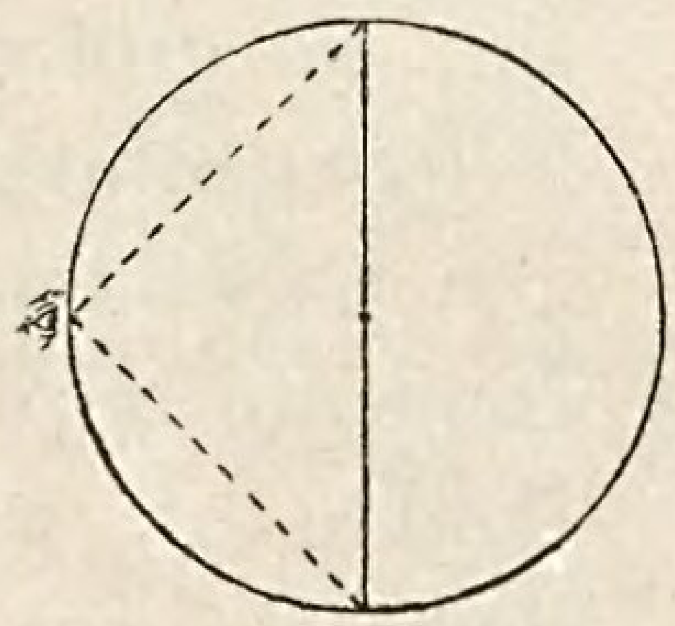


Fig. 95.

Dem Himmelsgewölbe ähnlich, müssen wir uns die Erde vorstellen, wenn wir das Auge des Beobachters in ihr Zentrum verlegt denken (Fig. 95). Nach innen seien die Länderumrisse gekehrt und vom Mittelpunkt aus geschieht deren Aufnahme. Die Sehstrahlen sind dann nichts anderes als die Radien dieser Hohlkugel. Ist die Länge der Zeichenfläche einem Radius

gleich, so eignet sich diese Tafel zur Aufnahme eines Sechstels der Erdoberfläche. Durch die zentrale Projektion ist es möglich die Kugelfläche auf sechs Würfelseiten zu übertragen.

Verlegt man das Auge an die Erdrinde selbst und zwar stets diametral dem Punkte gegenüber, der als Kartenmittelpunkt zu gelten hat, so bekommt es nach diesem Aufnahmspunkt an der Erdschale für jede Aufnahme seinen bestimmten, festen Platz. Deshalb wird diese Entwerfungsart nach dem griechischen Worte *στερεός* (fest) stereographische Projektion genannt (Fig. 96). Das Auge sieht von diesem Punkt aus mehr als die Hälfte der Erde.


Fig. 96.

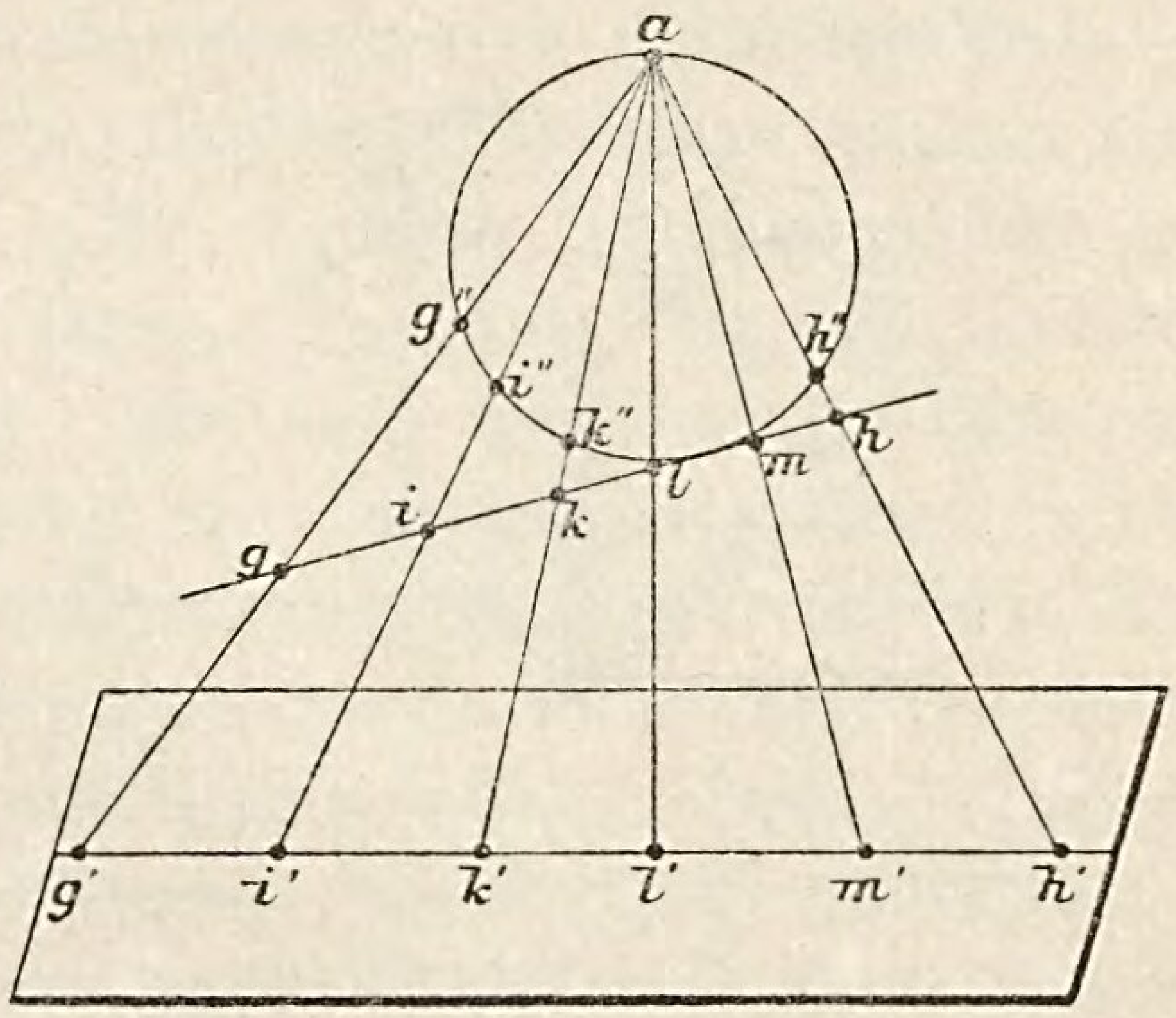


Fig. 97.

Ist nun *a* der Augenpunkt und die Gerade *gh* (Fig. 97) wäre auf eine Ebene zu projizieren, so visiert man über *h* nach *h'* und über *g* nach *g'*. Verbindet man *g'* mit *h'*, so hat man die Projektion von *gh*. Die perspektivische Abbildung einer Geraden auf einer Ebene ist wieder eine Gerade. Sind nun *i, k, l, m, n* Punkte, welche auf der Geraden *gh* liegen, so fallen die von *a* ausgehenden Projektionsstrahlen *ai, ak, al* . . . sämtlich in die Ebene, welche von der Tafel in einer Geraden *g' h'* geschnitten wird. Daher fallen die Punkte *i', k', l', m'* in diese Gerade *g' h'*. Ist ein Kreis zu projizieren, und verbindet man den Augenpunkt, welcher aufserhalb der Kreisfläche liegt, mit einer Reihe von Peripheriepunkten, so bildet die stetige Folge dieser Verbindungslinien eine Kegelfläche (Fig. 40 S. 26). Je nachdem die Schnittfläche zum Kegel sich befindet, erhält man als Projektion des Kreises einen Kreis, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel. Befindet sich jedoch das Auge im Kreise selbst, so fallen die Projektionstrahlen wie bei der geraden Linie (Fig. 97) in eine Ebene, welche die Tafel in einer Geraden schneidet. Der unendlich entfernte Punkt dieser Geraden ist die Projektion von *a*. Denken wir uns ferner das Auge in eine un-

endliche Ferne gerückt, so wird eine Vereinigung der Sehstrahlen zur Unmöglichkeit. Alsdann laufen sie parallel zu einander.

Die orthographische Projektion nimmt die Sehstrahlen normal oder rechtwinklig zur Bildfläche an (Fig. 98). Hiebei ergeben sich folgende Sätze:

1. Die Projektion einer geraden Linie ist wieder eine gerade Linie und zwar von gleicher Länge *c' g'* wie die Linie *c g* selbst, wenn diese parallel mit der Bildfläche läuft; kleiner als die Linie *d g*, wenn diese gegen die Bildfläche geneigt ist und zwar um so kleiner wird sie, je gröfser der Neigungswinkel ist. Die Projektion der Linie *e g* wird zum Punkte *g'*, weil sie senkrecht zur Bildfläche steht. Bei den Flächen gelten dieselben Gesetze. Parallel zur Bildfläche wird die projizierte Ebene dem Original an Gröfse gleich, verkürzt erscheint sie in geneigter Lage, zur Linie ist sie geworden, wenn die Ebene sich senkrecht zur Bildfläche befindet. Vergleiche Fig. 98 *a f h b* mit *a' f' h' b'* und *a i k b* mit *a' i' k' b'* und endlich die Ebene *a l m b* mit der Linie *a' b'*. Bilden die Ebenen Kreisflächen, so projiziert sich der Kreis *a e b* in gleichen nur als die Linie *a' b'*, welche dem Diameter des zu projizierenden Kreises *a b* entspricht. Als Kreis erscheint in der Abbildung nur die Kreisfläche *a c b*, da sie parallel zur Ebene *E N* liegt. Die Kreisebenen, welche zu ihr geneigt sind, projizieren sich als Ellipsen, deren grofse Achse mit dem gemeinschaftlichen Durchmesser *a b* übereinstimmt und deren halbe kleine Achse in der Projektion des zur Ebene geneigten Radius besteht. Je gröfser der Neigungswinkel ist, desto flacher wird die Ellipse, desto mehr nähert sie sich der geraden Linie. Dem Kreise kommt sie beinahe gleich bei geringem Neigungswinkel. In der Abbildung ist *a' c' b'* ein Kreis, eine Ellipse bildet *a' d' b'* mit der

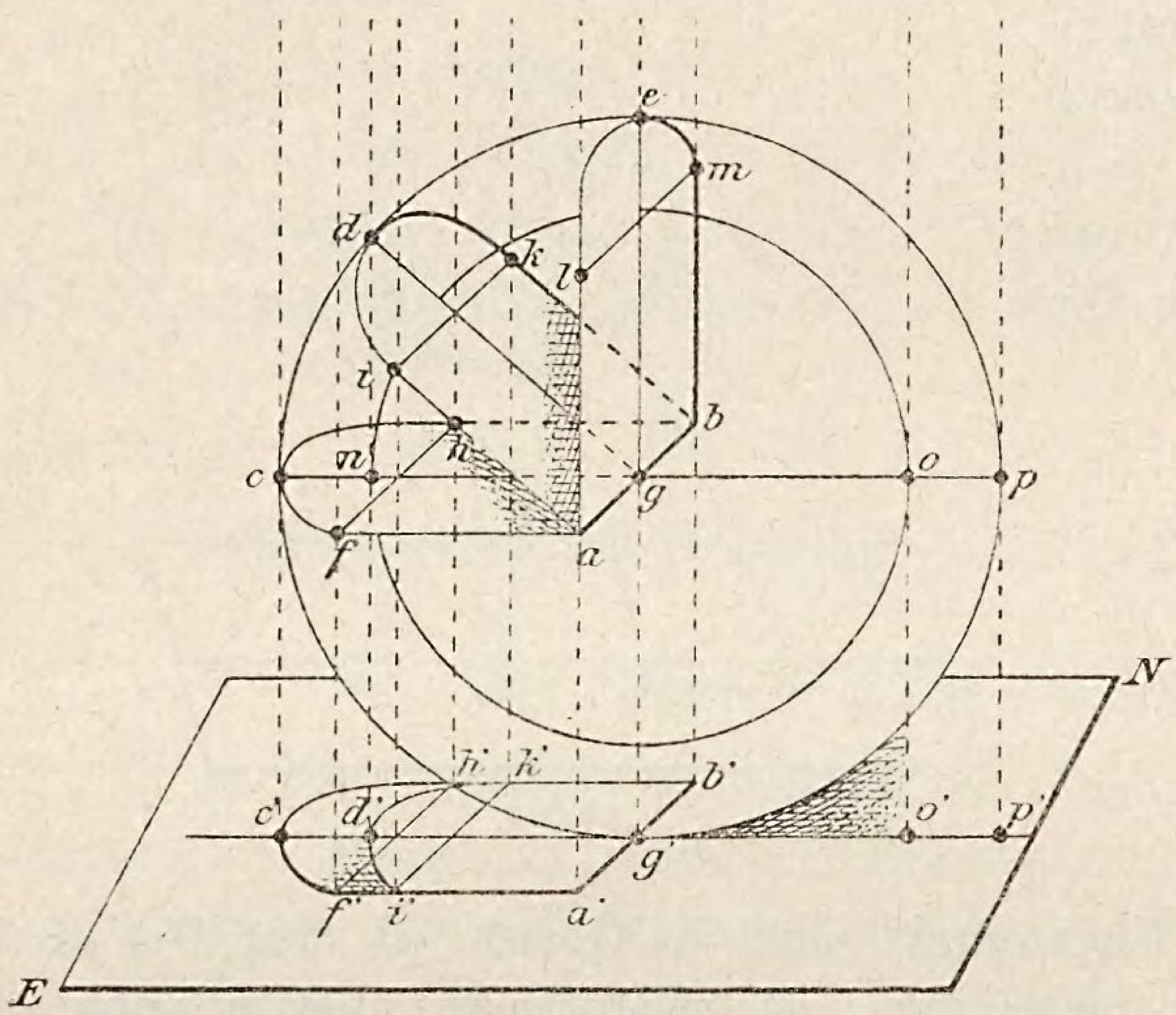


Fig. 98.

halben grofsen Achse $a'g'$ und der halben kleinen Achse $d'g'$. Die Kreisflächen cep und no fallen in die Ebenen der Projektionsstrahlen und projizieren sich deshalb auf der Ebene EN als Gerade und zwar als die Linien $c'p'$ und $d'o'$. Die Projektionsstrahlen eines horizontalen Kreises oder aber um eine Kugel herum bilden in ihrer Gesamtheit eine Cylinderfläche.

Der Mittelpunkt des Gradnetzes.

Für den Zeichner ist ferner zu wissen nötig, welche Erdstelle er als Kartenmittelpunkt für seinen Entwurf zu behandeln hat. Augen- und Kartenmittelpunkt haben aber stets in einer solchen Geraden, welche die kürzeste von allen anderen vorkommenden geraden Projektionsstrahlen ist, zu liegen. Es kann aber jede Erdstelle als Kartenmittelpunkt figurieren. Hat einer der Pole den Kartenmittelpunkt zu behaupten, so bildet der Äquator oder auch ein Parallelkreis den äufseren oder Begrenzungskreis der Karte. Wird ein äquatorialer Ort zum Mittelpunkt der Karte gewählt, so übernimmt ein Meridian im Abstand von 90 Grad von diesem Orte die Begrenzung. Dieser Meridian ist zugleich dessen Horizont, der durch die beiden Pole geht. Bei einem Ort, der weder im Pol noch unter dem Äquator sich befindet, schneidet der mathematische Horizont, der für ihn den Begrenzungskreis bildet, die Erdkugel nicht längs eines Parallel- oder Meridiankreises, sondern schräg hindurch im Abstand von 90^0 vom Oberflächenmittelpunkt. Die andere Erdhalbe, welche durch einen solchen Horizont abgetrennt wird, enthält den Antipodenpunkt als ihren sphärischen Mittelpunkt, der auf der Fläche zum Mittelpunkt der Karte der Antipoden wird. Hiernach unterscheidet man drei Arten von Entwürfen: die Polar- oder Äquatorial- (Fig. 99), Meridian (Fig. 100) und Horizontalprojektion (Fig. 101). Da jeder

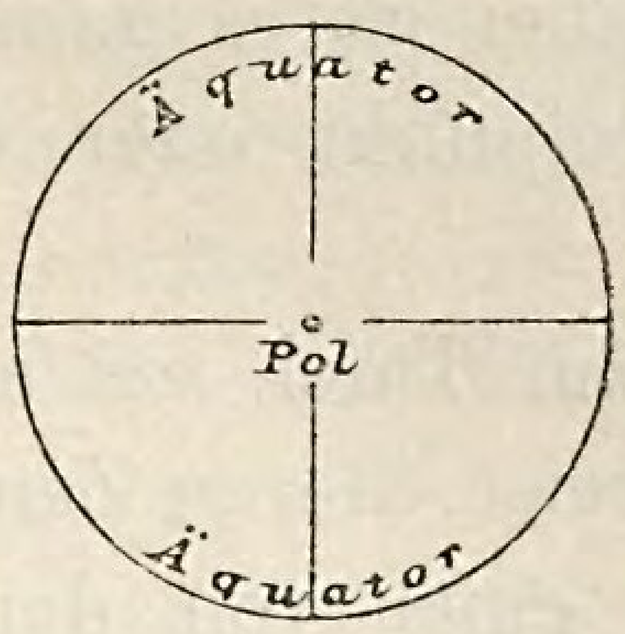


Fig. 99.

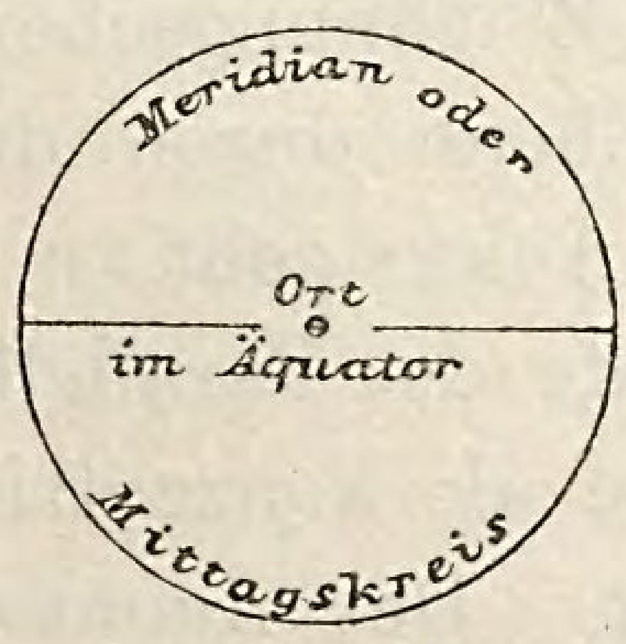


Fig. 100.



Fig. 101.

dieser genannten Entwürfe von drei Standorten oder Gesichtspunkten bethätigt werden kann, so gibt es drei Polar- oder Äquatorial-, drei Meridian- und drei Horizontalprojektionen, in Summa neun perspektivische Gradnetz - Entwürfe. Nun weifs man aus der

Erfahrung, dafs nicht jede dieser neun Arten vorteilhafte Abbildungen zuläfst und deshalb wäre es nicht gut zu heifsen, sie samt und sonders zur Sprache zu bringen. Beschränken wir uns darum auf die gebräuchlichsten Projektionsarten.

Polar- oder Äquatorialprojektion.

Der Pol befindet sich im Zentrum, der Äquator oder ein Parallel grenzt die Karte ab. Ein abgelöster Netzüberzug von einer Halbkugel würde in die Ebene ausgebreitet (Fig. 102), so gut dies eben möglich ist, zu erkennen geben, dafs bei der Polarprojektion sich die Meridiane als gerade, strahlenförmig vom Pol auslaufende Linien und die Breitenkreise sich als konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt eben der Pol ist, darstellen. Die Winkel, welche die Meridiane in der Ebene untereinander bilden, sind dann ihren Längenunterschieden gleich.

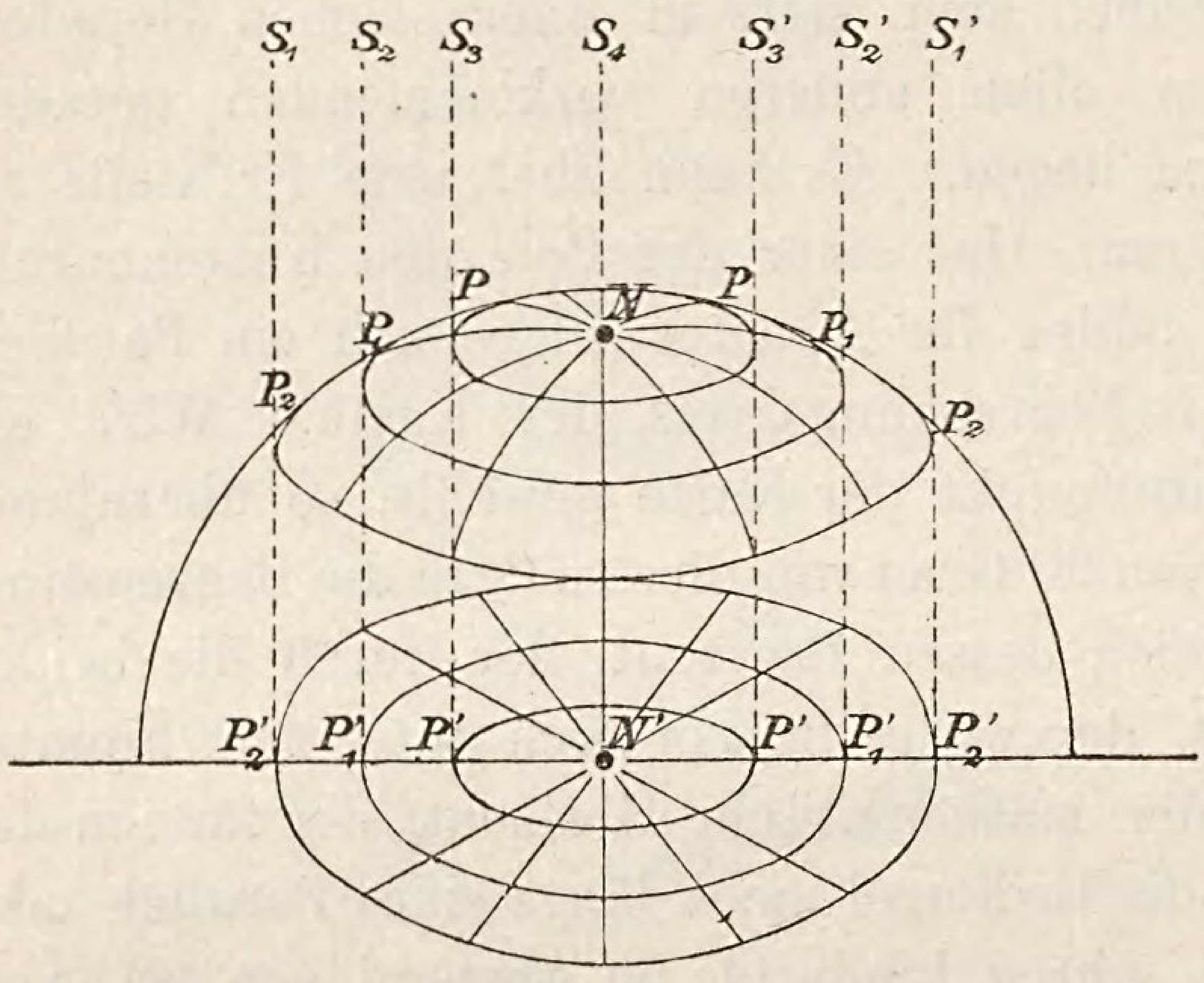


Fig. 102.

Orthographische Polarprojektion.

Die Projektionsstrahlen laufen bei dieser Projektion, welche Figur 102 perspektivisch gibt, zur Achse NN' parallel, senkrecht zur ihr befindet sich die Zeichnungsebene. Dabei ist es ganz und gar einerlei, ob diese Ebene durch den Mittelpunkt oder durch einen andern Punkt der Achse geht.

Ob der parallelen Lage der Parallelkreise zur Tafel, erscheinen sie in ihrer wahren Gröfse als konzentrische Kreise, deren Zentrum der projizierte Pol N' ist. Der Äquator oder einer von den Parallelkreisen kann als Begrenzungskreis gewählt werden. Die Radien der Breitenkreise sind nach S. 84, wenn der Äquatorradius r ist, $r \cos \varphi$. Über den Äquator hinaus kann sich die Abbildung nicht erstrecken, da die projizierten nördlichen Kreise die südlichen Parallelkreise auf der Zeichenfläche decken.

Die Meridiane geraten in die Ebenen der um die Kugel eine Cylinderfläche bildenden Projektionsstrahlen und werden darum innerhalb derselben zu geraden Linien, die sich im Pol gleich den Grofskreisen schneiden (vgl. Fig. 102 mit Fig. 61) und die mit einander Winkel einschliefsen, welche den Unterschieden der Länge, also λ, 2λ, 3λ ... gleichkommen. Der Pol als sphärischer Mittelpunkt aller Parallelkreise wird zum Mittelpunkt der Karte. Von ihm aus zu den Parallelen reichen die Meridianbogen, welche die sphärischen Radien der Parallelkreise sind und sich auf der Tafel vom Pol aus als gerade Linien abbilden. Der sphärische Radius NP (Fig. 102) erscheint auf der Ebene als die Gerade $N'P'$, der sphärische Radius NP_1 als die Gerade $N'P'_1$ und $N'P_2$ als $N'P'_2$. Mit diesen Strecken beschreibt man die konzentrischen Kreise oder die Parallelen in der Ebene. Vom Äquator gegen den Pol nehmen sie genau nach dem Kosinus der geographischen Breite oder in dem Verhältnis $1 : \cos\varphi$ ab. Werfen wir einen Blick auf Figur 98, so gewahren wir, dafs der Parallelradius gn mit der halben kleinen Achse $d'g'$ vom Meridian λ, wenn der Abstand $cd = \lambda$ vom Meridian acb gerechnet wird, kongruent ist. Sonach ist $r\cos\lambda = r\cos\varphi$.

Diesen Umstand benutzend, schlägt man mit dem Radius r einen Kreis, welcher den Äquator, der als gröfster Kreis jedem Meridian an Umfang gleichkommt, vorzustellen hat. An ihm trägt man Figur 103 die Längenunterschiede $\lambda, 2\lambda$... auf. Diese Teilpunkte verknüpft man mit P durch gerade Linien, die die Meridiane nach ihren wahren Längenunterschieden vorstellen. Projiziert man auf den Anfangsmeridian BP die Punkte 1, 2, 3, 4, so sind die Schnittpunkte 1', 2', 3', 4' die begehrten Radien für die zu erstellenden Parallelkreise. Denn $P1' = r\cos\lambda = r\cos\varphi$ u. s. f.

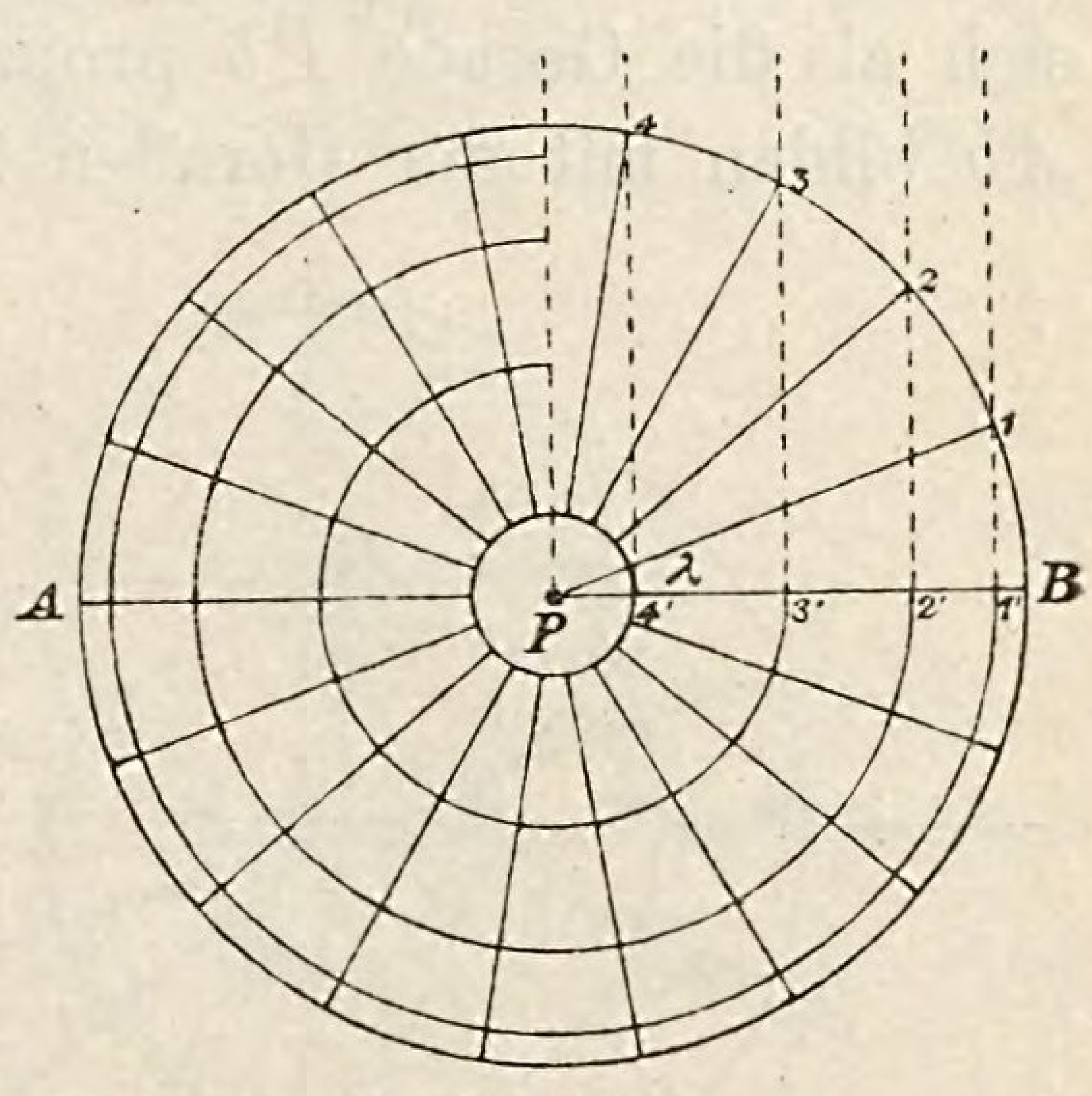


Fig. 103.

Die Werte für $r' = 1 \cdot \cos\lambda = 1 \cdot \cos\varphi$ enthält Tabelle IV.

Zentrale Polarprojektion.

Das Auge A (Fig. 104) befinde sich im Mittelpunkt der hohl gedachten Erdkugel. Dieselbe ruht inmitten der Peripheriefläche, welche das Gradnetz aufzunehmen hat und berührt sie mit dem

Meridian $caPa'c'$, der zur Kategorie der Kugelhauptkreise zählt. In dem Falle, dafs die Ebene eines Hauptkreises durch den Augenpunkt A geht, projiziert sich derselbe als eine gerade Linie. Verbindet man nämlich alle Punkte eines solchen Kreises mit dem Mittelpunkte der Kugel, so fallen die Verbindungslinien alle in eine Ebene und da der Durchschnitt einer Ebene mit einer Ebene immer zu einer geraden Linie wird, so ist die zentrale Abbildung eines gröfsten Kugelkreises eine gerade Linie. Während sich die Meridiane als gerade Linien abbilden, erscheinen die Parallelkreise infolge ihrer parallelen Lage zur Tafel als konzentrische Kreise, deren Radien die projizierten sphärischen Meridianbogen sind.

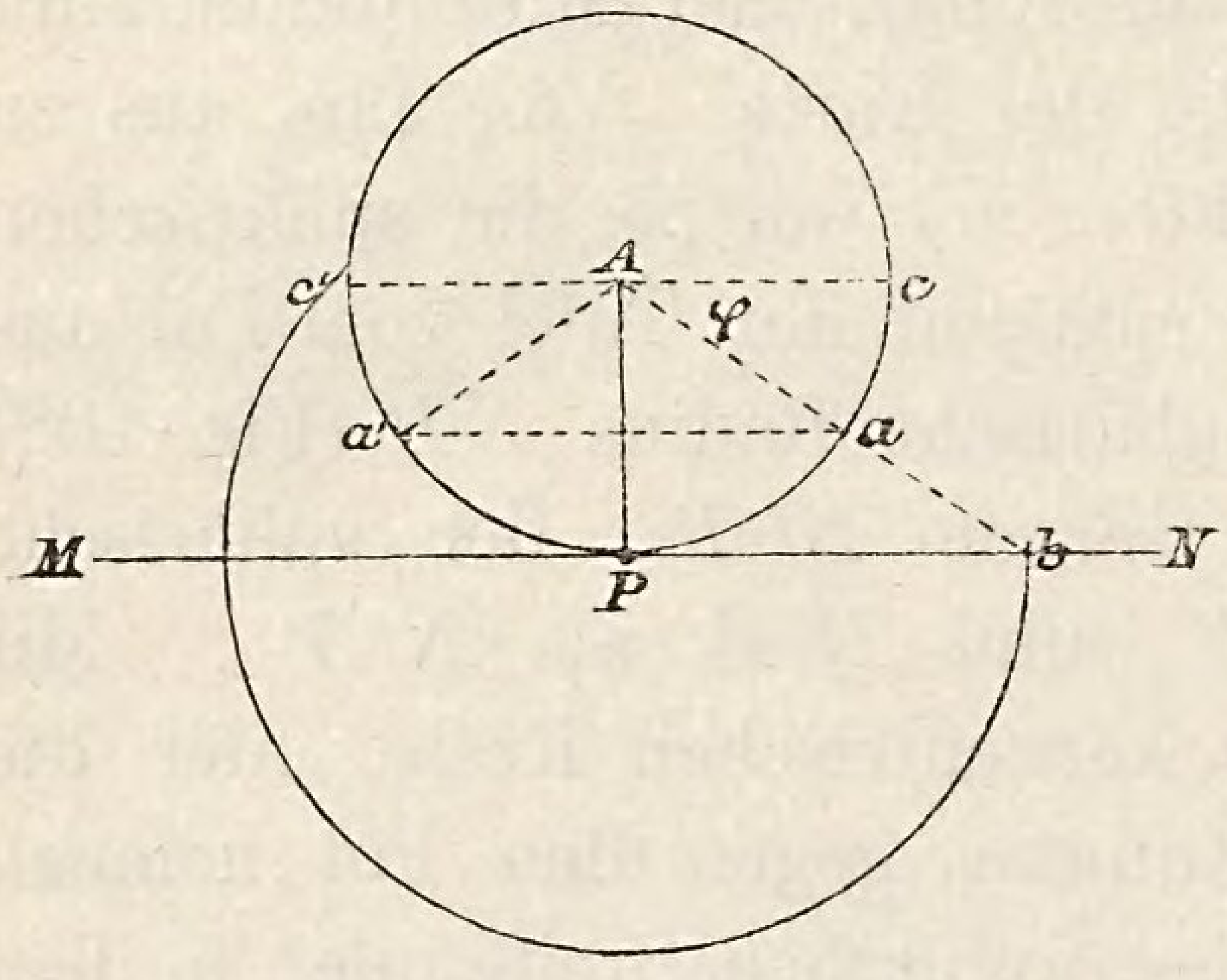


Fig. 104.

Der Pol P oder das sphärische Zentrum projiziert sich als der Punkt P, der den Mittelpunkt der Karte vorzustellen hat. Die Sehstrahlen Ac und Ac' laufen mit der Bildfläche parallel und können sie deshalb niemals treffen. Aus diesem Grund wird der sphärische Äquatorradius Pc unendlich und der Äquator selbst nicht darstellbar. Der Parallel aa' hat den sphärischen Radius Pa, der sich als die Gerade Pb projiziert. Die Projektionsstrahlen AP und Ab bilden mit der Geraden Pb ein rechtwinkliges Dreieck, dessen spitzer Winkel, bei A $90 - \varphi$ ist. Dann ist

$$Pb = r' = r \tan (90 - \varphi) = r \cot \varphi.$$

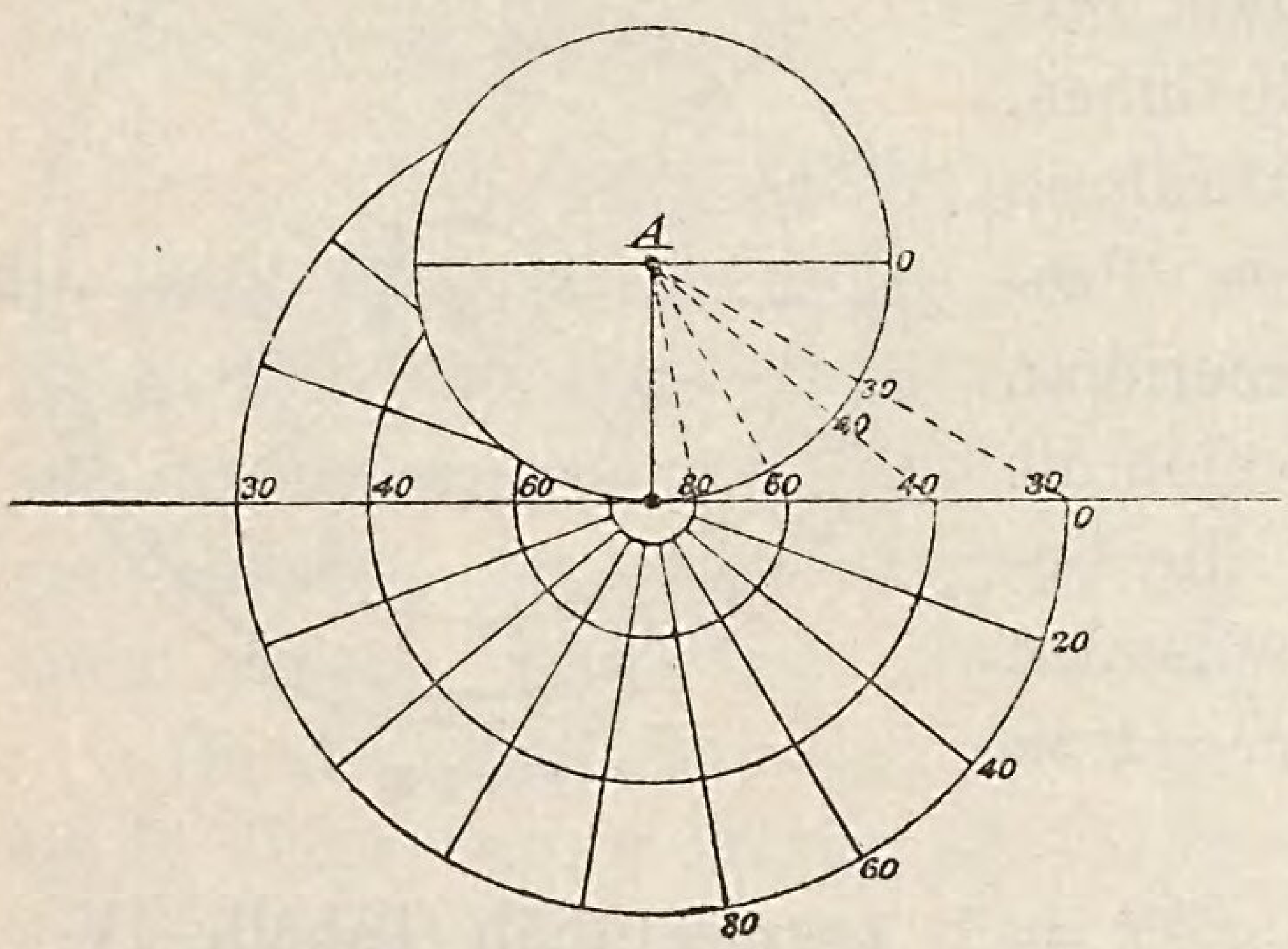


Fig. 103.

Die Werte $r' = 1 \cdot \cot \varphi$ enthält die Tabelle V.

Die Karte kann bis an den Äquator nicht ausgedehnt werden, da $Pc = r \cot o$ unendlich ist; einer von den Parallelkreisen mufs als Begrenzungskreis gewählt werden. Bei einer Polarkarte genügt jedoch die Ausdehnung bis an den 50. Parallel.

Inwiefern man auf dem Wege der Konstruktion zu dem Gradnetz gelangt, gibt Figur 105 zu erkennen.

Stereographische Polarprojektion.

Der Pol P (Fig. 106), der den Kartenmittelpunkt einzunehmen hat, ruht auf dem Zeichenpapier, das parallel mit dem Äquator läuft oder auch senkrecht zur Erdachse AP sich befindet. Diametral vom Pol P, im Gegenpol an die Erdrinde selbst gefestet, ist der Augenpunkt A. Der Meridian $AaPA$, der durch ihn hindurchgeht, wird auf dem Papier zu der unbegrenzten Geraden mn. Der sphärische Radius Pa des Äquators wird zur Geraden Pn, und der sphärische Radius Pi vom Parallel φ zu der Linie Pi'. Mit diesen Strecken zieht man von P aus konzentrische Kreise, wodurch Äquator und Parallel projiziert sind. In dem rechtwinkligen Dreieck APi' ist der Winkel bei A $\frac{1}{2}(90 - \varphi)$ und der Radius

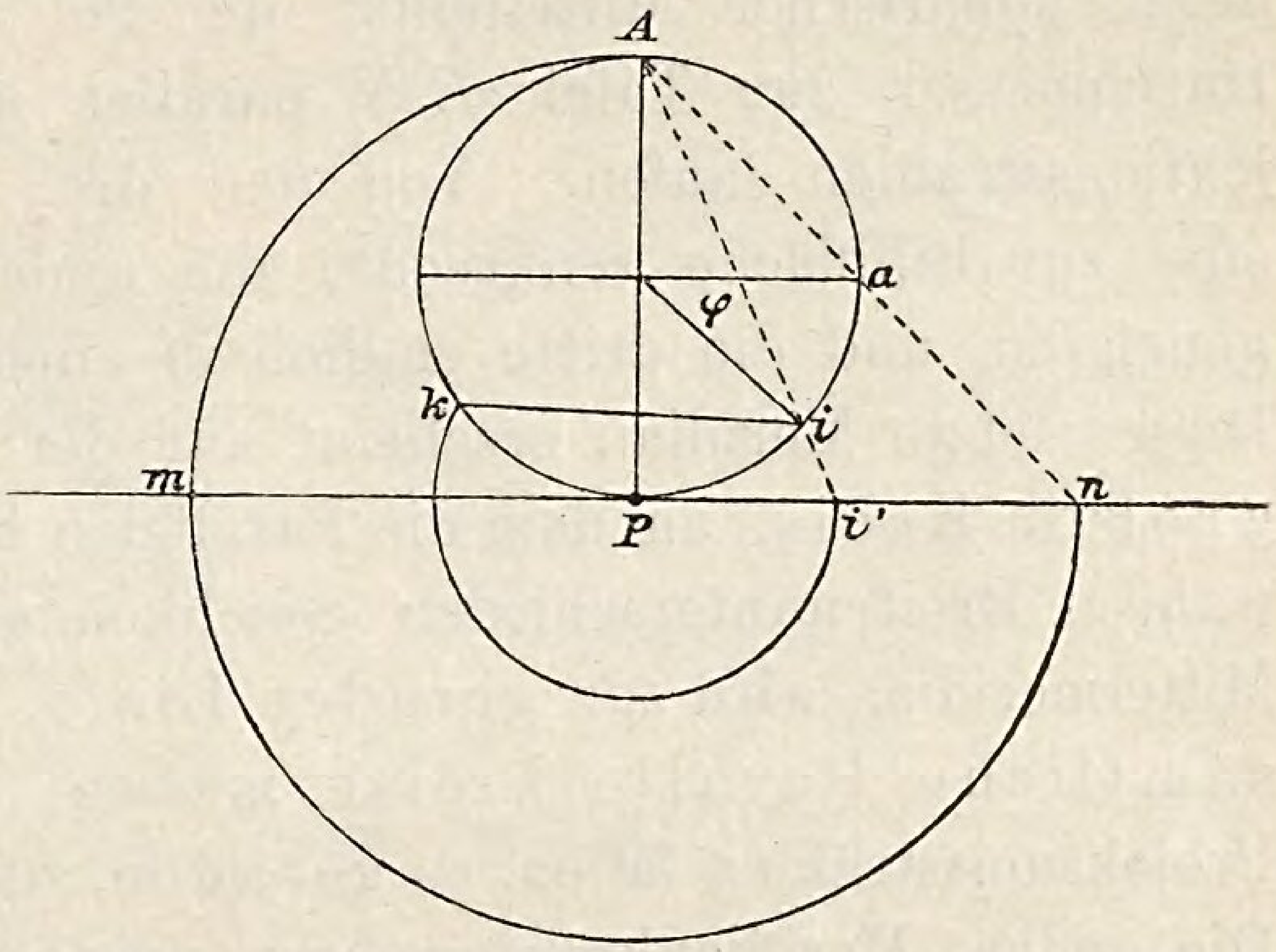


Fig. 106.

$$Pi' = r' = 2r \tan(45 - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Tabelle VI gibt $\quad r' = 1 \cdot \tan(45 - \tfrac{1}{2}\varphi).$

Mit dem Transporteur trägt man auf einem der konzentrischen Kreise die Meridianabstände λ, 2λ, 3λ ... ab und verbindet die Schnittpunkte mit dem Pol, wodurch die Meridiane in geraden Linien projiziert sind.

Wie einfach sich ein solches Kartennetz auf dem Wege der Konstruktion herstellen läſst, gibt Figur 107 hinreichend zu erkennen. Die Abbildung kann sich auch über den Äquator hinaus erstrecken.

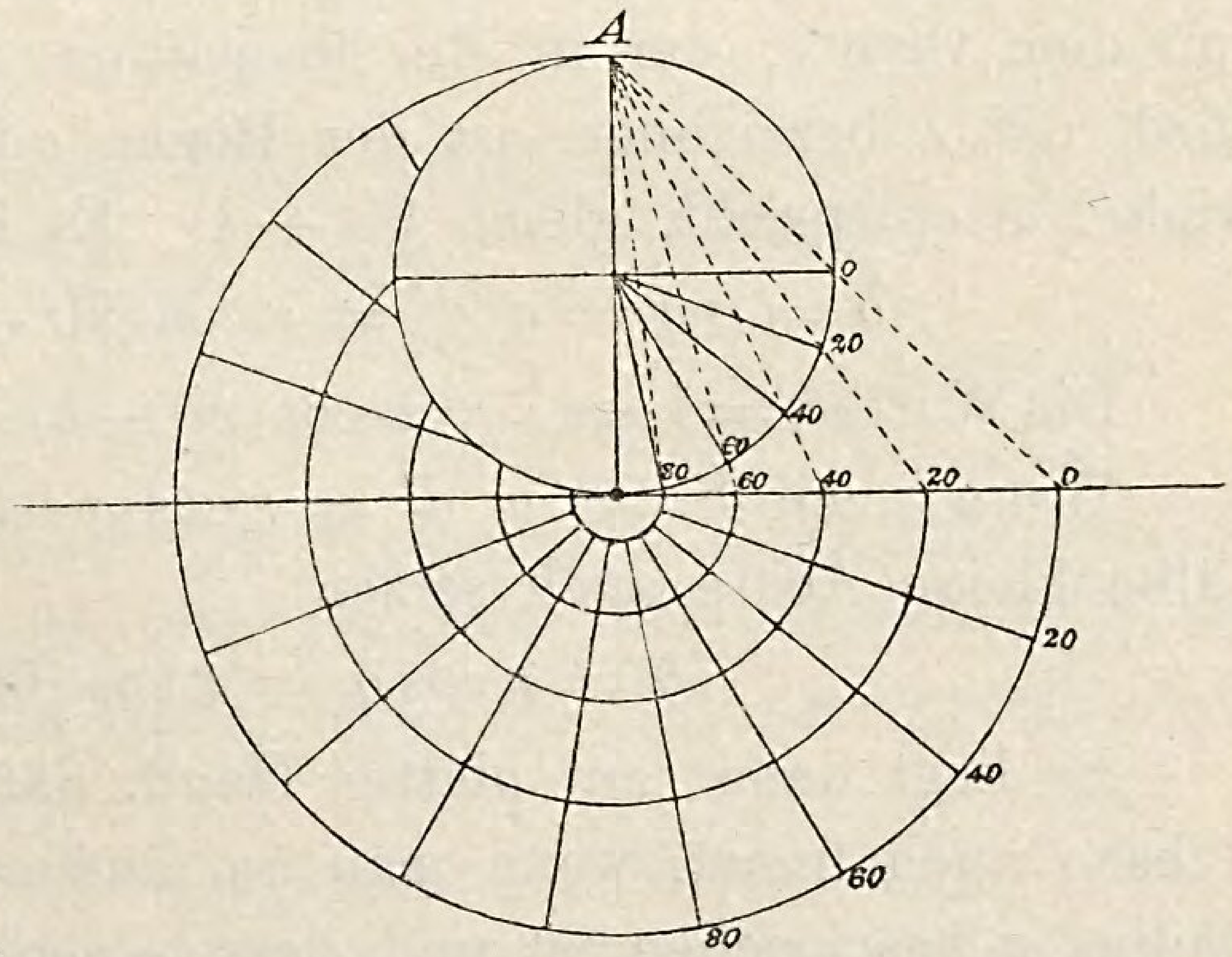


Fig. 107.

Meridianprojektion.

Orthographische Meridianprojektion.

Zur Erklärung derselben nehmen wir Figur 98 S. 96 zu Hilfe. Der Äquator und ein Parallel stellen zwei konzentrische Kreise vor, deren sphärischer Mittelpunkt der Pol ist und deren senkrechte Durchmesser zur Tafel EN parallel mit den punktierten Projektionsstrahlen laufen. Von den drei Meridianebenen steht die eine zur Bildfläche senkrecht, die andere befindet sich in einer geneigten, und die dritte endlich in einer parallelen Lage zu ihr. Dieser letzte Meridian erscheint auf der Zeichenebene als gleichgrofser Kreis, an dem die Parallelen Bogen abschneiden, die den wahren Breitenunterschieden gleichkommen. Der senkrechte oder Mittelmeridian wird zur geraden Linie, wie auch der Äquator, sämtliche Parallelkreise müssen, da sie in die Ebenen der Projektionsstrahlen fallen, zu geraden, parallelen Linien werden. Die andern Meridiankreise nehmen in der Projektion die Gestalt von Ellipsen an, deren gemeinschaftliche grofse Achse die Projektion $a'b'$ mit der Projektion des Mittel- oder Ortsmeridianes zusammenfällt und deren halbe kleine Achse in der Projektion der Meridianradien nach Mafsgabe ihrer Neigung zur Zeichenebene oder zum Meridian, der parallel sich zur derselben befindet, gegeben ist. Die halbe kleine Achse für den Meridian adb bei einem Neigungswinkel von x^0 ist $g'd'$. In dem Falle, wenn man den Bogen ed oder die Entfernung des Ortes d von dem Orte e, der in der Projektion zum Kartenmittelpunkt g' wird, mit λ bezeichnet, ist der Bogen cd, welcher dem Neigungswinkel x entspricht, gleich $90 - \lambda$. Es ist sodann die Gerade

$$b = gn = g'd' = r \cos(90 - \lambda) = r \sin \lambda.$$

Die Werte $b = 1 \cdot \sin \lambda = 1 \cdot \cos(90 - \lambda) = 1 \cdot \cos \varphi$ gibt Tabelle VII^a.

Wenn nach S. 99 $g'd' = r \cos \varphi$ ist, so lässt sich für die halbe kleine Achse auch setzen

$$b = r \cos \varphi = r \cos(90 - \lambda).$$

Es liegt damit auf platter Hand, dafs man die halben kleinen Achsen auch findet, wenn man am äufsern Meridian, der mit dem Radius r beschrieben ist und dessen senkrechte Diameter Äquator und Mittelmeridian vorstellen, die Breiten φ, 2φ ... mit dem Transporteur aufträgt, zum Äquator durch die Teilpunkte parallele Linien, welche die Parallelkreise bedeuten, zieht und diese auf den Äquator projiziert. Ihre Projektionen stellen sodann $r \cos(90 - \lambda)$ und damit

die halben kleinen Achsen für die Meridiane λ, 2λ, 3λ . . . dar. Aa auf Am (Fig. 108) ist darnach $b = r \sin 50 = r \cos(90 - 50) = r \cos 40$, welches Resultat mit dem Vorgetragenen ganz und gar im Einklang steht. Die Ellipsen konstruiert man nach einem der vier im ersten Teil angegebenen Konstruktionsverfahren.

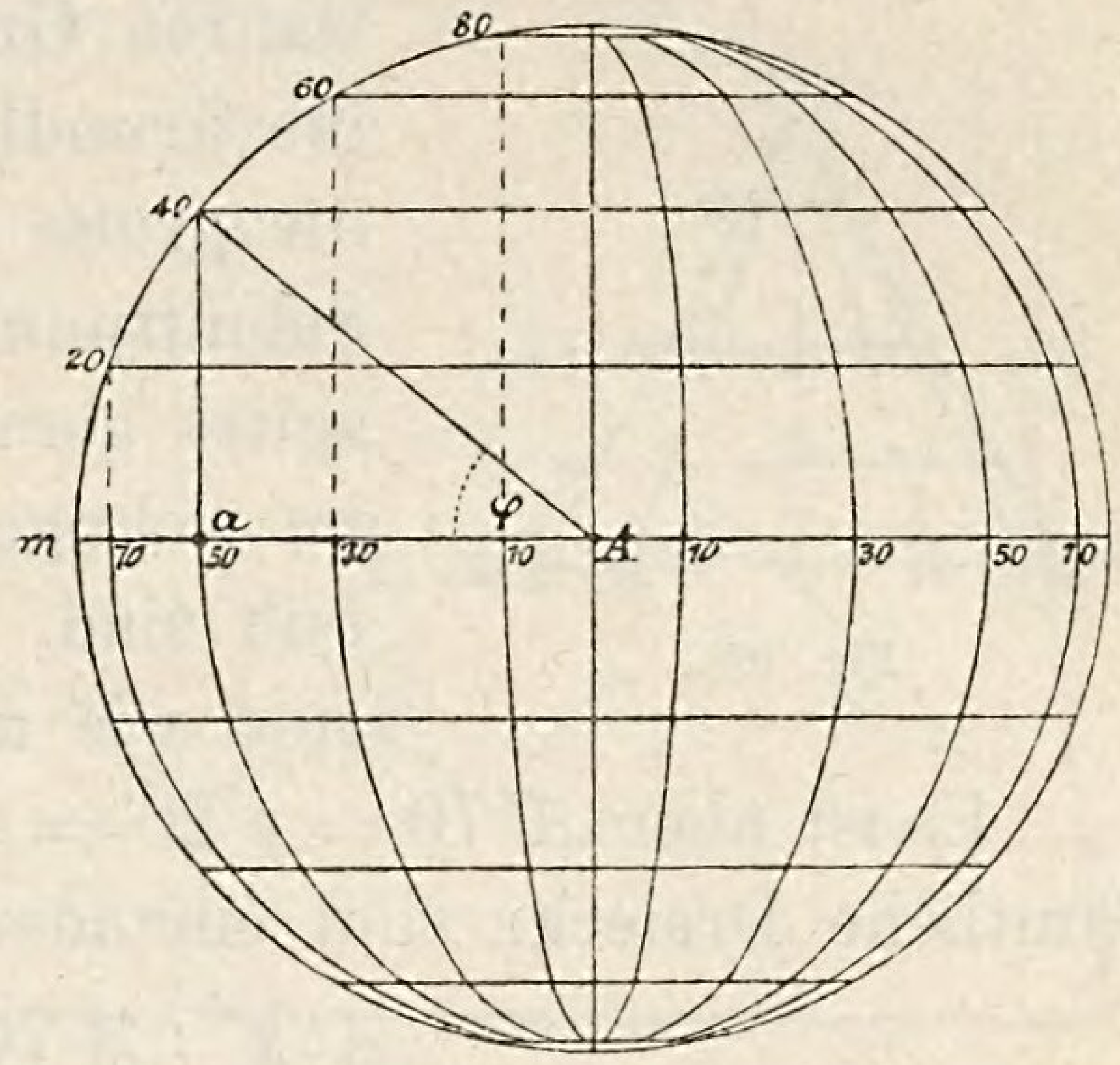


Fig. 108.

Fassen wir die halben Parallelkreise $r \cos \varphi$, $r \cos 2\varphi$, $r \cos 3\varphi$. . . als Kreisordinaten auf, so können wir uns an das vierte Verfahren halten und auf geschickte Weise die Ellipsenordinaten berechnen und sie an den Parallelkreisen vom Mittelmeridian aus auftragen. Es ist dann $a = r$ und $b = r \cos \varphi$. Nach den Gleichungen S. 66 u. 67

$$y = \frac{b}{a} \cdot Y = b \cos(90 - \alpha)$$

ist

$$y = \frac{r \cos \varphi}{r} \cdot Y = Y \cos \varphi$$

$$= r \cos \varphi \cdot \cos(90 - \varphi).$$

a) Bei der halben kleinen Achse $r \cos \varphi$ ist

$$y = r \cos \varphi \cdot \cos \varphi$$
$$= r \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi$$
$$= r \cos \varphi \cdot \cos 3\varphi \ . \ . \ .$$

b) bei der halben kleinen Achse $r \cos 2\varphi$ ist

$$y = r \cos 2\varphi \cdot \cos \varphi$$
$$= r \cos 2\varphi \cdot \cos 2\varphi$$
$$= r \cos 2\varphi \cdot \cos 3\varphi \ . \ . \ .$$

Die gewonnenen numerischen Werte trägt man auf die Parallelen φ, 2φ, 3φ . . . vom Mittelmeridian aus auf und zieht die Punkte gleicher Länge zusammen, wodurch man den gewünschten Meridian als Ellipse erhält.

Die Werte $y = 1 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi$ gibt die Tabelle VII^b.

Eine Erleichterung tritt ein, wenn man für das Auffinden der Ellipsenpunkte ein Hilfsdreieck zu Rate zieht. Auf der halben grofsen Achse Am konstruieren wir (Fig. 109) das gleichseitige Dreieck $A's'm'$. Von der Spitze s' tragen wir auf die Seite $A's'$ die halben Längen der Parallelkreise $r \cos \varphi$, $r \cos 2\varphi$, $r \cos 3\varphi$. . . ab.

Durch die Schnittpunkte werden zur Grundlinie parallele Linien gezogen. Wie das ganze Dreieck, so sind auch die Teildreiecke gleichseitige Dreiecke, welche die halben Parallelkreise in ihrer wahren Gröfse enthalten. Hierauf teilt man die Grundlinie $A'm'$ in derselben Art ein, wie die grofse Achse Am eingeteilt ist. Von den Schnittpunkten zieht man gegen die Dreiecksspitze gerade Linien, wodurch alle Parallelen im richtigen Verhältnis zum Äquator Am geteilt sind. Die Schnittpunkte aller Parallelen sind wie die am Äquator Ellipsenpunkte.

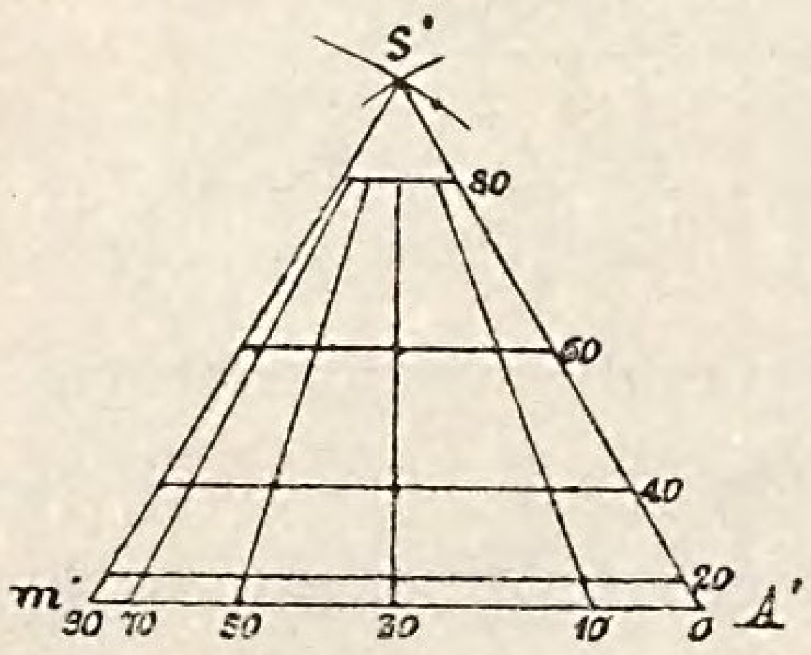


Fig. 109.

Es ist aber $A'70 = s'20 = r \cos 20$, $A50 = s'40 = r \cos 40 \ldots$ Sämtliche Dreiecke sind einander ähnlich, also verhält sich

$$A's' : A70 = s'20 : y \qquad (1$$

oder

$$r : r\cos 20 = r\cos 20 : y$$

$$y = r\cos 20 \cdot \cos 20$$

$$A's' : A70 = s'40 : y \qquad (2$$

oder

$$r : r\cos 20 = r\cos 40 : y$$

$$y = r\cos 20 \cdot \cos 40$$

$$A's' : A70 = s'60 : y \qquad (3$$

oder

$$r : r\cos 20 = r\cos 60 : y$$

$$y = r\cos 20 \cdot \cos 60 \text{ u. s. f.}$$

In gleicher Weise läfst sich der Nachweis für die Meridianellipse, welche die Länge von 50 Grad vorzustellen hat und damit für alle Meridiane erbringen, so dafs die Hilfsfigur nach richtigen Prinzipien konstruiert ist. Das Abnehmen sämtlicher Ellipsenpunkte für je einen Parallel gewährt eine wesentliche Erleichterung. Sie notiert man auf einen Papierstreifen und trägt sie mittels desselben vom Mittelmeridian aus auf die jeweiligen Parallelen der Hauptfigur über. Ihre Verknüpfung unter einander liefert dann die Meridiane als Ellipsen. Bei Mondkarten findet diese Projektionsweise zumeist Verwendung. Gegen die Ränder hin tritt eine starke Verengung der Meridiane ein, worunter die Flächen- wie linearen Verhältnisse zu leiden haben.

Die stereographische Meridianprojektion.

In dem Punkte P (Fig. 110) berühren sich Kugel und Zeichenebene. Ihm gegenüber in diametraler Richtung hat der Augenpunkt A seine feste, unverrückbare Stelle. Alle Projektionsstrahlen des Kreises $AaPA$, welcher durch den Augenpunkt selbst geht,

fallen in ein und dieselbe Ebene. Demgemäfs stellt sich der Kreis in der Abbildung als eine unbegrenzte Gerade und der Bogen Pa als die gerade Strecke Pn dar. Projizieren wir den Kugelkreis al, so liegt der Augenpunkt A aufserhalb desselben, der Kreis projiziert sich somit nicht mehr als Gerade, sondern als eine Kurve, die sowohl eine Parabel, Hyperbel, Ellipse oder auch ein Kreis sein kann. Um zu erfahren, welcher Art diese Kurve bei der stereographischen Projektion zugehört, projizieren wir den Kreis al auf die Ebene EN. Zwei von den Projektionsstrahlen Aa und Al treffen die Gerade Pn in den Punkten m und n. Es ist dann mn der Durchmesser der projizierten Kurve, welcher mit den Projektionsstrahlen Am und An die Schnittfläche eines schiefen Kegels Amn, der die Winkel α, β und γ einschliefst, bildet. Ziehen wir zu Pn die Parallele AT, so ist $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$ als Wechselwinkel. Der Bogen Aa liegt zwischen den Schenkeln des Tangentialwinkels TAa und des Peripheriewinkels Ala, folglich ist nach S. 19 $\sphericalangle TAa = \sphericalangle Ala$; also $\sphericalangle \beta'' = \sphericalangle \beta' = \sphericalangle \beta$. Indem aber die Dreiecke Amn und Ala in den beiden Winkeln β und γ mit einander sich im Einklang befinden, müssen sie auch in ihrem dritten Winkel $180 - (\beta + \gamma)$ übereinkommen, so dafs Winkel $Aal = \sphericalangle Amn = 180 - (\beta + \gamma) = \sphericalangle \alpha$ ist. Der Schnitt al des Kegels mAn erweist sich sohin als ein Wechsel- oder antiparalleler Schnitt und die Projektion des Kugelkreises al ist in der Ebene nach S. 71 wieder ein Kreis. Die Strecke mn ist sohin als dessen Durchmesser aufzufassen. Seine Halbierung führt auf den Mittelpunkt z, welcher in der Achse des Kegels selbst liegt. Die Dreiecke Ala und Anm sind sich ähnlich, es ist dann nach S. 20 und S. 72

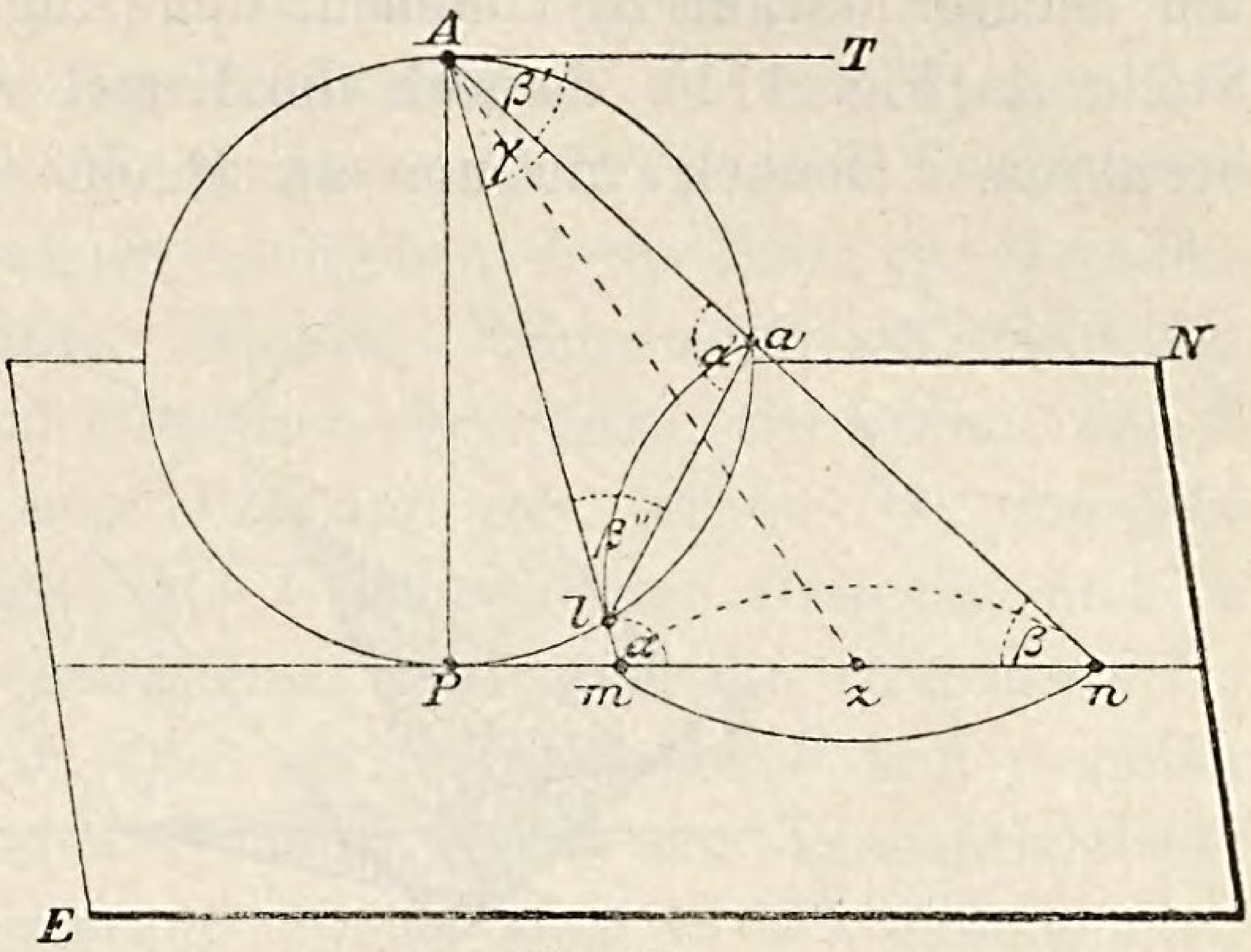


Fig. 110.

$$Al \cdot Am = Aa \cdot An,$$

welche Gleichung darauf hindeutet, dafs durch beide Kurven eine Kugel gelegt werden kann und sie darum Kugelkreise sind. Hiermit ist die Möglichkeit als könnte die projizierte Kurve mn auch eine Ellipse, Hyperbel oder eine Parabel sein, ausgeschlossen.

Um auch noch zu erfahren, welchen Winkel zwei in einem Punkte sich schneidende Kugelkreise in der Projektion bilden, verlegen wir, um leichter darauf zu kommen, den Augenpunkt unten hin an die Stelle *A* (Fig. 111), da sich die Kugel *APS* und die Ebene *EN* berühren. Denken wir uns an *P* eine Tangente und durch das

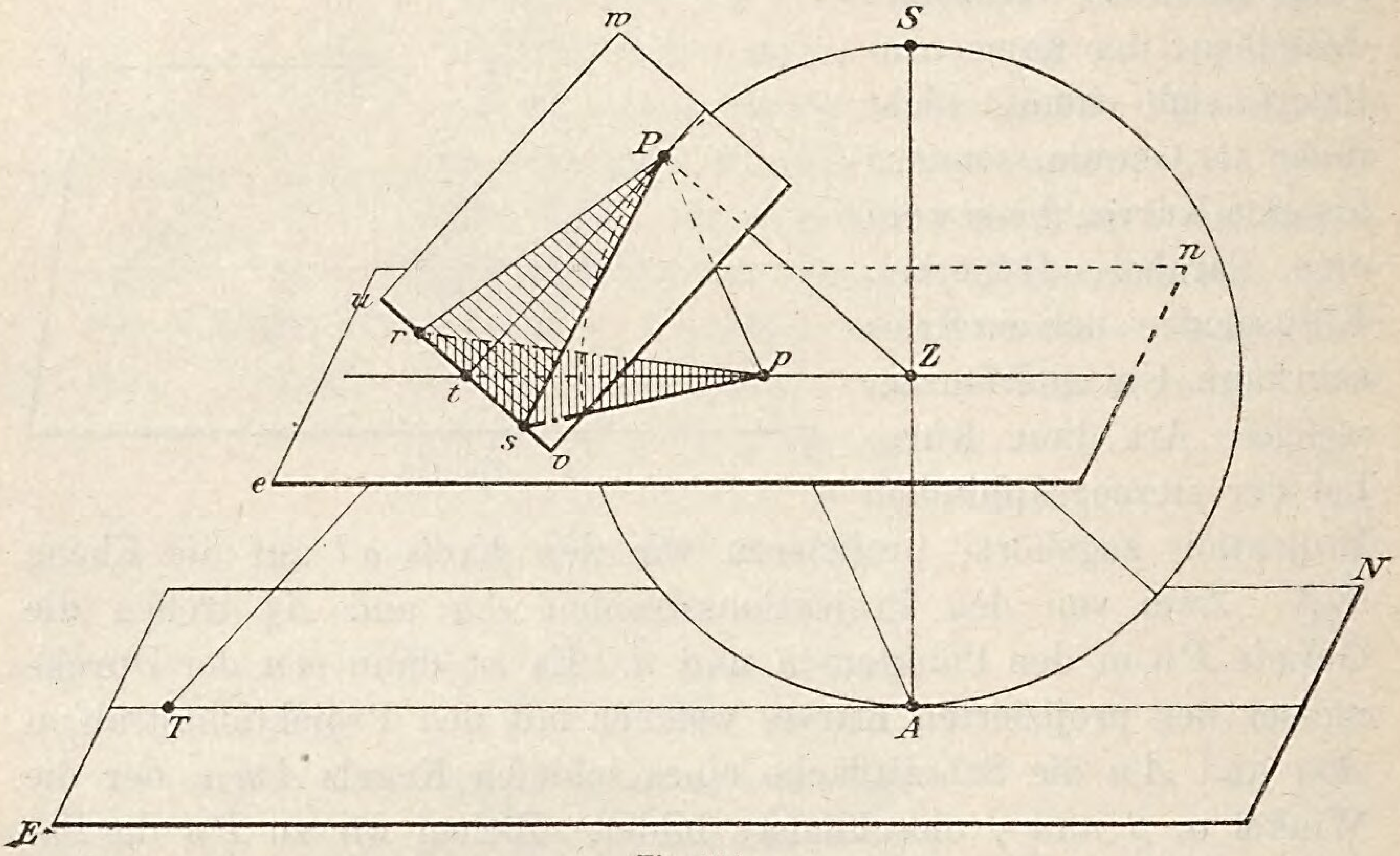


Fig. 111.

Kugelzentrum *Z* eine zu *EN* parallele Ebene *en* gelegt, so werden beide Ebenen von der Berührenden in den Punkten *t* und *T* geschnitten. Verbinden wir diese Schnittpunkte mit *Z* und *A*, so erhalten wir die Parallellinien *AT* und *Zt*. Von *A* aus projiziert sich *P* auf der Geraden *Zt* in *p*, und der Projektionsstrahl *AP* bildet mit der Tangente *PT* und den Parallellinien *AT* und *Zt* die zwei ähnlichen Dreiecke *TPA* und *tPp*. Betrachten wir die Linien *AT* und *PT* von *T* aus, so merken wir, daſs sie beide Tangenten sind, die man sich nicht anders zu denken hat, als daſs sie von *T* aus an den Kugelkreis *APT* gezogen sind. Dann sind sie nach Figur 32 S. 21 einander gleich. Wen dieser kurze Hinweis nicht befriedigen sollte, der darf nur *T* mit *Z* verbinden und er wird hierdurch zwei Dreiecke erhalten, die in der Seite *TZ*, die sie gemeinschaftlich haben und in den Seiten *PZ* und *AZ*, da sie Radien desselben Kreises sind, übereinstimmen, sowie in den Winkeln bei *P* und *A*, die rechte Winkel sind und der gröſseren Seite beider Dreiecke gegenüberliegen. Dann ist nach S. 7 Satz 3 die Kongruenz beider Dreiecke genugsam erwiesen. Aufeinandergelegt decken sie

sich und damit decken sich die Seiten AT und PT. So ist das Dreieck ATP ein gleichschenkliges, und auch sein Ebenbild Ptp, bei dem Seite Pt gleich Seite pt ist. Die Tangente Pt liegt in der Berührungsebene vw. Die Durchschnittslinie uv der Ebenen vw und en mufs zur Ebene des Neigungswinkels Ptp nach S. 49 senkrecht stehen und uv befindet sich nach eben dieser Seite zur Geraden Zt gleichfalls in einem rechten Winkel. Nehmen wir auf der Linie uv irgend zwei Punkte r und s an und verknüpfen sie sowohl mit P als mit p, so sind die Dreiecke Ptr und ptr, ferner Pts und pts nach S. 7 Satz 2 kongruente, bei t rechtwinklige Dreiecke und es ist $Pr = pr$, $Ps = ps$; ebendeshalb sind auch die Dreiecke rPs und rps kongruent, so dafs auch die Winkel bei P und p gleich sind. Weil aber die Geraden Pr und Ps in der Tangentialebene liegen, können sie als Tangenten zweier sich in P schneidenden sphärischen Kurven angesehen werden. Dann sind die Geraden pr und ps gleichfalls Tangenten und zwar Tangenten gelegt an die Projektionen dieser Kurven. Darnach kommt bei der stereographischen Projektion auch noch die Eigenschaft in Betracht, dafs sich die Projektionen zweier Kurven unter demselben Winkel scheiden, wie die Kurven auf der Kugel selber.

Meridiane und Parallelen schneiden sich auf der Kugel senkrecht, in der Abbildung bei der stereographischen Projektion müssen sie gleichfalls senkrecht zu einander zu stehen kommen, so dafs die Abbildung nach der stereographischen Projektion auch in den kleinsten Teilen dem Original ähnlich wird.

Nach Voranstellung der bisher besprochenen Sätze können wir auf die Projektion selbst eingehen.

Den Kartenmittelpunkt bilde (Fig. 112) der äquatoriale Ort Q. Gegenüber ist der Augenpunkt A zu denken, durch welchen Äquator und Ortsmeridian laufen. Beide projizieren sich darum auf der Ebene EM als zwei unbegrenzte, zu einander im rechten Winkel sich befindliche Gerade vm und $S'P$. Parallel zur Bildfläche steht der von Q um 90^0 entfernte Meridian NnS. Er projiziert sich als Kreis mit dem Radius $2r$. Denn in den Dreiecken AzN und AQN', die einander wegen der gleichgrofsen homologen Winkel ähnlich sind, verhält sich:

$$Az : Nz = AQ : QN'$$

oder, wenn wir für $Az = Nz$ den Radius r und für AQ den Diameter $d = 2r$ setzen

$$r : r = 2r : QN',$$

woraus resultiert, dafs

$$QN' = 2r \quad \text{beträgt.}$$

Die Punkte N' und S' sind die projizierten Pole und die Verbindungslinie $N'S'$ ist der Durchmesser des Begrenzungs- oder äufseren Kreises. Seine Halbierung führt auf den Mittelpunkt Q

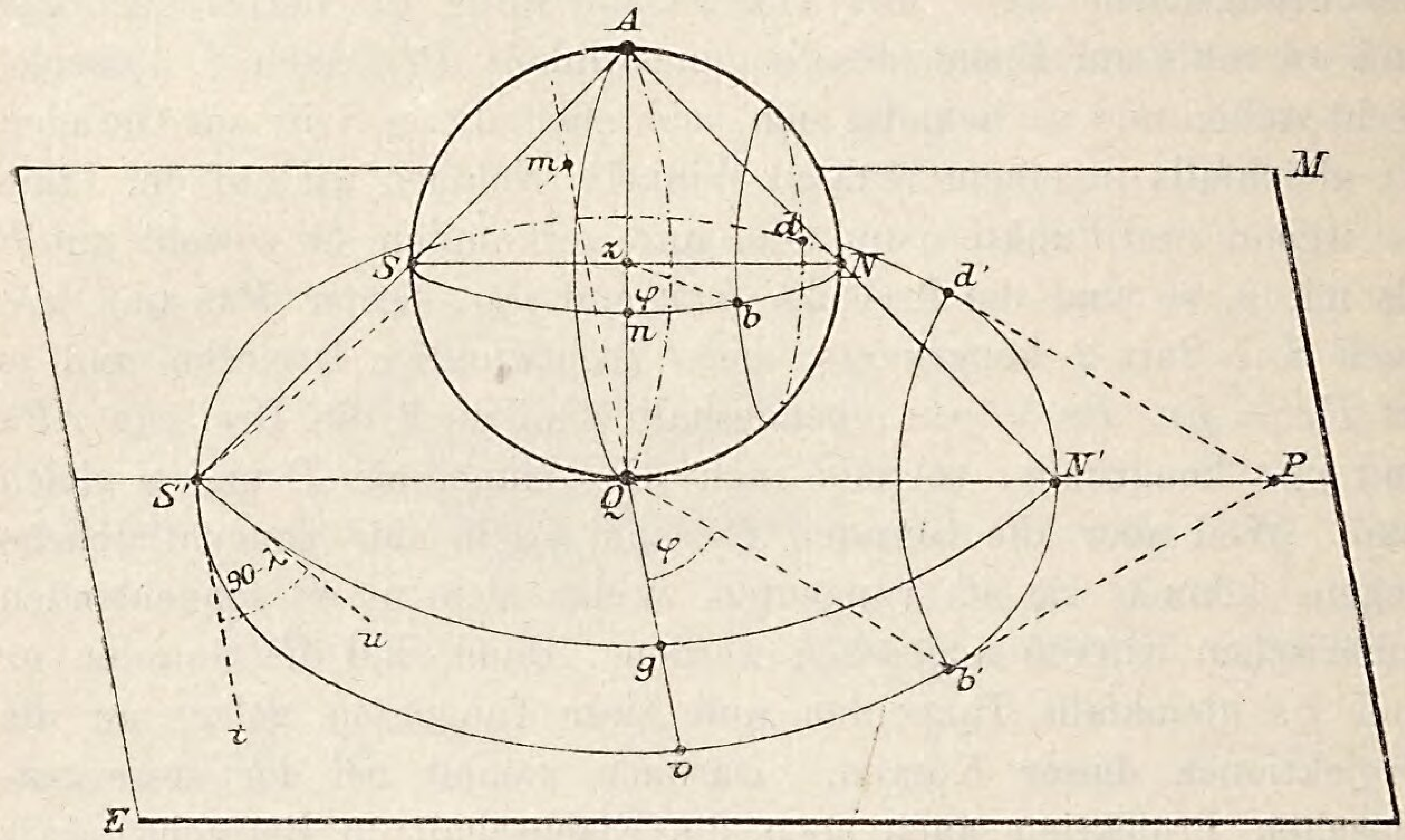


Fig. 112.

und damit auf den Radius $QN' = 2r$, mit welchem der Kreis $N'vS'd'$ zu beschreiben ist. Nachdem aber durch die Pole N' und S' alle noch übrigen Meridiane gleichfalls zu laufen haben, so erweist sich für sie nach Figur 26 S. 17 der äufsere Kreis der Karte als der mittlere Konstruktionskreis. Sein Durchmesser $S'N'$ ist die gemeinsame Sehne aller Meridiane und die Senkrechte vm, welche durch deren Mittelpunkt geht, ihre Zentrale. Soll durch den Ort g, welcher von Q um λ^0 absteht, ein Meridian geführt werden, so schliefst derselbe mit dem äufsern Meridian $N'vS'$ nach S. 102 den Winkel $90 - \lambda$ ein. Um denselben Winkel stehen die an sie gelegten Tangenten $S't$ und $S'u$ auseinander. Konstruieren wir sie im Punkte S' und setzen wir auf die Tangente $S'u$ das Perpendikel $S'm$, so zeigt uns dieses nach Figur 26 sowohl den Mittelpunkt m, als auch den Radius $S'm$ für den Meridian von g an. Auf den Punkt m gelangt man aber auch ohne Tangentenkonstruktion. Um S' schlägt man mit beliebiger Zirkelweite einen Quadranten und trägt an ihm mit dem Transporteur den Winkel $90 - \lambda$, um den die Radien $S'Q$ und $S'm$ von einander stehen, ab, und zieht durch den Teilpunkt am Quadranten von S' aus eine Gerade. Dieselbe führt selbstverständlich auch auf m und somit auf den Mittelpunkt und den Radius von dem Meridian des Ortes g.

Der äufsere Meridian $N' v S' d'$ befindet sich zu seinem Original $N n S d$ in paralleler Lage. Eben deshalb wird der Meridian auf der Abbildung von den verschiedenen Parallelkreisen geteilt, wie der Meridian auf der Kugel selbst.

Entspricht auf der Kugel der Bogen $n b$ dem Winkel φ, so hat der Bogen $v b'$ denselben Winkel vorzustellen. Die Teilung von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Grade kann demnach am äufseren Meridian mit dem Transporteur vorgenommen werden. Diesen Meridian selbst wie alle Meridiane schneiden die Breitenkreise auf der Kugel rechtwinklig. Dasselbe findet wie S. 107 erläutert wurde, in der Abbildung gleichfalls statt. Legt man nach S. 21 Fig. 32 in b' eine Tangente an, so führt dieselbe auf den Punkt P. Dieser ist der Mittelpunkt und die Strecke Pb' oder Pd' ist der Radius für den Parallel φ. In gleicher Weise findet man die Mittelpunkte für die übrigen Parallelkreise.

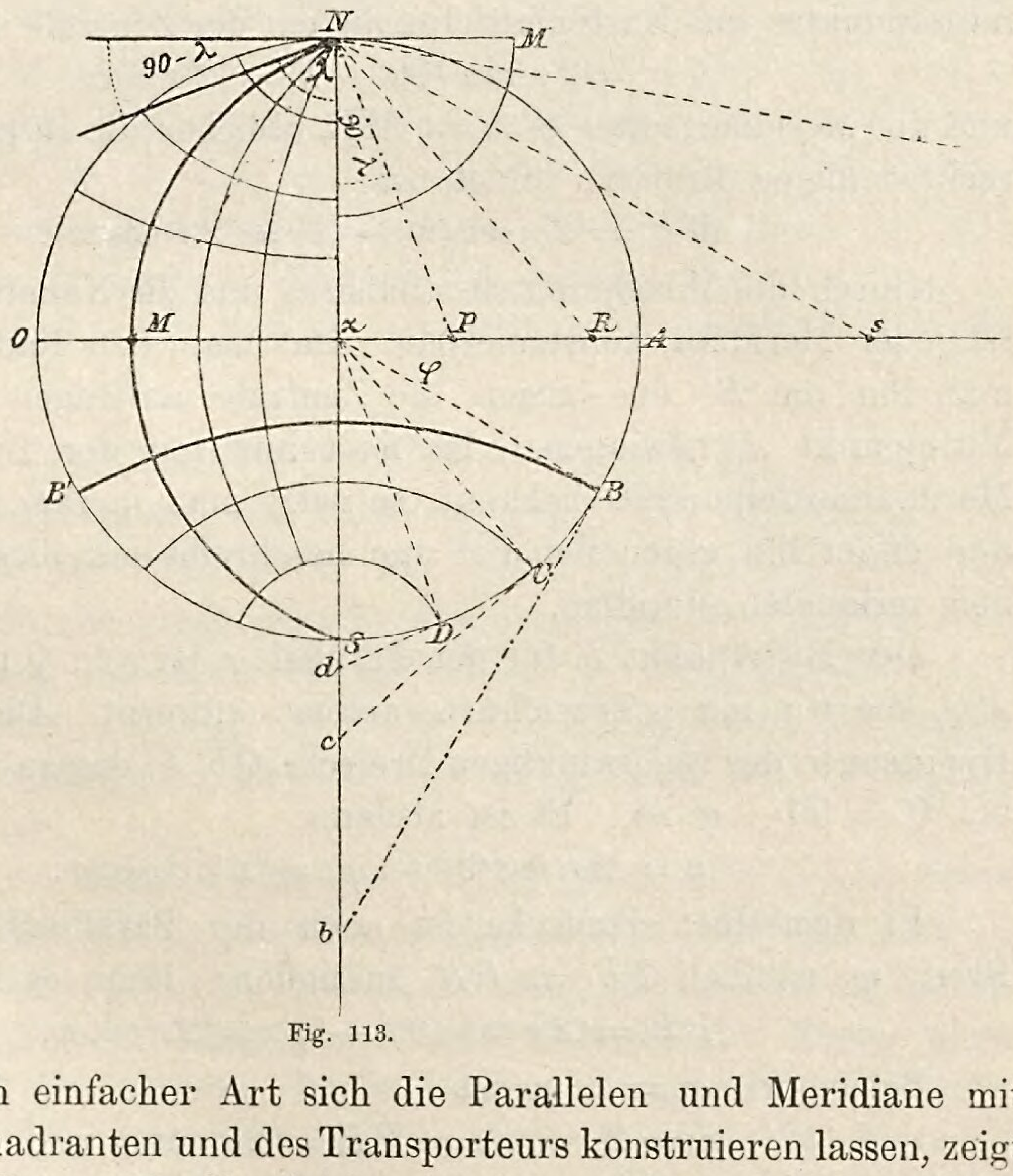


Fig. 113.

In welch einfacher Art sich die Parallelen und Meridiane mit Hilfe eines Quadranten und des Transporteurs konstruieren lassen, zeigt zur Genüge Figur 113. Vergleiche dabei Anmerkung 3 Tabelle VIII.

Noch sei bemerkt, dafs die Vielfachen 2λ, 3λ ... bei der stereographischen Projektion nicht durch die lineare Mafseinheit λ

gemessen werden können, indem die Abschnitte gleich grofser Bogen mit der Entfernung vom Kartenmittelpunkt zu wachsen beginnen und hierdurch ihre einheitliche Gröfse untereinander verlieren. Dieser Umstand veranlafst gegen den äufsern Meridian hin eine Auflockerung der Erdräume und ein Auseinanderziehen der linearen Verhältnisse.

Rechnende Bestimmung der Parallel- und Meridian-Mittelpunkte und Radien.

Der Radius für den äufsern oder Begrenzungsmeridian ist $2r$, der Äquator ist die Zentrale für die Meridianmittelpunkte und der Mittelmeridian diejenige für die Parallelkreise, weshalb sich die Mittelpunkte beider Gattungen von Kreisen leicht nach dem Kartenmittelpunkt Q, in dem sich beide Geraden kreuzen, bestimmen lassen. In dem rechtwinkligen Dreieck $S'Qm$ (Fig. 112) steht der Strecke Qm der Winkel $90 - \lambda$ entgegen, und die Entfernung eines Meridianmittelpunktes vom Kartenmittelpunkt auf der Zentrale vm ist alsdann

$$x = 2r \tan(90 - \lambda) = 2r \cot \lambda$$

und der Meridianradius $S'm = MR$, welcher die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks bildet, ist

$$MR = 2r \sec(90 - \lambda) = 2r \operatorname{cosec} \lambda.$$

Durch die Mittelpunktsbestimmung und die Kenntnis des Radius ist jeder Meridian konstruierbar. Hat man den Radius, so kann man ihn von S' aus gegen die Zentrale auftragen und so den Mittelpunkt m gewinnen. Ist man nur mit der Entfernung des Meridianmittelpunktes bekannt, so setzt man in ihm den Zirkel ein und öffnet ihn gegen den Pol und beschreibt mit dieser Zirkelweite den verlangten Meridian.

Der Mittelpunkt P für den Parallel φ ist von Q um die Strecke PQ, die wir mit y bezeichnen wollen, entfernt. Dieselbe ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $Qb'P$, dessen spitzer Winkel bei $Q = 90 - \varphi$ ist. Es ist alsdann

$$y = 2r \sec(90 - \varphi) = 2r \operatorname{cosec} \varphi.$$

In demselben Dreiecke ist auch der Parallelradius von der Breite φ, nämlich $Pb' = PR$, zu finden. Denn es ist

$$PR = 2r \tan(90 - \varphi) = 2r \cot \varphi.$$

Setzen wir $\varphi = \lambda$, so ist

$$x = 2r \cot \lambda = PR = 2r \cot \varphi \text{ und}$$

$$y = 2r \operatorname{cosec} \varphi = MR = 2r \operatorname{cosec} \lambda.$$

Die Kosekante führt somit auf den Meridianradius wie auf die Entfernung des Parallelmittelpunktes und wiederum läfst die

Kotangente die Meridianmittelpunkts - Entfernung wie auch den Parallelradius erkennen. Will man das Auftragen der Gradabschnitte mit dem Transporteur am äufsern Kreis unterlassen, so hat man in der Kotangententafel die Radien für die Parallelkreise selber

Die Werte $x = 1 \cdot \cot \lambda \quad = PR \; = 1 \cdot \cot \varphi$ gibt Tabelle VIII[a].

Die Werte $y = 1 \cdot \operatorname{cosec} \varphi = MR = 1 \cdot \operatorname{cosec} \lambda$ gibt Tabelle VIII[b].

Horizontalprojektion.

Die Kugel hat die Eigenart, dafs jeder Punkt auf ihr als Oberflächenmittelpunkt erwählt und infolgedessen die Mitte der Erdoberfläche einnehmen kann. Völker wie Chinesen, Japanesen, die sich vom Weltverkehr abschlossen und deren Welt nicht über ihren Horizont reichte, hielten dafür, ihr Land sei das Land der Mitte; die Anwohner sitzen an den Rändern der Erde. Mit dem wachsenden Verkehr hat diese Ansicht schwinden müssen; aber immerhin ist es von Interesse, den Globus so zu stellen, dafs ein Ort wie London, welche Stadt zum Mittelpunkt des Handels und Verkehrs der ganzen Erde geworden ist, in den Mittelpunkt der Welt zu liegen kommt, um so mit einem Blick seine geographische Weltstellung zu überschauen. Die Projektion, die sich die Lösung derartiger geographischer Probleme zur Aufgabe gemacht hat, ist die Horizontalprojektion.

Stereographische Horizontalprojektion.

Unser Mittelpunkt sei durch L (Fig. 114) bezeichnet, ihm gegenüber ist der Augenpunkt A. Der Winkel LzQ oder der Bogen LQ ist die geographische Breite φ und der Winkel LzN oder der Bogen LN die Poldistanz $90^0 - \varphi$. Der Meridian von L und der Parallel AB von der Breite $-\varphi$ gehen durch den Augenpunkt A, sie projizieren sich auf der Ebene EM als die Geraden $B'Z'$ und cm.

Denkt man sich die Ebene AB (Fig. 115 S. 113) auf die Ebene EN ausgedehnt und liegt zwischen den Ebenen EN und EM die Ebene des Neigungswinkels $AB'L$, so steht nach S. 49 die Durchschnittslinie Em der Ebenen EN und EM auf der Ebene dieses Neigungswinkels senkrecht. Rechtwinklig zur Durchschnittslinie Em befindet sich dann auch LB', die Projektion von AB'. Bei Figur 114 gewahren wir zwischen den Geraden cm und $B'L$, der Projektion von AB', ein gleiches Verhältnis. Ebendeshalb müssen sich $B'L$ und cm rechtwinklig treffen, was auch nach S. 107 gar nicht anders sein kann.

Wenn der Meridian von L und der Parallel $-\varphi$ sich als Gerade abzubilden haben, so erscheint der Horizontalkreis HZ, der von L um 90^0 absteht, seiner parallelen Lage halber zur Tafel EM, auf der Ebene wieder als Kreis, dessen Radius nach S. 107 $2r$ beträgt. Der Parallel von L hat den sphärischen Diameter LD, welcher sich in der Strecke LD' projiziert. Seine Halbierung führt auf den Mittelpunkt o und damit auf den Radius $Lo = D'o$. Mit ihm beschreiben wir den Parallel φ. Der spärische Diameter vom Parallel ge bildet sich als $g'e'$ ab, der Mittelpunkt ist N' und der Radius $N'g' = N'e'$. Trägt man sohin am Mittelmeridian $AHLZ$ die Breiten φ, 2φ ... mit dem Transporteur ab, so braucht man nur die Teilpunkte gleicher Breiten vom Augenpunkt aus auf den projizierten Mittelmeridian $B'Z'$ übertragen und die auf ihm erhaltenen Strecken halbieren, um die Mittelpunkte und Radien für die betreffenden Parallelen zu gewinnen. Durch sie ist dann jeder Breitenkreis konstruierbar. Den Äquator erhält man in dem Bogen $Q'Cv$. Der Antiparallel $-\varphi$, der sich als die Gerade cm projiziert, fällt schon über den Begrenzungskreis und damit über die Karte selbst hinaus. Ein gleiches Schicksal widerfährt dem Südpol, dem Pol der Antipoden

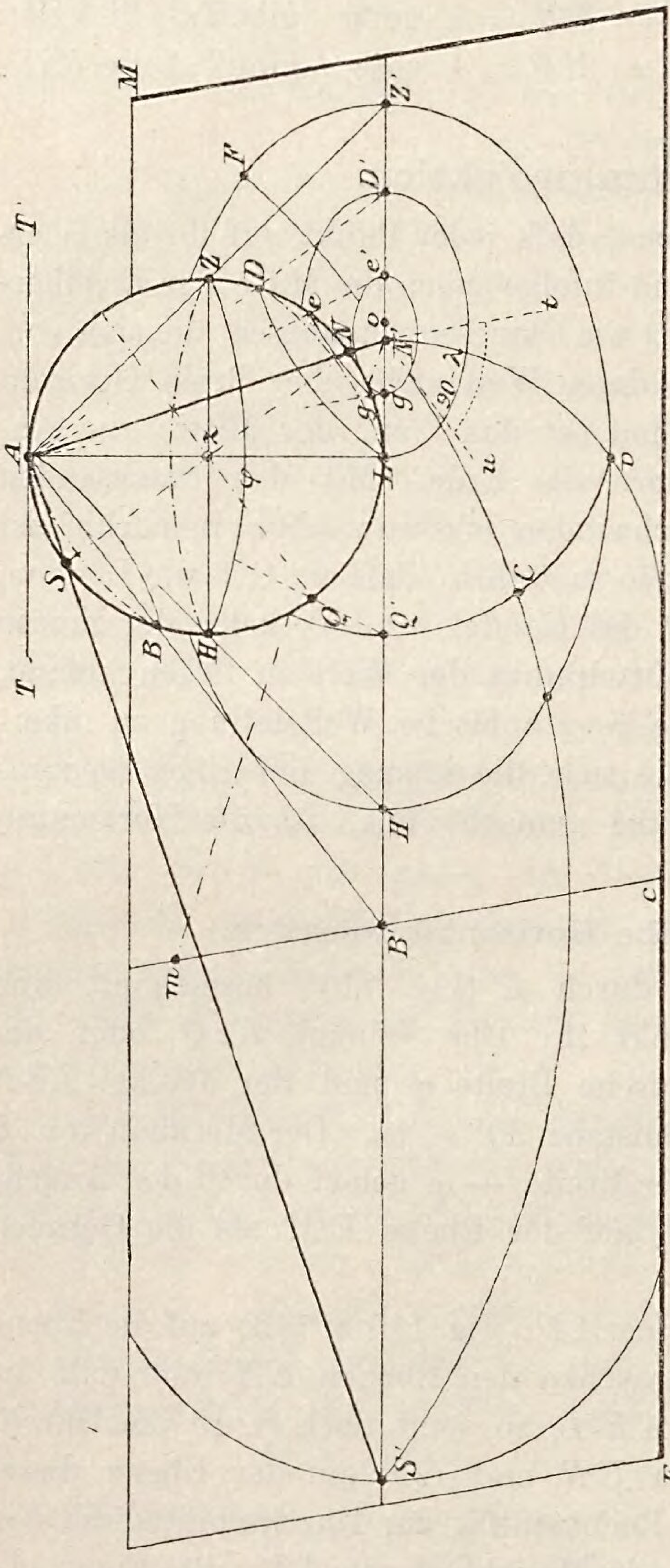


Fig. 114.

von L. Und dennoch können wir seiner nicht entraten, da durch ihn und den Nordpol alle Meridiane hindurchgehen müssen.

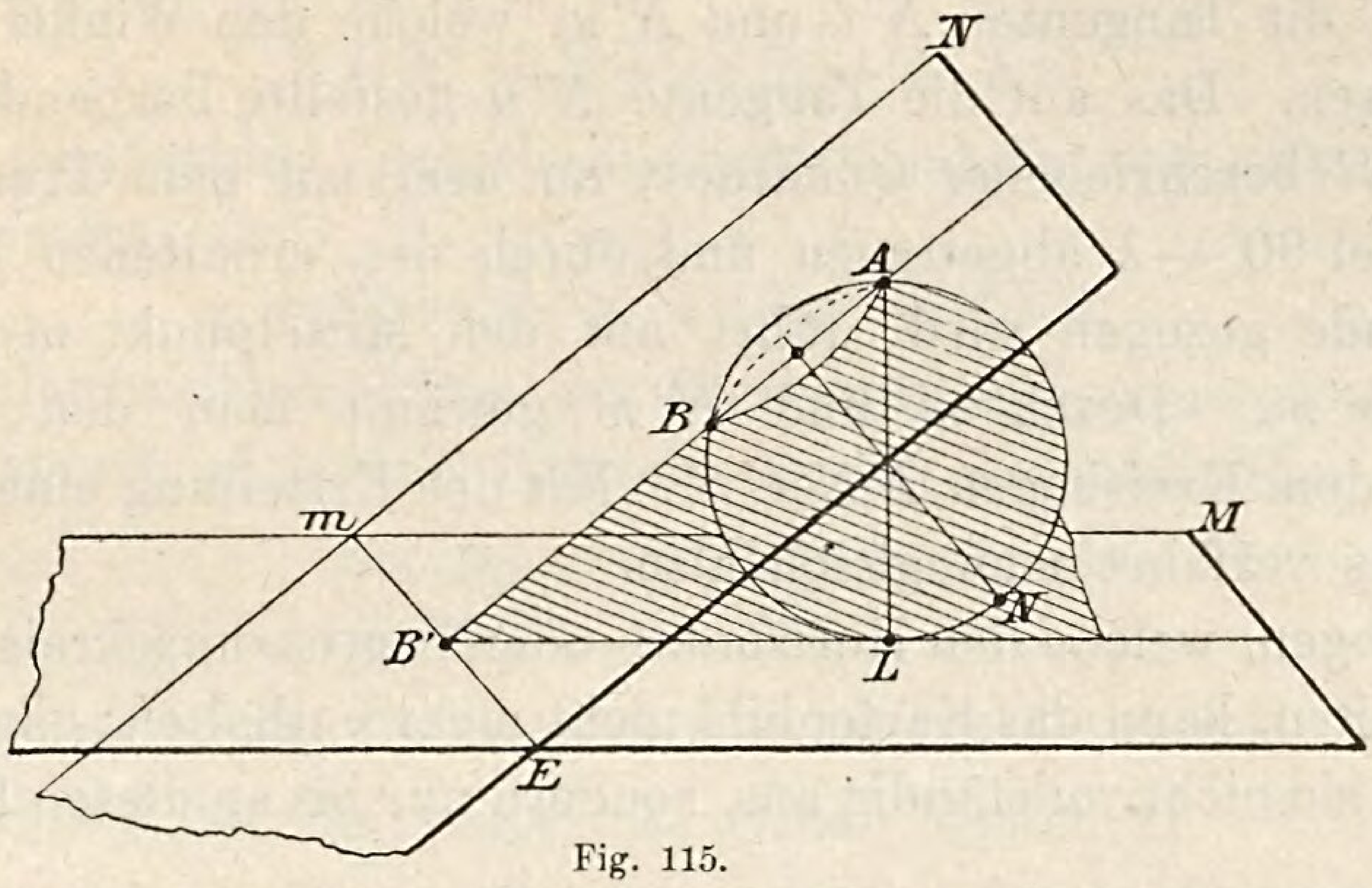


Fig. 115.

Die Strecke $N'S'$ erweist sich sonach als die Sehne, welche einer Schar von Kreisen gemein ist. Dabei möchte anzunehmen sein, dafs B', die Projektion von B, im Halbierungspunkt derselben sitzt. Um jeder Täuschung aus dem Weg zu gehen, versuchen wir diese unsere Annahme, für welche der Augenschein spricht, auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Zu diesem Behufe ziehen wir die Tangenten AT und AT' und bedienen uns als weiteres Beweismateriales der Dreiecke $AB'S'$ und $BB'N'$.

Aus den Sätzen der Stereometrie ist hinlänglich bekannt, dafs zwei Punkte auf ein und demselben Parallel gleichweit von den Polen entfernt liegen (S. 32). Somit ist arc $BS =$ arc AS und der Peripheriewinkel BAS gleich dem Tangentialwinkel TAS. Dieser ist als innerer Wechselwinkel dem Dreieckswinkel $AS'B'$ gleich, wodurch sich herausstellt, dafs die Winkel an der Grundlinie AS' übereinstimmen und das Dreieck $AB'S'$ ein gleichschenkliges ist. Dann ist Seite $B'S' =$ Seite AB'. Ferner ist arc $BN =$ arc AN, folglich der Tangentialwinkel $T'AN$, welcher als Wechselwinkel dem Dreieckswinkel $AN'B'$ gleichkommt, ebenso grofs als der Peripheriewinkel BAN. Mithin sind auch im Dreieck $AB'N'$ die Winkel an der Grundlinie AN' einander gleich. Es ist dieses Dreieck gleichfalls ein gleichschenkliges, wodurch die Seite AB' gleich ist der Seite $B'N'$. Aus dieser Betrachtung resultiert, dafs nachdem $S'B' = AB' = B'N'$ ist, der Punkt B', als der Halbierungspunkt von der Sehne $N'S'$ und die Senkrechte cm, die in ihm die Sehne rechtwinklig schneidet, als die Zentrale für die Meridiane zu gelten hat. Darum setzen wir getrost in B' den Zirkel ein, öffnen ihn gegen N' und beschreiben

mit dem Radius $B'N'$ den Meridian $N'vS'$. Soll durch den von Q' um λ^0 entfernten Ort C ein Meridian gezogen werden, so errichten wir in N' die Tangenten $N't$ und $N'u$, welche den Winkel $90 - \lambda^0$ einschliefsen. Das auf die Tangente $N'u$ gestellte Perpendikel oder ein um N' beschriebener Quadrant, an dem mit dem Transporteur der Winkel $90 - \lambda$ abgetragen und durch den erhaltenen Teilpunkt eine Gerade gezogen wird, führt auf den Mittelpunkt m und den Radius $N'm$. Durch m und $N'm$ gewinnt man den Meridian von C in dem Kreisbogen $FN'CS'$. Mit der Erstellung eines andern Meridianes verfährt man gleich also.

Die Bogen, welche den Horizontal- oder Begrenzungskreis $Z'vH'F$ überschreiten, kann das Kartenbild nicht mehr enthalten; ebendeshalb zieht man sie nicht vollständig aus, sondern nur bis an diesen Kreis hin.

Rechnende Bestimmung der Parallel- und Meridianmittelpunkte und Radien.

Zunächst gilt es, den projizierten Pol N' (Fig. 114) mathematisch zu fixieren. Der Winkel $LzN = 90 - \varphi$ und der Peripheriewinkel LAN' ist sonach $\frac{1}{2}(90 - \varphi)$. Es ist sodann

$$LN' = 2\,r \tan \tfrac{1}{2}(90 - \varphi).$$

Der projizierte Parallel $g'e'$, von der Breite φ' hat die Peripheriepunkte g' und e' und den Kreismittelpunkt N'. Der Radius ist sodann $N'g'$ oder $N'e'$. Es genügt zur Erstellung der Parallelen nächst der Bestimmung des Zentrums ein Peripheriepunkt auf der Geraden $S'Z'$. Damit die Peripheriepunkte nicht zu weit über die Kartenfläche hinausfallen, wählen wir die gegen den Punkt B' zuliegenden Peripheriepunkte. Für den Kreis $g'e'$ ist es der Peripheriepunkt g'. Der Bogen $Qg = \varphi'$, der Bogen Lg somit $\varphi' - \varphi$ und der Peripheriewinkel LAg' ist $\frac{1}{2} \sphericalangle Lzg = \frac{1}{2} \operatorname{arc} Lg = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$; sohin ist

$$Lg' = 2\,r \tan \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$

und wenn wir für Lg' allgemein p setzen, alsdann ist

$$p = 2\,r \tan \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi).$$

Die Werte $p = 1 \cdot \tan(\frac{1}{2}\varphi' - 25)$, da $2\,r = 1$ angenommen, enthält Tabelle IX[a].

Bezeichnen wir die Entfernung eines Mittelpunktes irgend eines Parallels von dem Kartenmittelpunkt, also in unserm Falle N' von L, mit y und den Radius $N'g' = N'e'$ mit r, so ist

$$Lg' = LN' - N'g' = y - r$$
$$Le' = LN' + N'e' = y + r.$$

Addieren wir diese Gleichungen und beachten wir dabei, dafs $N'g' = N'e'$ ist, so ist

$$2\,LN' = 2\,y = Lg' + Le'$$

und die Entfernung des Parallelmittelpunktes vom Kartenmittelpunkt ist stets

$$LN' = y = {}^1\!/_2\,(Lg' + Le').$$

Für den weiteren Gang der Rechnung ist von nöten, auch den Peripheriepunkt e' in die Betrachtung mit hereinzuziehen.

Nun ist $\quad \operatorname{arc} Qg = \operatorname{arc} Qe = \varphi'$, also

$$\operatorname{arc} Ng = \operatorname{arc} Ne = 90 - \varphi'.$$

Ferner ist $\quad \operatorname{arc} Le = \operatorname{arc} Lg + \operatorname{arc} Ng + \operatorname{arc} Ne$

oder, wenn wir für die Bogen die Grade einstellen,

$$\operatorname{arc} Le = (\varphi' - \varphi) + (90 - \varphi') + (90 - \varphi') = 180 - (\varphi + \varphi')$$

woraus resultiert, dafs der Peripheriewinkel $LAe' = {}^1\!/_2 \sphericalangle Lze = {}^1\!/_2 \operatorname{arc} Le$ d. i. $90 - {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')$ Grade mifst. Es ist dann

$$Le' = 2\,r \tan\,[90 - {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')] = 2\,r \cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi').$$

Nachdem Lg' und Le' gefunden, ist nach dem Vorausgegangenen

$$y = r\,[\cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') + \tan {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)]$$

oder durch die Umformung nach der Gleichung

$$\cot\alpha + \tan\beta = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}\ ^{*)}$$

$$y = r\cos\varphi : [\sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')\cos {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)].$$

Die Werte $y = {}^1\!/_2 \cos 50 : [\sin(25 + {}^1\!/_2\,\varphi')\cos({}^1\!/_2\,\varphi' - 25)]$, da $r = {}^1\!/_2$ ist, enthält Tabelle IX[b].

Für die Länge LQ' erhalten wir

$$LQ' = -2\,r \tan {}^1\!/_2\,\varphi \quad \text{und für} \quad LB' = -2\,r\tan\varphi.$$

Weniger umständlich ist die Auffindung der Mittelpunkte für die Meridiane auf der Geraden cm. Für den Mittelkreis $N'vS'$ von der Schar aller Meridiankreise haben wir den Radius $R = B'N' = B'L + LN'$.

Es ist aber, wie bekannt $LN' = 2\,r \tan {}^1\!/_2\,(90 - \varphi)$ und $LB' = r\,2\tan\varphi$. Somit ist

$$R = -2\,r\,[\tan {}^1\!/_2\,(90 - \varphi) + \tan\varphi].$$

*) Denn nach S. 41 und S. 52 ist $\cot\alpha + \tan\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$. Bringen wir diese Brüche auf gleichen Nenner, so ist $\frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$. Ferner ist nach S. 43 $\cos -\varphi = \cos\varphi$.

Um dieser Gleichung eine bequemere Form zu geben, gestalten wir sie nach der Gleichung

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\text{*)}$$

also um

$$R = \frac{2r\sin(45 + {}^1\!/_2\,\varphi)}{\cos(45 - {}^1\!/_2\,\varphi)\cos\varphi}.$$

Den Wert $R = \frac{\sin 70}{\cos 50 \cdot \cos 20}$ hat man in der Tabelle IX^c.

Der Punkt m ist nach Fig. 114 der Mittelpunkt für den Meridian $N'CS'$. Die beiden Radien $B'N' = R$ und $N'm$ schliefsen wie die Tangenten $N't$ und $N'u$ den Winkel $90 - \lambda$ ein, wenn $Q'N'C$ den Winkel λ bilden. Dann ist

$$B'm = R\tan(90 - \lambda) = R\cot\lambda.$$

Setzen wir für $B'm$ allgemein x und für R den numerischen Wert, so ist

$$x = 2r\cot\lambda \cdot \frac{\sin(45 + {}^1\!/_2\,\varphi)}{\cos(45 - {}^1\!/_2\,\varphi)\cos\varphi}.$$

Die Werte für $\frac{1 \cdot \cot\lambda \cdot \sin 70}{\cos 50 \cdot \cos 20}$ findet man in der Tabelle IX^d.

Stellen wir um der Übersicht willen alle die Gleichungen, welche zur Konstruktion unumgänglich notwendig sind, zusammen, so erhalten wir für die stereographische Horizontalprojektion folgendes Schema:

1. Für den Radius des Begrenzungskreises der Karte
$$L'Z = LH' = 2r;$$
2. für den Pol
$$N' = LN' = 2r\tan(45 - {}^1\!/_2\,\varphi);$$
3. für einen Parallelkreis-Peripheriepunkt
$$p = 2r\tan{}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi);$$
4. für einen Parallelmittelpunkt
$$y = r\cos\varphi : [\sin{}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')\cos{}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)];$$
5. für den Radius des Mittelmeridians
$$R = \frac{2r\sin(45 + {}^1\!/_2\,\varphi)}{\cos(45 - {}^1\!/_2\,\varphi)\cos\varphi};$$

*) Nach S. 41 und S. 158 ist

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

6. für den Mittelpunkt der übrigen Meridiankreise

$$x = 2\,r \cot\lambda \cdot \frac{\sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\cos(45 - \frac{1}{2}\varphi)\cos\varphi}.$$

Ein nach diesem Schema entworfenes Kartennetz gibt die Figur 116. Nimmt man das Netz so in die Hand, daſs der Pol nach unten zu liegen kommt, so hat man die Hemisphäre der Antipoden vor sich. Öfters werden beide Halbkugeln nebeneinandergestellt. Eine Erleichterung bei deren Konstruktion gewinnt man, wenn man beim Entwurf der Antipodenhalbkugel das Zeichenpapier umdreht und so die südliche Halbkugel nicht von oben, sondern auch von unten aus entwirft.

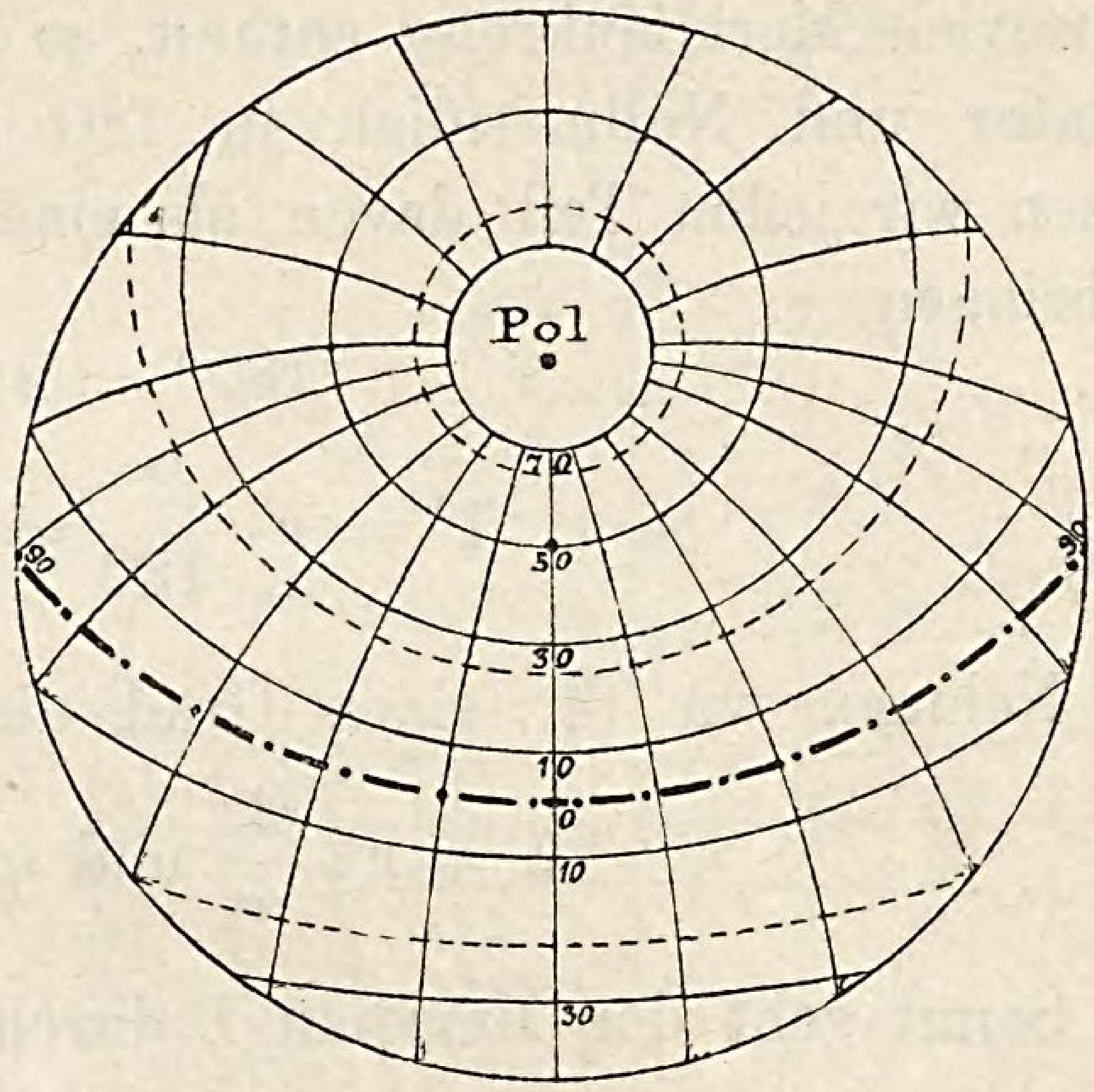


Fig. 116.

Die nicht perspektivischen Projektionen.

Globularprojektion.

Nicolosi, ein Sicilianer, ist der Erfinder der Globularprojektion, deren Wesen darin besteht, daſs

1. jede Halbkugel als Kreis erscheint, dessen Umfang durch die Parallelkreise und den Äquator in gleich groſse Abschnitte gebracht wird,
2. ein Paar senkrecht aufeinander gestellte Diameter den Äquator und Nullmeridian abbilden,
3. die übrigen Meridiane und die Parallelen durch Kreisbogen zu erstellen sind und endlich
4. die Meridiane den Äquator, die Parallelkreise den Null- oder Mittelmeridian in gleiche Teile teilen.

Trägt man die gleichen Bogen, also arc φ, arc 2φ arc 3φ . . . am Begrenzungskreis mit dem Transporteur auf, so sind die Schnittpunkte zugleich Peripheriepunkte der zu zeichnenden Parallelen.

Zwei bestimmte Peripheriepunkte für jeden Meridian geben die beiden Pole, wie bekannt ist, ab. Gesellt sich zu zwei Peripheriepunkten noch ein dritter Peripheriepunkt, so gibt ihre geradlinige Verbindung die Sehnen, welche auf den Kreismittelpunkt und damit auf den Kreis selbst führen. Für jeden Meridian kann dieser dritte Peripheriepunkt nur am Äquator und für jeden Parallel am Mittelmeridian zu finden sein. Da jede Halbkugel 180 Parallel- und ebensoviele Meridiankreise enthält, so müssen der Forderung gemäfs Äquator und Nullmeridian in 180 gleiche Teile geteilt werden. Fassen wir jeden Teil davon als einen Grad auf, so ist in Ansatz zu bringen

$$180^0 = 2r$$

$$1^0 = r \cdot \frac{2}{180} = r \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Nehmen wir für einen Grad die Vielfachen λ oder φ, so ist

$$\lambda = r\lambda \frac{2}{\pi} \text{ und } \varphi = r\varphi \frac{2}{\pi}.$$

Somit geht der Meridian λ durch die Peripheriepunkte

$$N, \; r\lambda\frac{2}{\pi}, \; S,$$

der Parallel φ durch die Peripheriepunkte

$$\operatorname{arc}\varphi, \; r\varphi\frac{2}{\pi}, \; \operatorname{arc}\varphi.$$

Diese Peripheriepunkte haben wir durch gerade Linien zu verbinden, in ihren Halbierungspunkten Perpendikel zu errichten und durch sie den Kreismittelpunkt aufzusuchen. Ist er gefunden, so setzt man in ihm den Zirkel ein, öffnet ihn gegen einen der Peripheriepunkte, und beschreibt mit dieser Zirkelweite den gewollten Kreis oder Kreisbogen.

Nach diesen Grundsätzen ist die Halbkugel (Fig. 117) entworfen. Für die Projektion eines Parallels diene als Muster der 50. Breitengrad. Die Peripheriepunkte sind $m' = \operatorname{arc} 50$, und $m = r \cdot 50 \cdot \frac{2}{\pi}$. Das Perpendikel im Halbierungspunkt der Sehne mm' führt auf den Mittelpunkt k. Von ihm öffnet man den Zirkel gegen m oder m' und die Zirkelweite km oder km' ist der Radius für den zu zeichnenden Parallel. Auffällig möchte es erscheinen, dafs man sich bei der Erforschung des Parallelmittelpunktes mit einer Sehne und

zwei Peripheriepunkten begnügte. Erwägt man jedoch, dafs die Sehnen rechts wie links vom Mittelmeridian für ein und denselben Breitenkreis einander gleich sein müssen, so wird einem klar, dafs die in einem Punkte sich treffenden Perpendikel von gleicher Länge sind und dieser Punkt mit dem Kartenmittelpunkt auf einer Linie, welche den Winkel halbiert, den die beiden Perpendikel zusammen bilden, liegen mufs. Aus dieser Ursache ist der verlängerte Mittelmeridian, welcher diesen Winkel bei *k* halbiert, die Zentrale für die Parallelkreise. Der Schnittpunkt, den ein Perpendikel an der Zentrale hervorruft, ist darum der gesuchte Mittelpunkt. Vergleiche damit Fig. 32 S. 21. Für die Meridiane tritt der Äquator und seine Verlängerung als Zentrale auf. Hat man beispielsweise durch *M*, dessen Länge λ ist, einen Meridian

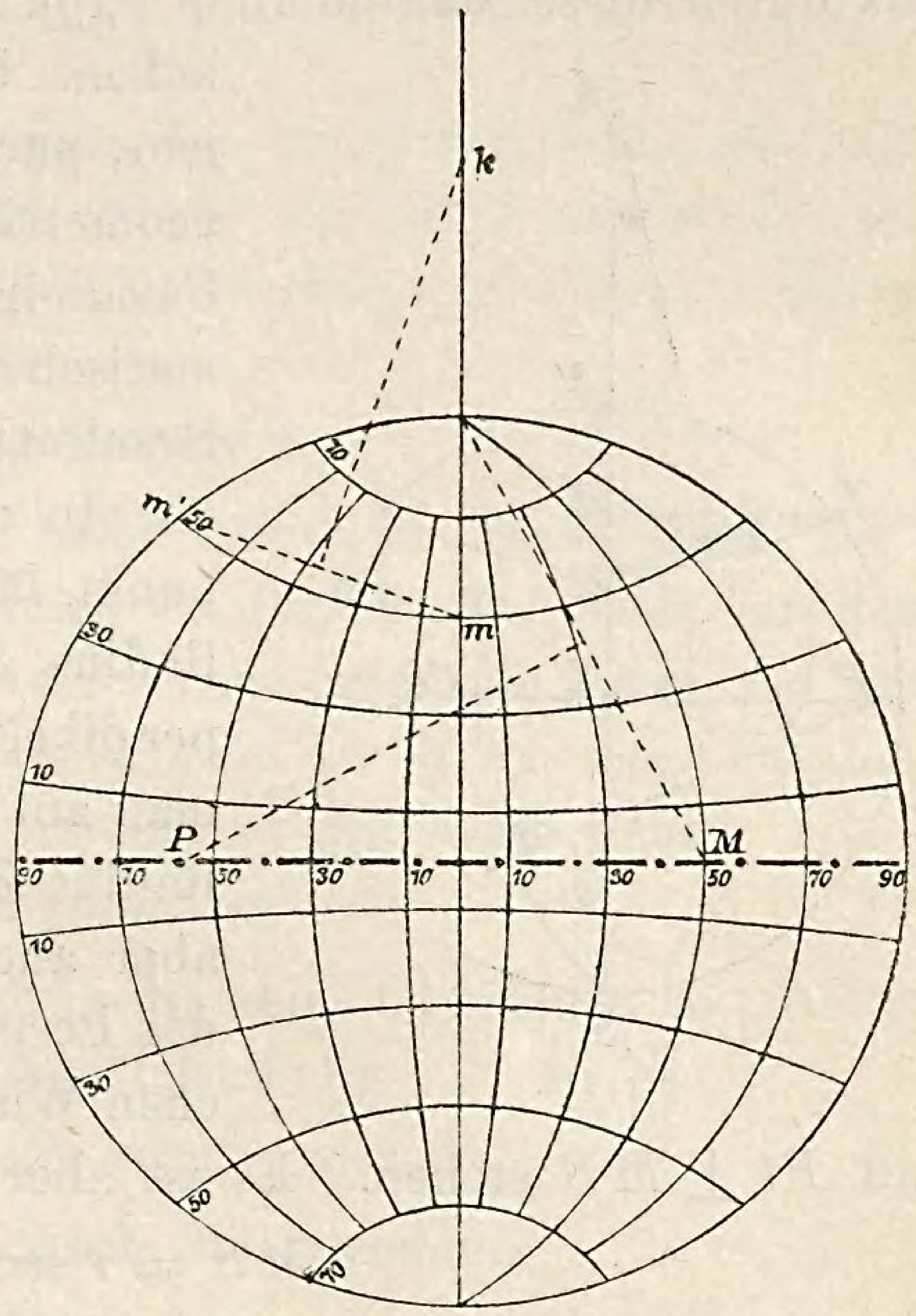


Fig. 117.

zu legen, so verbindet man $M = r \cdot 50 \cdot \frac{2}{\pi}$ mit einem der Pole. Das im Halbierungspunkt der Sehne aufgetragene Perpendikel schneidet die Zentrale resp. den Äquator in *P*. Dieser Schnittpunkt ist das Zentrum für den Meridian von *M*. In ihm setzt man den Zirkel ein, öffnet ihn nach dem Pol oder nach *M* und zeichnet mit dieser Zirkelweite den verlangten Meridian. In der geschilderten Weise entwirft man Parallel um Parallel, Meridian um Meridian. Die Einfachheit dieser Konstruktionsart und die gleichheitliche Teilung vom Nullmeridian und Äquator hat der Globularprojektion viele Freunde zugebracht und ihr zu häufigem Gebrauch verholfen. Noch weit leichter gestaltet sich nach ihren Prinzipien die Projektion einer Polarkarte; denn ein derartiges Kartennetz besteht nur aus äquidistanten konzentrischen Kreisen für die Parallelen und aus konvergierenden geraden Linien, welche die Meridiane vorstellen. Ein Muster hierzu bietet der innere Kreis der Sternprojektion S. 137.

Rechnende Bestimmung der Meridian- und Parallelmittelpunkte und Radien.

Keineswegs kann in Abrede gestellt werden, dafs mit dem häufigen Halbieren der Sehnen keine geringe Umständlichkeit verknüpft ist und dafs durch diese Manipulation Papier und Zeichnung sehr zu leiden haben. Um des Zirkels entraten zu können, suchen wir deshalb auch hier die geometrischen Linien, die Meridian- und Parallelradien samt ihren Zentren, mathematisch zu fixieren und die gewonnenen Resultate tabellarisch zu verwerten.

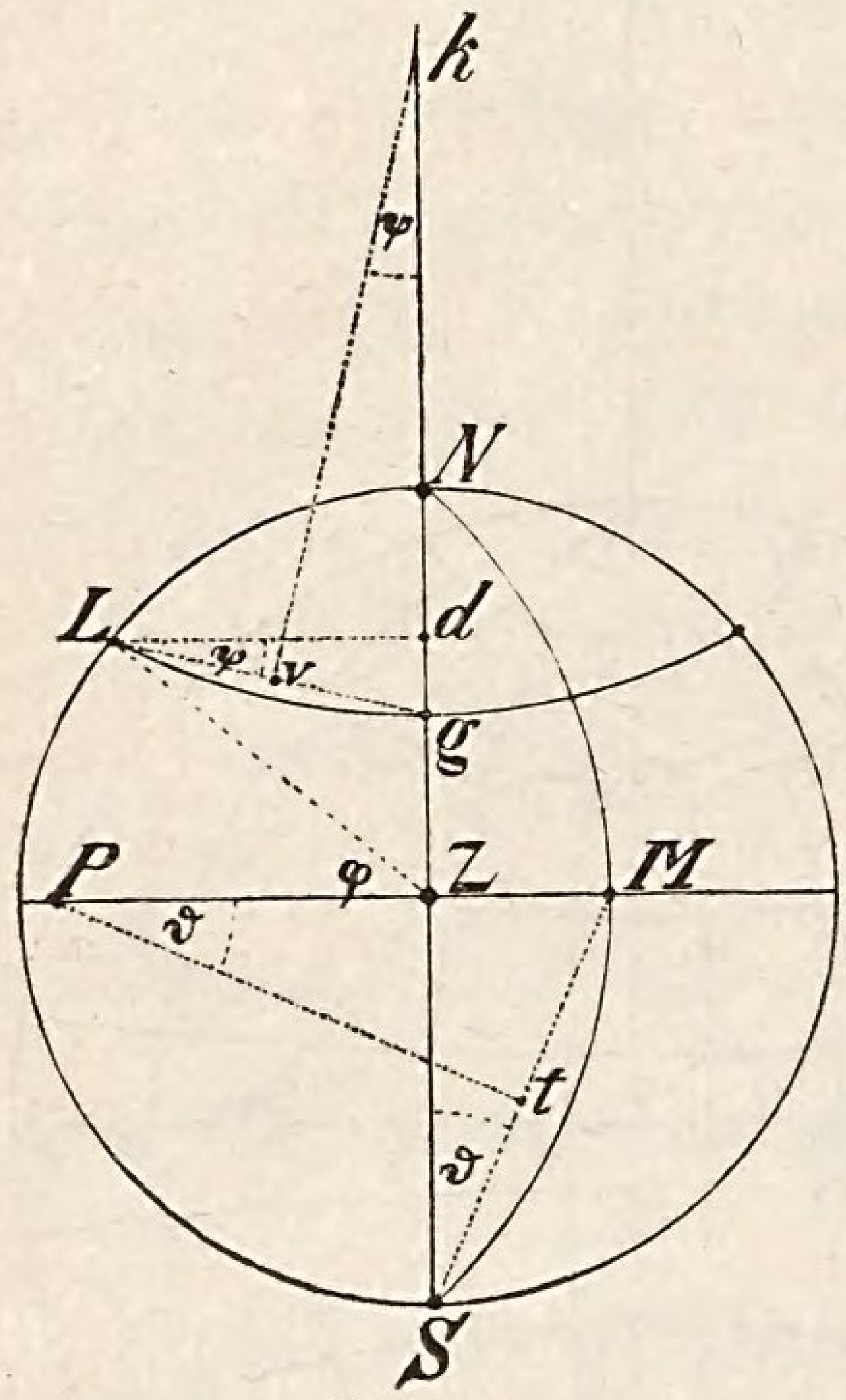


Fig. 118.

In der Figur 118 ist P der Mittelpunkt für den Meridian von M und der Radius MP oder PS. Durch das Perpendikel Pt inmitten der Sehne MS ist man auf P gekommen. Sehne MS und Radius ZS schliefsen den Winkel ϑ ein, aber auch der Meridianradius MP und das Perpendikel Pt stehen um den gleichen Winkel auseinander, da $PZ \perp ZS$ und $Pt \perp MS$ stehen. Es ist aber nach S. 38

$$MS = r \sec \vartheta$$

$$Mt = \tfrac{1}{2} MS = \tfrac{1}{2} r \sec \vartheta$$

und dann der Radius $MP = \tfrac{1}{2} r \sec \vartheta \cdot \operatorname{cosec} \vartheta$.

Bezeichnen wir die Entfernung des Meridianmittelpunktes P vom Kartenmittelpunkt Z nämlich PZ mit x, so ist

$$x = \tfrac{1}{2} r \sec \vartheta \cdot \operatorname{cosec} \vartheta - MZ.$$

Da M von Z um λ^0 entfernt liegt und $1^0 = \frac{2}{\pi} \cdot r$ ist, so ist

$MZ = r\lambda \cdot \frac{2}{\pi}$ und endlich

$$x = \tfrac{1}{2} r \sec \vartheta \cdot \operatorname{cosec} \vartheta - r\lambda \frac{2}{\pi}.$$

Zur Berechnung des numerischen Wertes der vorstehenden Gleichung fehlt noch der Wert des Winkels ϑ. Dessen Gröfse können wir aus dem rechtwinkligen Dreieck MZS nach S. 41 leicht entnehmen, denn

$$\frac{MZ}{SZ} = \lambda \cdot \frac{2r}{\pi \cdot r} = \lambda \cdot \frac{2}{\pi} = \tan \vartheta.$$

Die Tabelle X[a] gibt den Winkel ϑ, den Meridianradius

$$MR = \tfrac{1}{2} \sec\left(\tan\vartheta = \lambda \cdot \frac{2}{\pi}\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\tan\vartheta = \lambda \cdot \frac{2}{\pi}\right)$$

und die Abszisse für die Zentra:

$$x = \tfrac{1}{2} \sec\vartheta \cdot \operatorname{cosec}\vartheta - \lambda \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Der Mittelpunkt für den Parallel Lg von der Breite φ ist k und der Radius kg. Lotrecht auf der Sehne Lg steht die Gerade kv, welche mit dem Radius kg den spitzen Winkel ψ einschliefst. Es ist dann kg oder der Parallelradius

$$PR = gv \cdot \operatorname{cosec}\psi.$$

In dieser Gleichung ist die halbe Sehne gv ihrem Werte nach ebenso wenig bekannt als der Winkel ψ, dürften aber beide aus dem rechtwinkligen Dreieck Ldg zu erforschen sein; da $kd \perp Ld$ und $kv \perp Lg$ ruhen, so ist $\sphericalangle vkg = \sphericalangle gLd = \sphericalangle \psi$. Der Parallelradius Ld ist gleich $r \cos\varphi$ und somit ist die halbe Sehne

$$gv = \tfrac{1}{2} r \cos\varphi \cdot \sec\psi.$$

Substituieren wir diesen Wert in die obige Gleichung, so erhalten wir für den Parallelradius die neue Gleichung

$$PR = \tfrac{1}{2} r \cos\varphi \cdot \sec\psi \cdot \operatorname{cosec}\psi.$$

Der Winkel ψ ergibt sich durch die Gleichung

$$\frac{dg}{Ld} = \frac{dg}{r\cos\varphi} = \tan\psi,$$

bei welcher Gleichung die Strecke dg wiederum als Unbekannte figuriert. In dem rechtwinkligen Dreieck LdZ ist Winkel $LZd = 90 - \varphi$, darum

$$Zd = r\cos(90 - \varphi) = r \sin\varphi.$$

Ferner ist $Zg = \frac{2\varphi}{\pi} \cdot r$, da $1^0 = \frac{2}{\pi} \cdot r$ am Mittelmeridian ist. Mithin ist die unbekannte Strecke

$$dg = Zd - Zg = r\sin\varphi - r\varphi \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Die Strecke Zk d. i. die Entfernung des Parallelmittelpunktes vom Kartenmittelpunkte Z, ist die Ordinate

$$y = kg + Zg = \tfrac{1}{2} r \cos\varphi \cdot \sec\psi \cdot \operatorname{cosec}\psi + r\varphi \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Setzen wir den für dg gefundenen Wert in die Gleichung für $\tan\psi$ ein, so erhalten wir einen mathematischen Ausdruck mit lauter bekannten Elementen.

Es ist dann

$$\tan\psi = \frac{r\sin\varphi - r\varphi\cdot\frac{2}{\pi}}{r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\varphi\cdot\frac{2}{\pi}}{\cos\varphi}$$

oder auch

$$\tan\psi = \tan\varphi - \varphi\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \tan\varphi - \varphi\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot\sec\varphi\right)$$

Die Tabelle X^b gibt den Winkel ψ, den Parallelradius

$$PR = {}^1/_2\cos\varphi\cdot\sec\left[\tan\psi = \tan\varphi - \varphi\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sec\varphi\right)\right]\operatorname{cosec}\left[\tan\psi = \tan\varphi - \varphi\left(\frac{2}{\pi}\sec\varphi\right)\right]$$

und die Ordinate

$$y = {}^1/_2\cos\varphi\cdot\sec\psi\cdot\operatorname{cosec}\psi + \varphi\cdot\frac{2}{\pi}\cdot$$

Von den Meridianzentren, die durch die Abszisse x sich finden lassen, öffnet man den Zirkel gegen einen der Pole und beschreibt mit diesen Zirkelöffnungen, welche den Meridianradien entsprechen, die Meridiane selbst. Auf die Parallelmittelpunkte führt die Ordinate y. Von ihnen öffnet man den Zirkel gegen die Gradabschnitte, die am äufsern Meridian mit dem Transporteur aufzutragen sind, oder gegen die Teilpunkte $\frac{2\varphi r}{\pi}$, $\frac{4\varphi r}{\pi}\cdots$ am Mittelmeridian und beschreibt mit diesen Zirkelöffnungen, welche die Parallelradien selber sind, die zu erstellenden Parallelkreise.

Merkators Projektion.

Gerhard Kremer, einer der gröfsten von den darstellenden Geographen, wandelte seinen deutschen Namen in den lateinischen Merkator um. Dieser Mann wurde 1512 zu Rüpelmünde in Ostflandern geboren und starb 1594 zu Duisburg am Rhein. Das Netz, das seinen Namen trägt, gehört in die Klasse der Cylinderprojektionen, nach welchen man sich die Erde mit einem Cylinder umlegt vorzustellen hat, auf den das Liniensystem der Kugel zu übertragen ist. Wickelt man den mit den Meridianen und Parallelen umsponnenen Cylinder ab, so erhält man ein Netz, das sämtliche Maschen in geraden Linien enthält und befähigt ist, die ganze Erdoberfläche in einem unzerteilten Bild in sich aufzunehmen. Weil aber bei solcher Übertragung der Breiten- und Längenkreise gar leicht ein Mifsverhältnis zwischen Orginal und Abbild entstehen kann, wenn nicht das Verhältnis der Länge zur Breite gewahrt bleibt, so verfuhr

Merkator bei Erstellung seines Netzes in der Cylinderprojektion nach dem Grundsatz: „*Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem*“ d. i. zu deutsch: „Wir haben die Breitengrade gegen die beiden Pole in dem Maſse vergröſsert als wir die Parallelen über ihr Verhältnis zum Äquator hinaus haben anwachsen lassen.“ Nach diesem Prinzipe werden die Parallelkreise zu Haupt- oder gröſsten Kreisen und ihre Grade dadurch so groſs als wie die Äquator- oder Meridiangrade sind.

Figur 119 stellt ein von einem Globus abgelöstes Spitzbtatt ABC vor. Darüber ist ein paralleler Streifen $BMNC$ gelegt. Die Länge BC ist auf dem Spitzblatt wie auf dem Parallelstreifen gleich groſs. Tragen wir bb', cc', dd' auf denselben über, aldann lassen wir diese Strecken über ihr Verhältnis hinaus, das sie zum Äquator haben, anwachsen. Denn aus

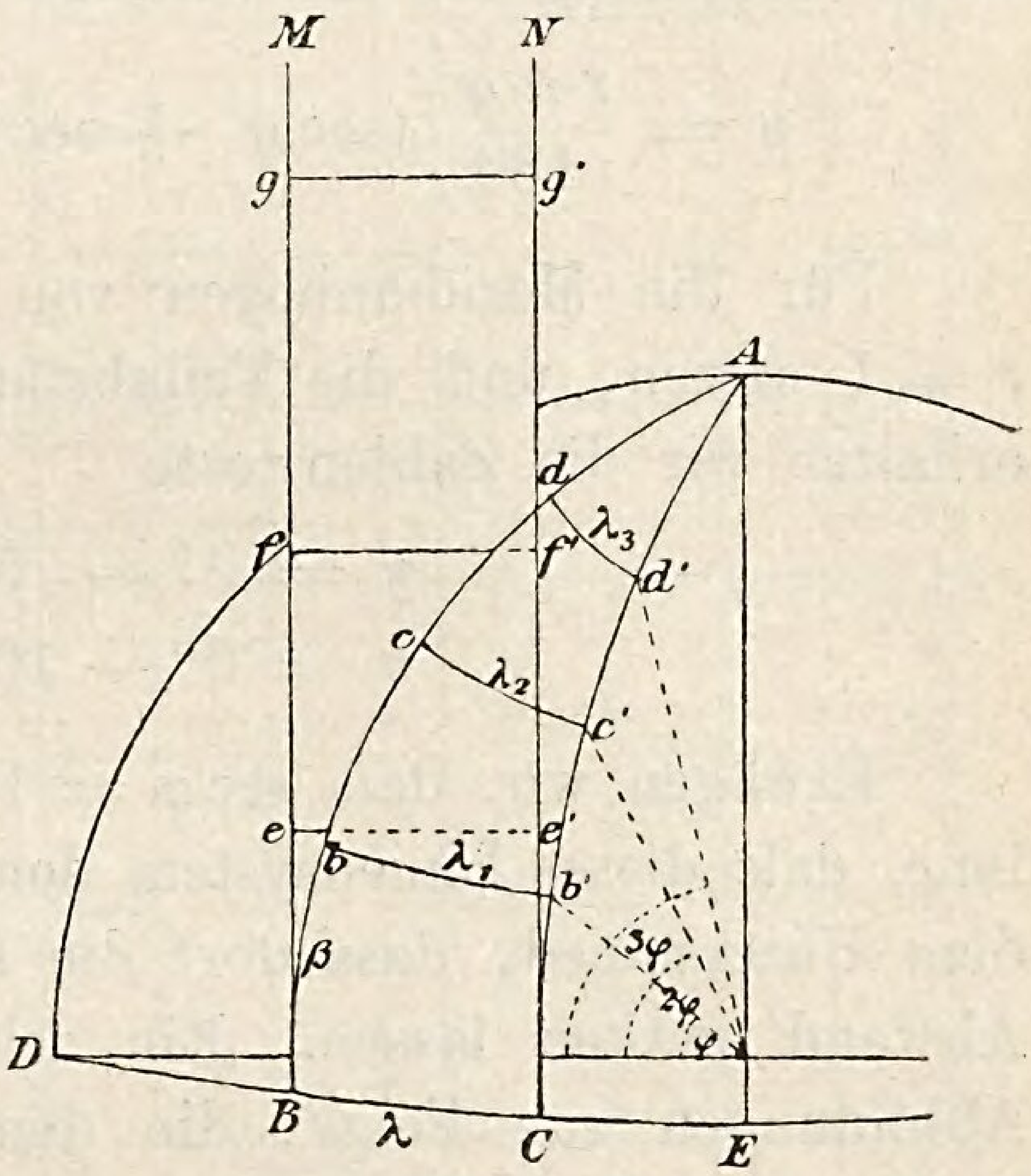


Fig. 119.

$bb' = \lambda_1$ wird $ee' = \lambda = \lambda_1 \sec\varphi$

$cc' = \lambda_2$ „ $ff' = \lambda = \lambda_2 \sec 2\varphi$

$dd' = \lambda_3$ „ $gg' = \lambda = \lambda_3 \sec 3\varphi$.

In demselben Maſse sollen die Breitengrade gegen den Pol hin vergröſsert werden, nämlich durch $\sec\varphi = 1 : \cos\varphi$. Es darf daher die Strecke Be nicht so groſs wie $Bb = \beta$ werden, nein sie muſs in gleicher Weise auch durch $\sec\varphi$ vervielfacht werden. Es ist dann

$$Be = Bb \cdot \sec\varphi = \beta \sec\varphi.$$

Nimmermehr darf Bf so viel als $Bc = 2\beta$ betragen, seine Länge muſs wachsen und sein

$$Bf = Bb \cdot \sec\varphi + bc \cdot \sec 2\varphi = \beta(\sec\varphi + \sec 2\varphi).$$

Ingleichen ist dann

$$Bg = Bb \cdot \sec\varphi + bc \cdot \sec 2\varphi + cd \cdot \sec 3\varphi = \beta(\sec\varphi + \sec 2\varphi + \sec 3\varphi).$$

Fassen wir die Strecke Bg als die Ordinate y, die sich von 0 bis 3φ erstreckt, auf, so können wir der vorstehenden Gleichung die Form geben:

$$y = \beta(\sec\varphi + \sec 2\varphi + \sec 3\varphi).$$

Denken wir uns φ oder den Bogen $Bb = \beta$ in eine Anzahl kleiner, gleich grofser Bogen φ_1, $2\varphi_1$, $3\varphi_1$... zerlegt, so ist

$$y = (\beta \sec\varphi_1 + \sec 2\varphi_1 + \sec 3\varphi_1 \ldots \sec\varphi).$$

Um die vorstehende Gleichung berechnen zu können, ist es nötig den Wert von β, welcher kleine Bogen dem Teilwinkel φ_1 entspricht, zu bestimmen. Für denselben erhalten wir aus der Proportion $360^0 : \varphi_1 = 2r\pi : \beta$

$$\beta = \frac{r\pi\varphi_1}{180}.$$

Substituieren wir diesen für β gefundenen Wert, so erhält die obige Gleichung für die Ordinate die Form

$$y = \frac{r\pi\varphi_1}{180}(\sec\varphi_1 + \sec 2\varphi_1 + \sec 3\varphi_1 \ldots \sec\varphi).$$

Für die Meridianbogen von $0 - 5^0$ und $0 - 10^0$, wenn wir $r = 1$ setzen, und die Teilabstände von Grad zu Grad nehmen, erhalten wir die Zahlenwerte

$$y = 0^0 - 5^0 = 0{,}0874$$
$$y = 0^0 - 10^0 = 0{,}1755.$$

Erwägen wir, dafs $\sec\varphi = 1 : \cos\varphi$ ist, so werden wir alsbald inne, dafs dieses Liniensystem dem der Kugel konform ist, doch mit dem Unterschied, dass dort die Längen, hier die Breiten gleichen Abstand merken lassen. Ein seinem Original konformes Netz hat Abbildungen zur Folge, die dem Original auch in den kleinsten Teilen ähnlich sind. Hierdurch hat Merkator seine Aufgabe in vollem Mafse gelöst und ein Netz geschaffen, das für Seekarten sich bis zur Stunde am tauglichsten erwiesen hat. Denn die Anordnung dieses Liniensystems bringt es mit sich, dafs Linien, welche, wie die Kompafslinien es thun, die Meridiane stets unter demselben Winkel schneiden, im Merkatornetz gerade Linien bleiben; während sie auf der Kugel zwischen 0^0 und 90^0 zu Spiralen werden, welche um den Pol herumgehen ohne ihn je selbst — mathematisch gesprochen — zu erreichen. Da der Weg eines in derselben Richtung segelnden Schiffes eine solche Linie ist, die man deshalb Loxodromie oder Linie des schiefen Laufes nennt, so läfst sich leicht einsehen, welcher Vorteil dem Seefahrer durch Karten zugeht, auf welchen eine gerade Linie ihm zeigt, wohin er mit Einhaltung seines Courses gelangen mufs.

Hat man nach obigem Beispiel die Abstände der Breitengrade gefunden, so zieht man eine horizontale Linie, welche den Äquator vorstellt (Fig. 120), und teilt sie in die Abschnitte, welche den Gradabschnitten λ, 2λ, 3λ u. s. w., entsprechen. Durch die Teilpunkte legt man parallele, zum Äquator im rechten Winkel sich befindliche Gerade. An je zwei Meridiane trägt man die Ordinate y nach den Sekantensummen für die entsprechenden Breitengrade φ, 2φ, 3φ . . . ab und zieht durch sie gerade Linien. Dieselben laufen mit dem Äquator parallel und schneiden die Meridiane im rechten Winkel. Die Pole sind der parallelen Linien halber nicht darstellbar. Die Konstruktion ist höchst einfach, da man es nur mit geraden Linien zu thun hat.

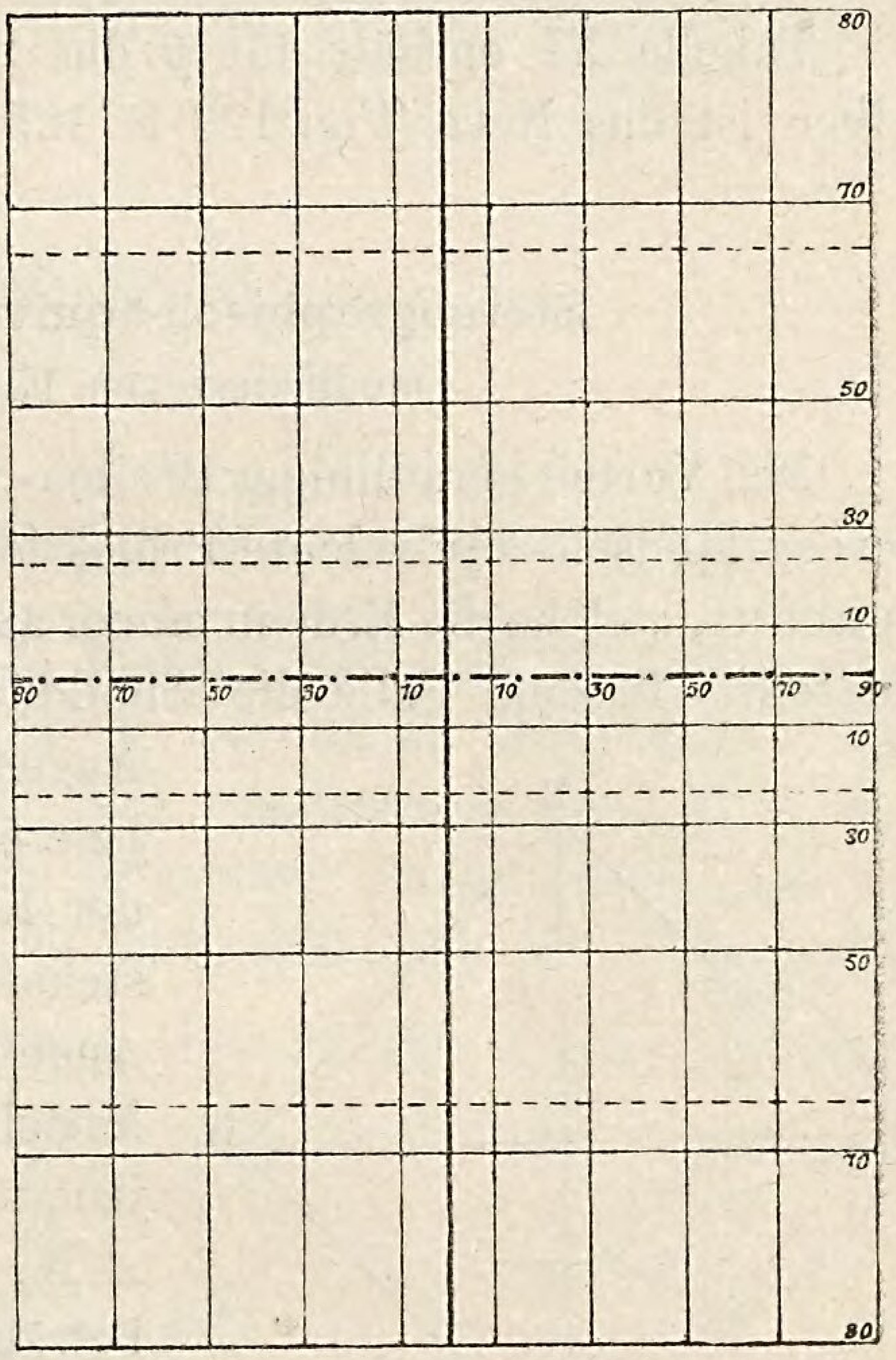


Fig. 120.

Zugestanden mufs freilich werden, dafs die Berechnung der Ordinate y, wenn genaue Resultate erzielt werden sollen, und deshalb die Ausrechnung nicht von Grad zu Grad, sondern wenigstens von Minute zu Minute nur fortschreiten darf, höchst langwierig und zeitraubend ist. Nach der Integralrechnung ist es aber möglich, Summen von Gröfsen, die in aufserordentlich kleinen Schritten wachsen, in einen kurzen Ausdruck zu fassen, und hierdurch eine wünschenswerte Vereinfachung zu bezwecken. Nach ihr ist, wenn sich die Ordinate von 0 bis φ erstrecken soll

$$\left(\pi \frac{\varphi_1}{180}\right) \cdot (\sec\varphi_1 + \sec 2\varphi_1 + \sec 3\varphi_1 \ldots \sec\varphi) =$$

$$r \int_0^{\varphi} d\varphi \sec\varphi = r \operatorname{Lg} \tan (45^0 + {}^1\!/_2\, \varphi).$$

Mit Lg ist der lg naturalis, nicht der Brigg'sche oder Dezimal-Logarithmus = lg verstanden. Nun ist der lg vulgaris 10 = 1 und der lg naturalis 10 = 2,30258. Natürlicher Logarithmus und

Briggischer müssen zu einander in einem unveränderlichen Verhältnis stehen, weshalb wir in den Ansatz bringen können

$$\mathrm{Lg}\, z : \lg z = 2{,}30259 : 1.$$

Hieraus ergibt sich, dafs

$$\mathrm{Lg}\, z = 2{,}30259 \lg z \quad \text{ist.}$$

Um mit Brigg'schen Logarithmen operieren zu können, geben wir der obigen Gleichung für die Ordinate die Form:

$$y = 2{,}30259\, r \lg \tan (45^0 + {}^1\!/_2\, \varphi).$$

Tabelle XI enthält für y die berechneten Werte. Nach derselben ist das Netz (Fig. 120 S. 125) gefertigt.

Stereographisch-äquivalente Projektion
modifiziert von E. Collignon.

Den Vorteil geradliniger Breiten- und Längengrade bietet auch die stereographisch-äquivalente Projektion des Geniekapitäns Prépetit-Foucaut, welche die Erde in einem auf einer Spitze ruhenden Vierecke darstellt. In dem Falle die Abbildung stereographisch ist, hat der Augenpunkt diametral dem zu projizierenden Punkt, der als Zentrum der Karte bestimmt ist, gegenüberzustehen. Ist nach Figur 121 W der Augenpunkt, A der zu projizierende Mittelpunkt der Abbildung, so projiziert sich der Meridianbogen An als AN, welche Gerade nach S. 107 $2r$ beträgt. Die Projektion Am, welche Strecke dem Bogen von der Breite φ entspricht, ist:

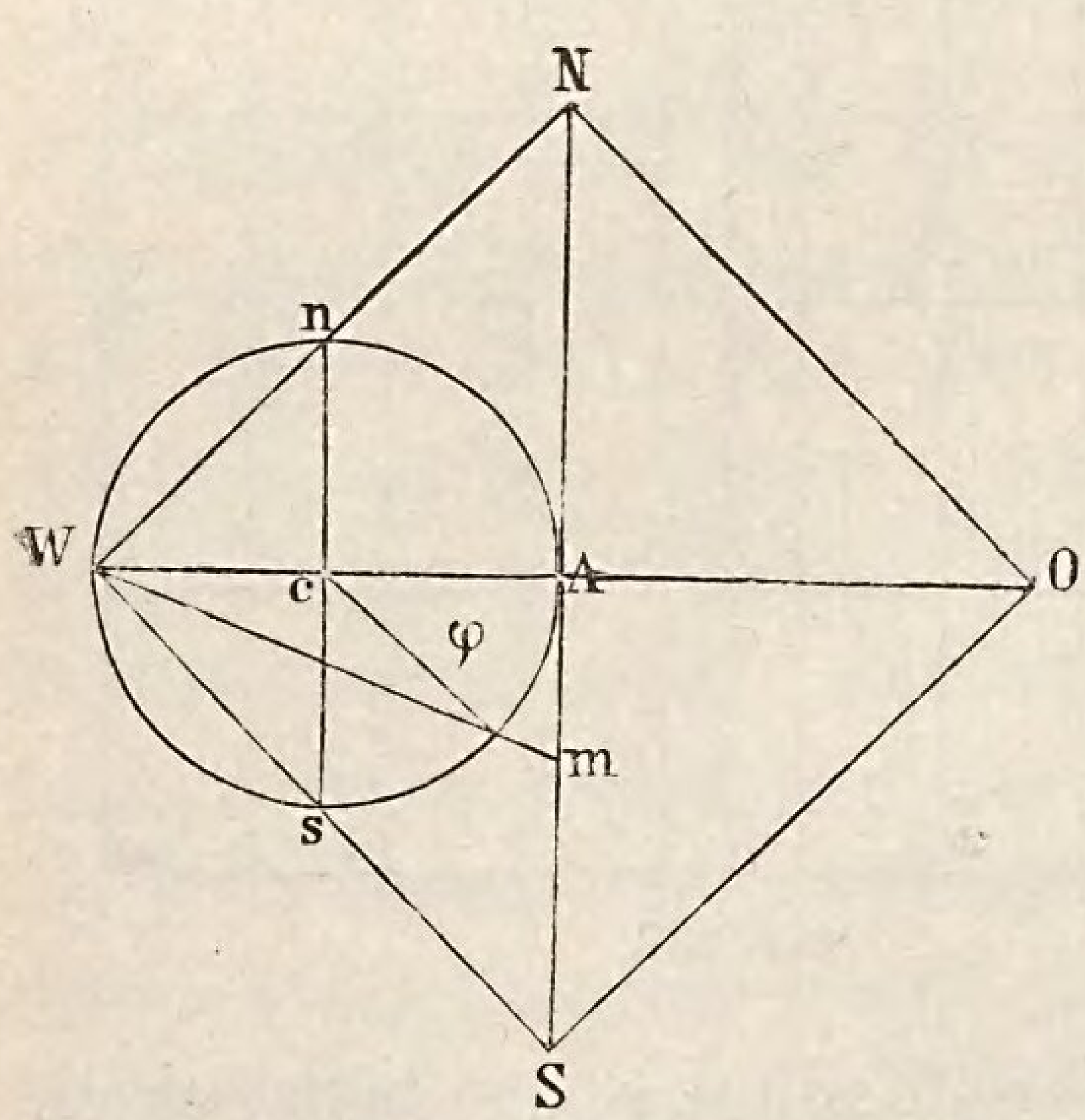


Fig. 121.

$$2\, r \tan {}^1\!/_2\, \varphi.$$

Bezeichnen wir AN mit y, alsdann ist nach vorstehender Gleichung

$$y = 2\, r \tan 45 = 2\, r.$$

Die Projektion vom Äquator, da er durch den Augenpunkt läuft, ist eine unbegrenzte Gerade. Bei der stereographischen Projektion, bei welcher das Abbild dem Original auch in den kleinsten Teilen zu entsprechen hat, würde $x = AO = y$ sein. Da aber die Äquivalenz mit hereingezogen werden soll, so hat vornehmlich

jedes Flächenstück der Karte seinem Originale gleich zu sein.

Bleiben wir vorläufig bei der Annahme $AN = AS = AW = AO = y = x$ und verknüpfen wir die Punkte W, N, O, S durch gerade Linien, so erhalten wir ein auf der Spitze ruhendes Quadrat. Dieses stellt die Hälfte der Kugeloberfläche $WsAn$ dar. Nach der Äquivalenz hat es denselben Flächenraum zu umspannen als wie die Halbkugel selbst. Nun ist nach S. 34 die Oberfläche einer Halbkugel $2r^2\pi$ und die eines Kugelquadranten $r^2\pi$. Das Dreieck WNO, dessen Inhalt $\frac{2x \cdot y}{2}$ ist, hat einem Kugelquadranten Genüge zu thun. Sohin ist:

$$x \cdot y = r^2\pi$$

oder, da sich y als $2r$ herausgestellt hat,

$$2rx = r^2\pi,$$

woraus folgt, dafs

$$x = \frac{r}{2}\pi \text{ ist.}$$

Damit fällt das Quadrat, das Viereck wird zum Rhombus oder zur Raute. Collignons Verdienst ist es, durch Modifikation der Abszisse und Ordinate der Figur ihre quadratische Gestalt zu belassen, indem er die Ordinate in demselben Mafse verringerte als er die Abszisse anwachsen liefs, so dafs schliefslich $x' = y'$ wurde. Benützen wir für die Umrechnung den Faktor $\frac{\varrho}{1}$, so ist nach Collignons Annahme

$$x \cdot \frac{\varrho}{1} = y \cdot \frac{1}{\varrho}$$

oder auch

$$\left(\frac{r}{2}\pi\right)\varrho = \frac{2r}{\varrho}.$$

Aus letzterer Gleichung stellt sich für diesen Faktor $\frac{\varrho}{1}$ der Wert $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ heraus.

Erweitern wir hierdurch $\frac{r}{2}\pi$ und verringern wir dadurch $2r$, so gelangen wir zu dem befriedigenden Resultat, dafs

$$x' = r\sqrt{\pi} = y' \text{ ist}^{*}).$$

*) $\frac{r\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = r\sqrt{\pi}$ und $2r : \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{2r\sqrt{\pi}}{2} = r\sqrt{\pi}$.

Hat man somit die Abszisse für 90° gefunden, so bedarf es nur noch einer gleichheitlichen den Meridianabständen entsprechenden Teilung. Die erhaltenen Teilpunkte verknüpft man sowohl mit dem Nord- als Südpol und man erhält, wie Figur 123 zeigt, die Meridiane mit Ausnahme des Mittelmeridians in geraden schiefen Linien.

Figur 122 gibt mit AON einen Kugeloktanten. Die Parallelkreise sollen durch gerade parallele Linien der Forderung gemäfs erstellt werden. Die Gerade mn ist sohin ein Parallelkreis von der Breite φ. Wie kommt man aber auf den Punkt m am Mittelmeridian ON, durch welchen der Parallel mn von der Breite φ zu legen ist? Also. In N errichtet man auf AN die Senkrechte NB. Mit dem Radius $r\sqrt{\pi}$ schlägt man von N aus den Bogen OB. Hierauf zieht man zu BN durch m die Parallele hm. In dem Parallelogramm $NBhr$ ist Winkel BNh gleich dem Winkel Nhr als innerer Wechselwinkel. Der Zentriwinkel, welcher mit dem Peripheriewinkel $Nhr = BNh$ auf gleichem Bogen ruht und durch den nur die geographische Breite $90° - \varphi$ bestimmt werden kann, beträgt nach S. 19 das Doppelte des erwähnten Peripheriewinkels oder aber sein Bogen ist nicht Bh, sondern $2Bh = Bk$. Dem Schnittpunkt m genügt darum am Mittagskreis nicht der Punkt h sondern k. So ist die Stelle k, weil m entsprechend, gleichfalls von der Breite φ und der Zentriwinkel, welcher dem Bogen Bk gleichkommt, mifst mit obiger Behauptung übereinstimmend, $90 - \varphi$ Grade. Um nun von k oder der Breite φ auf den Schnittpunkt m zu gelangen, halbiert man den Bogen $90 - \varphi$. Durch den Halbierungspunkt h zieht man zu NB eine Parallele hm, welche den Mittelmeridian in m schneidet. Dieser Schnittpunkt entspricht, wie wir im Verlaufe der Darstellung zu sehen Gelegenheit hatten, dem Punkte k oder der Breite φ, so dafs nichts weiter mehr übrig bleibt als durch m zu AO eine Parallele zu legen und der Parallelkreis von der Breite φ in gerader Linie ist erstellt. In dieser Weise bethätigt man die Konstruktion aller gewollten Parallelkreise.

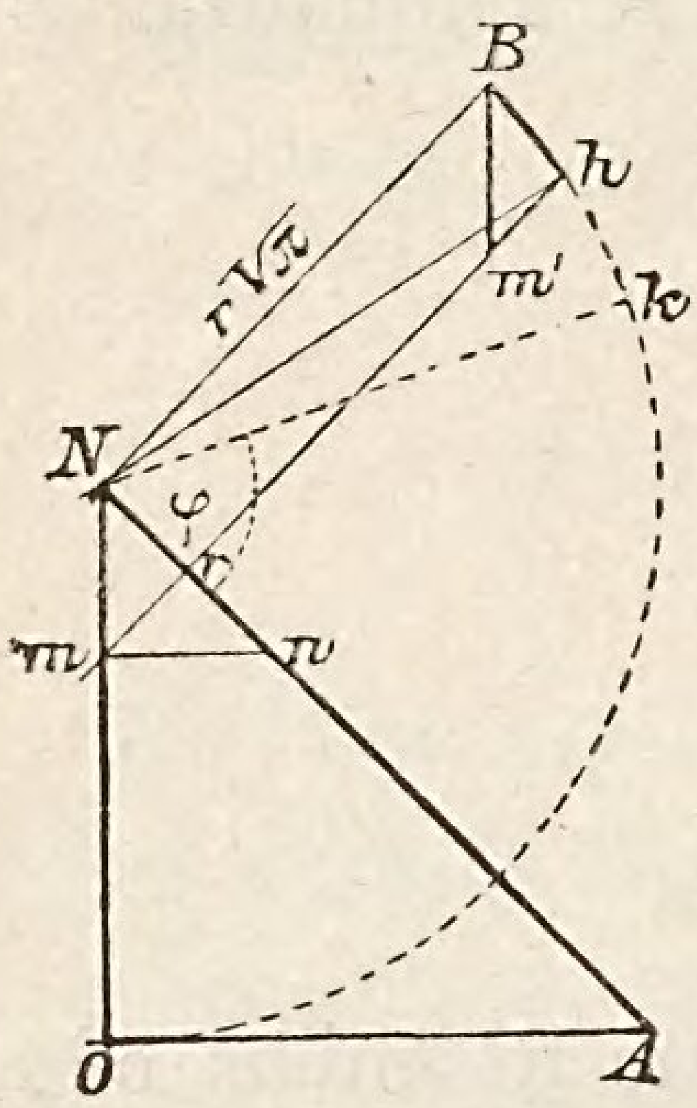


Fig. 122.

Die mathematische Fixierung der Schnittpunkte am Mittelmeridian bereitet keine Schwierigkeit. Bei jedem Parallel ist $y' = x'$, also auch im Dreieck Nmn (Fig. 122) ist $y' = x'$ oder $Nm = mn$.

Die parallele Linie rh steht wie NB auf AN senkrecht, eben deshalb mufs sie nach S. 8 den rechten Winkel Nmn des gleichschenkligen Dreiecks Nmn und damit die Grundlinie Nn halbieren.

In dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck AON ist der Winkel bei A dem Winkel bei N gleich. Durch die Senkreckte mr ist der rechte Winkel Nmn halbiert. Somit sind die Winkel an der Grundlinie Nm des Dreiecks Nrm einander gleich und das Teildreieck Nrm ist wiederum ein rechtwinklig gleichschenkliges. Die Strecke Bh ist gleich der Strecke Nr, da beide Längen sich innerhalb der Parallellinien NB und rh befinden. Ziehen wir Bm' parallel zu Nm, so ist aus dem gleichen Grund $Bm' = Nm$ und Winkel $m'Bh$ = Winkel mNr. Da die Dreiecke Nrm und Bhm' in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent und die Dreiecksseiten vom Dreieck Nrm lassen sich auch am Dreieck Bhm' bestimmen. Gesucht soll werden der Schnittpunkt m, bekannt ist $ON = y$. Bezeichnen wir die Ordinate von m allgemein durch y_1, so ist

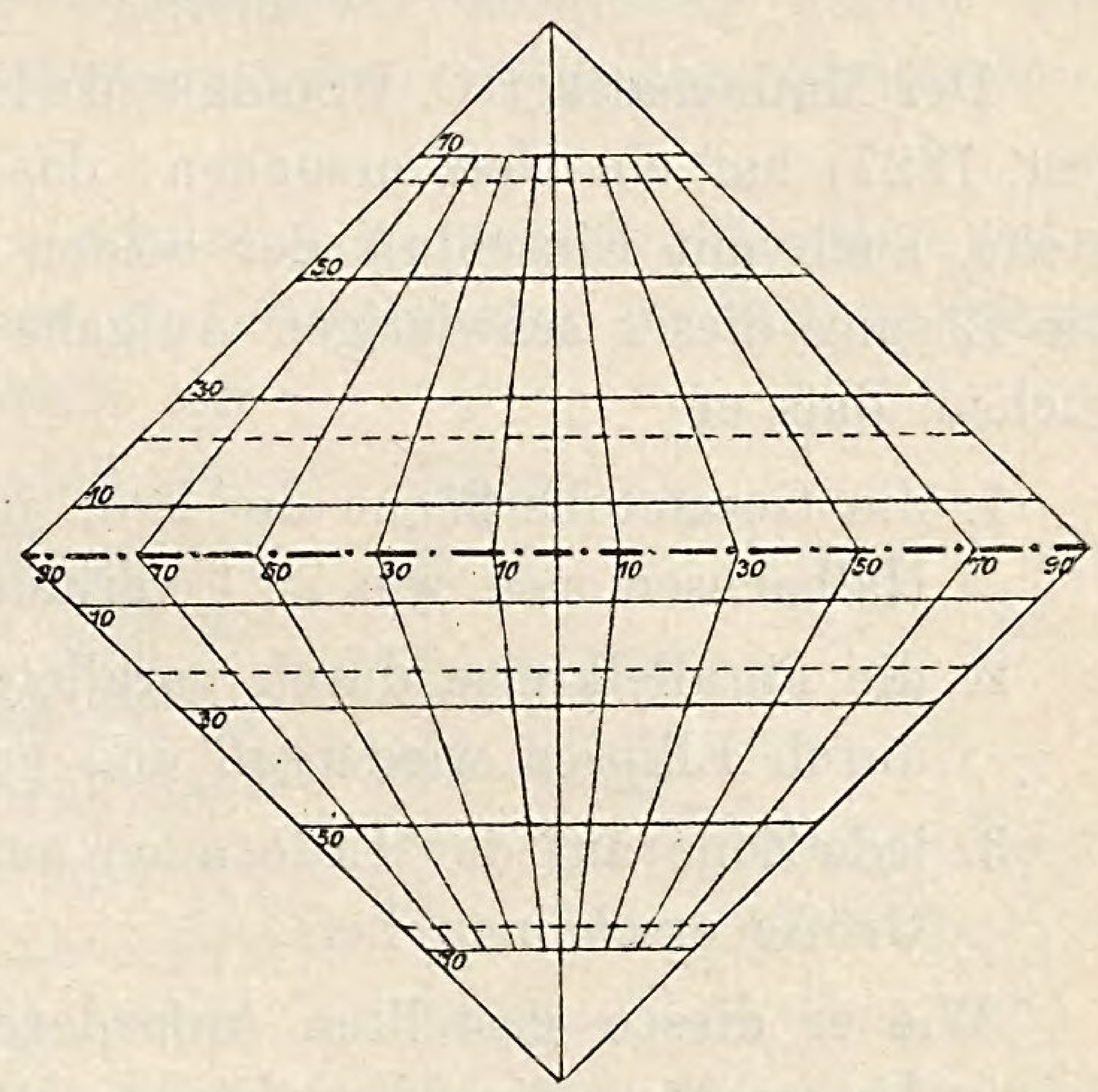


Fig. 123.

$$y_1 = y - Nm = r\sqrt{\pi} - Nm.$$

Den Wert von Nm suchen wir aus dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck Bhm' zu erforschen, da $Nm = Bm'$ ist. Die Kathete Bh gehört auch noch dem rechtwinkligen Dreieck BhN an, deren gegenüberliegender Winkel $BNh = \frac{1}{2}(90 - \varphi) = 45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ ist. In demselben ist

$$Bh = r\sqrt{\pi} \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck Bhm' ist

$$Bm' = Nm = Bh \cdot \operatorname{cosec} 45^0 = r\sqrt{\pi} \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{cosec} 45^0.$$

Oder, da nach S. 38 $\operatorname{cosec} 45^0 = \sqrt{2}$ ist,

$$Nm = \sqrt{2}\, r\sqrt{\pi} \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Es ist aber $y_1 = y - Nm,$

also $y_1 = r\sqrt{\pi} - [r\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)]$

oder auch $y_1 = r\sqrt{\pi}\,[1 - \sqrt{2}\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)].$

Ein nach dieser Projektion angefertigtes Netz zeigt Figur 123 S. 129.

Die berechneten Werte für $y_1 = 1 - \sqrt{2}\sin(45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ gibt die Tabelle XII.

Projektion von Mollweide *).

Der Mathematiker C. Brandan Mollweide aus Halle (geb. 1774 gest. 1827) hat ein Netz ersonnen, das fähig ist, die Gesamtoberfläche, auch mit Einschlufs der beiden Pole, in sich aufzunehmen. Die Lösung dieser schwierigen Aufgabe suchte er dadurch zu erreichen, dafs er

1. die Gesamtoberfläche der Erde in Form einer Ellipse, deren Halbachsen sich wie 2 : 1 verhalten, abbildete;
2. die Parallelkreise durch parallele Gerade und die Meridiane durch Ellipsen wiedergab und endlich
3. jede Zone auf der Erde auch auf der Karte in ihrer wahren Gröfse erscheinen liefs.

Wie er diesen gestellten Anforderungen an sein Netz gerecht zu werden suchte, dies darzulegen, ist Aufgabe unserer weiteren Abhandlung.

A. Bestimmung der Gröfse der Ellipsenachsen nach dem Verhältnis 2:1.

Die kleine Achse, welche den Mittelmeridian vorzustellen hat, sei $2b$, alsdann ist die grofse Achse $2a$ in diesem Falle $4b$. Für die Ellipsenfläche ergibt sich nach S. 68

$$J = 2b^2\pi.$$

Diese Ellipsenfläche hat die Kugelfläche, die stets $4r^2\pi$ beträgt, in sich ganz und gar aufzunehmen. Sohin hat

die Ellipsenfläche $2b^2\pi$ der Kugelfläche $4r^2\pi$

vollkommen zu entsprechen, wodurch wir zu der Gleichung kommen:

$$2b^2\pi = 4r^2\pi,$$

*) v. Zachs monatliche Korrespondenz Bd. 12 S. 152 u. ff. (August 1805).

aus welcher für b und damit für a oder $2b$ hervorgeht, dafs

$$b = r\sqrt{2} \text{ und}$$

$$a = 2b = 2r\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Damit sind beide Halbachsen vollständig bestimmt, so dafs durch sie die Ellipse, welche die Gesamtoberfläche aufzunehmen und die Karte abzugrenzen hat, gegeben und konstruierbar ist.

B. Konstruktion der Parallelkreise.

Da die Parallelen der aufgestellten Forderung gemäfs zum Äquator gleichlaufende Gerade sein sollen, so ist ihre Konstruktion ungemein einfach.

Den Mittelmeridian durchschneiden sie rechtwinklig. Man bedarf zu ihrer Erstellung einzig nur die Schnittpunkte an ihm zu wissen, um durch sie parallele Gerade zur grofsen Achse, die den Äquator vorstellt, legen zu können. Bei Figur 124 ist e solch ein Schnittpunkt und ec ein Parallelkreis. Verlängern wir ec nach d, so haben wir die halbe Ellipsenzone $oace$ und im Durchschnitt die entsprechende halbe Kugelzone $oade$ vor uns. Der gestellten Aufgabe zufolge soll die Kugelzone auf der Karte in ihrer richtigen Gröfse erscheinen.

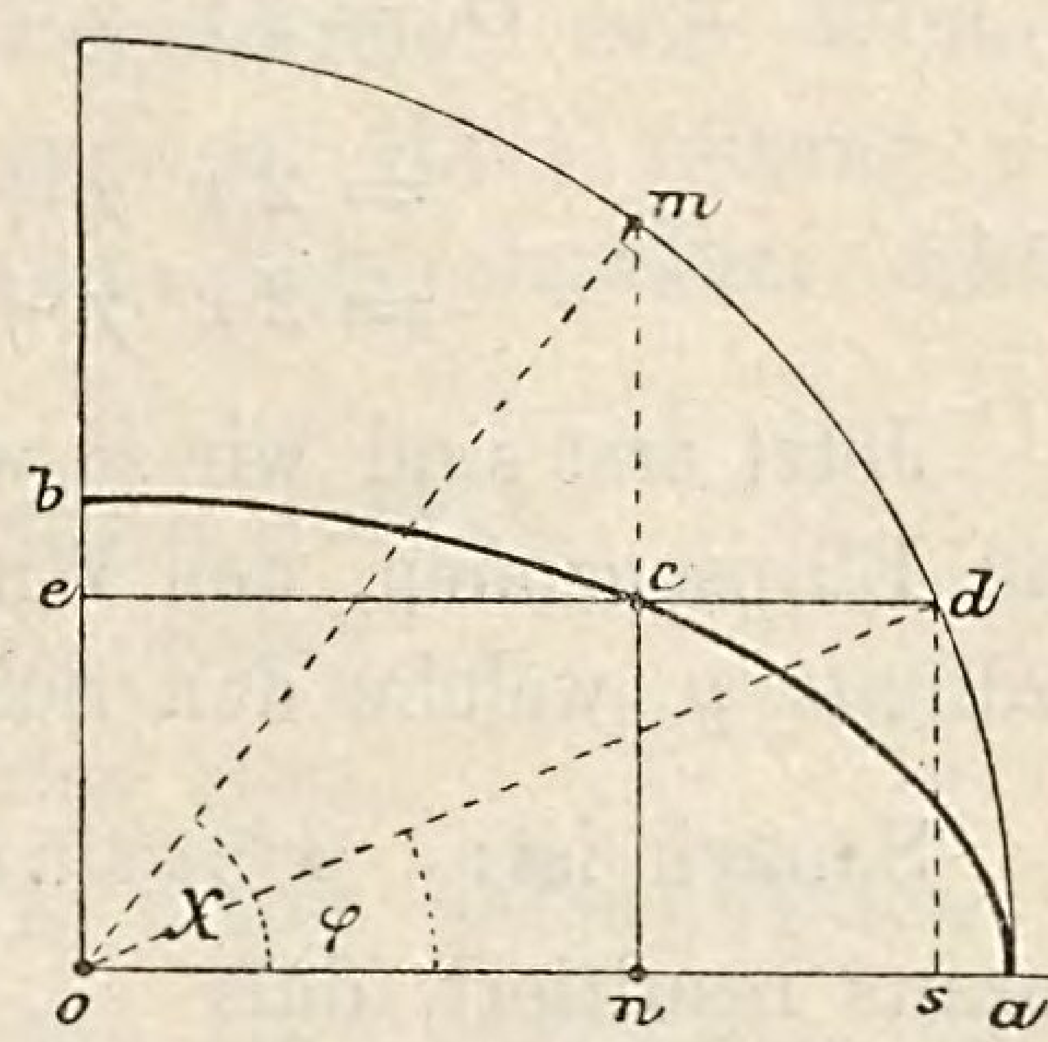


Fig. 124.

Nach S. 33 beträgt diese halbe Kugelzone $oade$

$$O = r\pi \cdot h$$

oder, da $h = ds = r \sin \varphi$ ist:

$$O = r^2 \pi \sin \varphi.$$

Nun gilt es die halbe Ellipsenfläche $oacb$ und damit den Schnittpunkt e, welcher in ihr liegt und durch den Parallelabstand oe bezeichnet wird, zu erforschen, um für sämtliche Schnittpunkte oder Parallelabstände einen allgemeinen Ausdruck zu finden. Verlängern wir cn nach m, so wird die Ellipsenordinate zur Kreisordinate, die beide in einem unveränderlichen Verhältnis zu einander stehen. Ziehen wir den Radius $om = r$, so erhalten wir den Zentriwinkel χ.

Dann ist

$$on = x = r \cos \chi \text{ und } mn = Y = r \sin \chi.$$

Nach S. 47 ist der Flächeninhalt des Kreissegmentes *amn*

$$J = \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{arc} am - \tfrac{1}{2} x \cdot Y$$

und alsdann der des Ellipsensegments *acn* nach S. 68

$$J = \frac{2 r \sqrt{2} \cdot r \sqrt{2} \operatorname{arc} am - \tfrac{1}{2} x \cdot y}{2}$$

$$= 2 r^2 \operatorname{arc} am - \tfrac{1}{2} x \cdot y.$$

Fügen wir diesem Segment noch das Parallelogramm *once* = $x \cdot y$ hinzu, so haben wir die gewollte halbe Ellipsenzone *oace*, also

$$O = 2 r^2 \operatorname{arc} am - \tfrac{1}{2} x \cdot y + x \cdot y$$

$$= 2 r^2 \operatorname{arc} am + \tfrac{1}{2} x \cdot y.$$

Setzen wir arc $am = \measuredangle \chi$, nach S. 67 $x = 2 r \sqrt{2} \cos \chi$ und $y = r \sqrt{2} \sin \chi$, so können wir der vorstehenden Formel auch die Gestalt geben:

$$O = 2 r^2 \chi + \frac{2 r \sqrt{2} \cos \chi \cdot r \sqrt{2} \sin \chi}{2}$$

$$= 2 r^2 \chi + r^2\, 2 \cos \chi \sin \chi$$

$$= 2 r^2 \chi + r^2 \sin 2 \chi \text{ *)}.$$

Jetzt erst sind wir so weit, durch Gegenüberstellung von Kugel- und Ellipsenzonen, den Winkel χ und damit die von ihm abhängige Ordinate y, welche den Schnittpunkt e bestimmt, zu ermitteln.

Sonach ist: $r^2 \pi \sin \varphi = 2 r^2 \chi + r^2 \sin 2 \chi$

woraus resultiert, dafs

$$\sin 2 \chi + 2 \chi = \pi \sin \varphi \quad \text{ist.}$$

Über die Berechnung der vorstehenden Formel äufsert sich Mollweide im zwölften Band der monatlichen Korrespondenz von Freiherrn v. Zach S. 158 ff. also:

„Um χ aus der Gleichung direkt zu finden, würde man sich der unendlichen Reihen bedienen müssen; allein dies Verfahren ist beschwerlich. Man wird also lieber nach Eulers Beispiel in der Introduct. in analys. infinit. Lib. II § 531 eine doppelte Positio falsi oder vielmehr prope veri anwenden, und, vermittelst der dabei sich ergebenden Fehler, durch einfache Interpolation, χ nach und nach genauer bestimmen. Doch um hierbei nicht aufs Geratewohl zu operieren, hat man Grenzen des Wertes von χ zu suchen, und diese ergeben sich leicht so:

*) Nach S. 158 ist

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \,.\, \cos \alpha + \cos \alpha \,.\, \sin \alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha.$

Es ist $\sin 2\chi < 2\chi$, also $2\chi + \sin 2\chi < 4\chi$

mithin $4\chi > \pi \sin \varphi$ und

$$\chi > {}^1\!/\!_4\, \pi \sin \varphi.$$

Ebenfalls ist $2 \sin 2\chi < 2\chi + \sin 2\chi$ d. i.

$$2 \sin 2\chi < \pi \sin \varphi \text{ und}$$

$$\chi < {}^1\!/\!_2 \text{ arc} (\sin = {}^1\!/\!_2\, \pi \sin \varphi).$$

Die letzte Bestimmung ist freilich nur so lange brauchbar, als ${}^1\!/\!_2\, \pi \sin \varphi < 1$ ist. Aber wenn man ein für allemal eine Tafel der Werte von χ, welche denen von φ von 10^0 zu 10^0 oder von 5^0 zu 5^0 zugehören, berechnen will, so läſst sich schon einigermaſsen aus den drei ersten Werten von χ auf den nächsten, und, wenn dieser genau gefunden ist, auf den folgenden u. s. w. schlieſsen."

Da die Gleichung $\sin 2\chi + 2\chi = \pi \sin \varphi$ in die Kategorie der transzendenten Gleichungen gehört, bei welchen neben den algebraischen Ausdrücken auch noch Logarithmen und Winkelfunktionen vorkommen, so muſs man sich zu ihrer Lösung der Differentialrechnung bedienen. Den ersten Näherungswert erhält man, indem man in Ansatz bringt

$$\chi < {}^1\!/\!_2 \text{ arc sin} ({}^1\!/\!_2\, \pi \sin \varphi) = a \text{ (etwa)}$$

$$\chi > {}^1\!/\!_4\, \pi \sin \varphi = b \text{ (etwa)}.$$

Dann ist $a > \chi > b$, also etwa

$$\chi = {}^1\!/\!_2 (a + b) = \chi_1 \text{ erster Näherungswert*)}.$$

Auf die nächsten Näherungswerte führt die Taylor'sche Reihe mit Anwendung der Newton'schen Methode:

$$f(\chi) = \sin 2\chi + 2\chi - \pi \sin \varphi = o,$$

*) Der erste Näherungswert für $\varphi = 30^0$ ergibt sich in folgender Weise:

1. $\chi = a$

$$a = {}^1\!/\!_2 \text{ arc sin} (1{,}57 . \sin 30^0)$$
$$= {}^1\!/\!_2 \text{ arc sin } 0{,}785.$$

Aus der Tafel der natürlichen goniometrischen Funktionen erhält man für sin 0,785 den Winkelwert $51^0\ 40'$, so daſs

$$a = 25^0\ 50' \text{ ist.}$$

2. $\chi = b$

$$b = 0{,}785 . \sin 30^0 = 0{,}3925.$$

Die Zahl 0,3925 bezieht sich auf einen Kreisbogen mit dem Halbmesser 1 sohin ist nach der Proportion

$$6{,}283 : 0{,}3925 = 360 : b$$
$$b = 22^0\ 30'.$$

Der erste Näherungswert ist alsdann

$$\chi_1 = {}^1\!/\!_2 (25^0\ 50' + 22^0\ 30') = 24^0\ 10';\ \sin 24^0\ 10' = 0{,}40939.$$

dann ist der erste Differentialquotient nach χ

$$f'(\chi) = 2\cos 2\chi + 2 = 2\cdot(1+\cos 2\chi)$$

und der zweite Näherungswert

$$\chi_2 = \chi_1 - \frac{f'(\chi_1)}{f(\chi_1)}.$$

Der dritte Näherungswert ist

$$\chi_3 = \chi_2 - \frac{f'(\chi_2)}{f(\chi_2)} \text{ u. s. f.}$$

Durch einfache Substitution der Werte für χ, χ_1, χ_2 ... ergeben sich die numerischen Näherungswerte. Eine kleine Tafel für die Werte χ und $\sin\chi$ von 10 zu 10 Grad hat uns Mollweide selbst hinterlassen, eine genauere Tabelle für die Werte $\sin\chi$ von 30 Minuten zu 30 Minuten für φ fortschreitend verdanken wir Jules Bourdin. Ist sonach $\sin\chi$ bekannt, so gehen die Parallelabstände nach S. 132 aus der Gleichung hervor:

$$y = r\sqrt{2}\sin\chi.$$

Die Werte $y = 1\cdot\sin\chi$ von 5 zu 5 Grad gibt Tabelle XIII[a].

„Die Werte von $\sin\chi$ geben die Abstände der Parallelkreise vom Äquator an, wenn $r\sqrt{2}$ zur Einheit genommen wird, welches immer geschehen darf, da der Halbmesser der Kugel nur als Hilfsgröfse, worauf die übrigen leicht bezogen werden, in Rechnung kommt.“

Vom Äquator aus trägt man die Werte für $r\sqrt{2}\sin\chi$ am Mittelmeridian auf und zieht durch die Schnittpunkte zum Äquator gleichlaufende Linien, welche die Parallelkreise vorstellen (Fig. 126).

C. Konstruktion der Meridiane.

Der Forderung zufolge stellen die Meridiane Ellipsen dar, welche den Äquator in gleichgrofsen Abständen zu schneiden haben. Bekannte Ellipsenpunkte bilden Nord- und Südpol. Ihre Entfernung vom Kartenmittelpunkt bildet für die Meridianellipsen die grofse halbe Achse $r\sqrt{2}$, die Abschnitte am Äquator bieten hierzu die halben kleinen Achsen (Fig. 126). Dehnt sich die halbe kleine Achse auf 90^0 aus, so kommt sie der halben grofsen Achse gleich, umfafst sie nur 1^0, so schrumpft sie auf den 90. Teil ein, und ist gleich $\frac{1}{90}\cdot r\sqrt{2} = r\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\pi}$; bei einem Abschnitt von λ Graden umfafst sie die Länge $\lambda\cdot r\sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}$. So sind denn für den Meridian λ die Ellipsenpunkte die Pole und die halbe kleine Achse $\lambda\cdot r\sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}\cdot$ Nachdem sohin

für jeden Meridian die beiden halben Achsen durch $r\sqrt{2}$ und durch $\lambda \cdot r\sqrt{2}\,\frac{2}{\pi}$ gegeben sind, so sind auch die elliptischen Meridiankurven nach einem der vier im ersten Teil besprochenen Verfahren konstruierbar. Fassen wir jedoch vom Mittelkreis (Fig. 126) die halben Parallelen, wie wir es bei der orthographischen Meridianprojektion gethan haben, als Kreisordinaten auf, so können wir die Ellipsenelemente numerisch darstellen und von der mühsamen Ellipsenkonstruktion absehen.

Nach S. 65 ist die Kreisordinate

$$Y = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 - (r\sqrt{2})^2 . \sin\chi^2} = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 \cdot (1 - \sin\chi^2)} =$$
$$r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin\chi^2}$$

und die Ellipsenordinate, durch den Quotienten $\frac{b}{a} = \frac{2\lambda \cdot r\sqrt{2}}{\pi \cdot r\sqrt{2}} = \frac{2\lambda}{\pi}$ multipliziert, alsdann

$$y = \lambda \cdot r\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin\chi^2}\right)$$
$$= \lambda \cdot r\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin 2\chi^2}\right)$$
$$= \lambda \cdot r\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin 3\chi^2}\right) \text{ u. s. f.}$$

Die Tabelle XIII[b] gibt die Werte nach der Gleichung

$$y = 5\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin\chi^2}\right).$$

Eine Erleichterung verschafft man sich, wenn man eine Hilfsfigur, wie eine solche bei der orthographischen Projektion zur Sprache kam, beizieht. Mit der Strecke $r\sqrt{2}$ konstruiert man ein gleichseitiges Dreieck asa' (Fig. 125). Auf die Grundlinie aa' trägt man die Äquatorstrecken $\frac{2\lambda \cdot r\sqrt{2}}{\pi}$, $\frac{4\lambda \cdot r\sqrt{2}}{\pi}$, $\frac{6\lambda \cdot r\sqrt{2}}{\pi}$. . . auf und verbindet die Schnittpunkte, also in unserer Figur 10, 30, 50 . . ., mit der Spitze s.

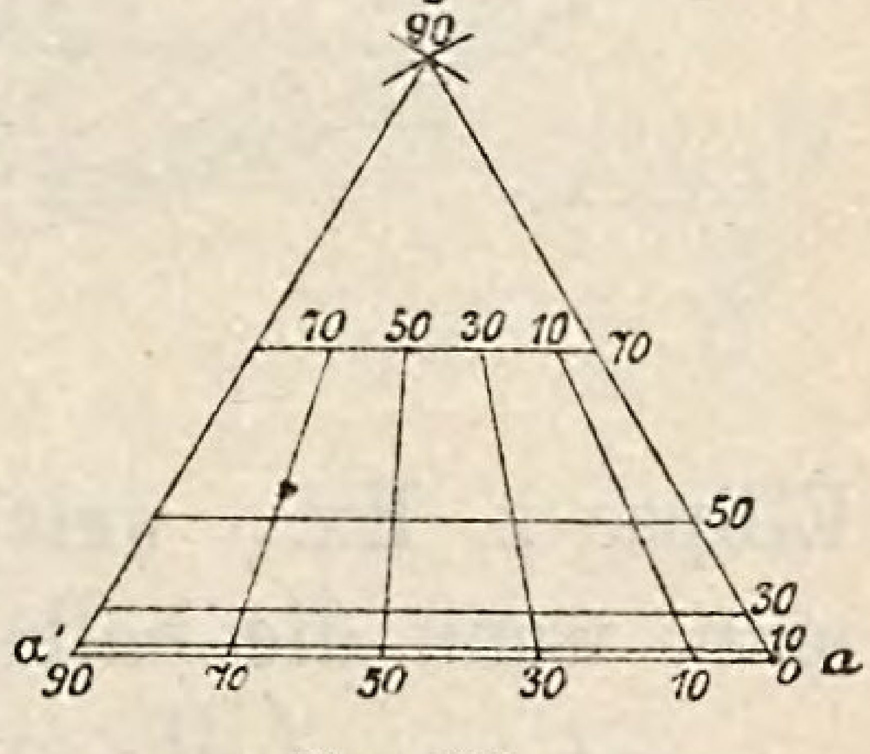


Fig. 125.

Von der Spitze aus trägt man auf die Seite as die Kreisordinaten $r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin 10^2}$, $r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin 30^2}$. . . ab und zieht zur Grundlinie parallele Linien, wodurch lauter gleichseitige, also einander ähnliche Dreiecke entstehen. So verhält sich dann

$$as : a_{70} = s_{10} : y$$

oder $r\sqrt{2} : \frac{2\lambda}{\pi} \cdot r\sqrt{2} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin 10^2} : y$

$$y = \lambda \cdot r\sqrt{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin 10^2}\right.$$

ferner $as : a_{70} = s_{30} : y$

oder $r\sqrt{2} : \frac{2\lambda}{\pi} \cdot r\sqrt{2} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin 30^2} : y$

$$y = \lambda \cdot r\sqrt{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin 30^2}\right) \text{ u. s. f.}$$

Vergleichen wir diese Werte mit den auf S. 135 gefundenen, so ist ihre Übereinstimmung auf den ersten Blick ersichtlich und die Richtigkeit unserer Hilfsfigur erwiesen. Die Schnittpunkte notiert man auf einen Streifen Papier und trägt sie einerseits vom Mittelmeridian, andrerseits vom 90. Meridian oder auch vom 180. Meridian aus auf die Parallelen über. Die Verbindung gleicher Längen also λ, 2λ, 3λ ... bringt die elliptischen Meridiankurven hervor. Figur 126 ist nach diesen Prinzipien gezeichnet. Für die

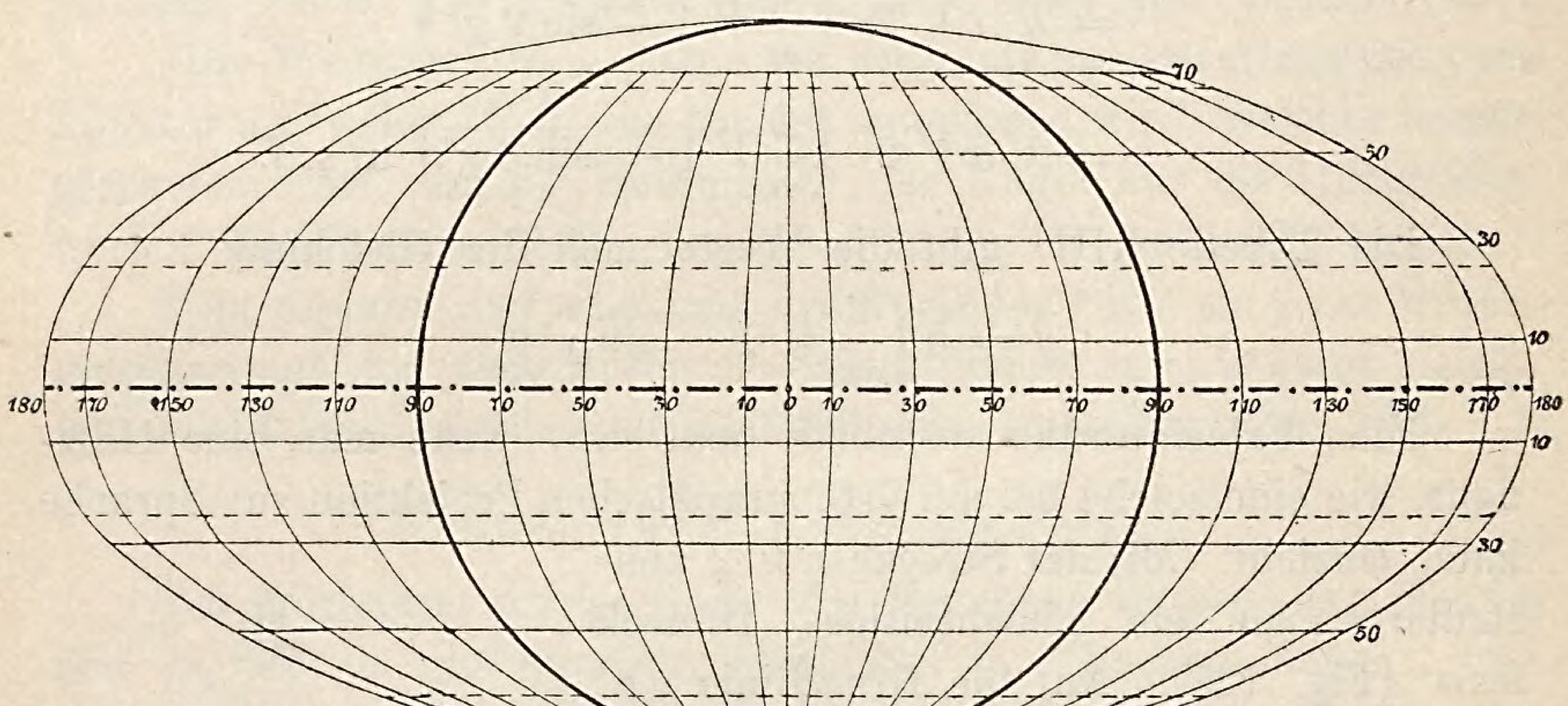


Fig. 126.

Ellipse z. Ex., welche den 70. Meridian vorzubilden hat, erhält man, wenn die halbe grofse Achse 27 mm mifst, nach der Gleichung $y = 27 \cdot 14 \cdot \left(\frac{10}{\pi}\sqrt{1 - \sin \chi^2}\right)$ oder mit Benützung der Tabelle XIII^b $y = 378 \cdot z$ die numerischen Werte $y_0 = 21^{mm}$; $y_{10} = 20{,}75^{mm}$; $y_{30} = 19^{mm}$; $y_{50} = 16^{mm}$; $y_{70} = 10{,}7^{mm}$. Diese Längen in Millimetern trägt man vom Mittelmeridian auf die betreffenden Parallelen ab und verbindet sie durch eine stetige krumme Linie. Dieselbe liefert den elliptischen 70. Meridiankreis.

Damit haben wir eine Projektionsart abgehandelt, welche befähigt ist, die ganze Erdoberfläche mit Inbegriff der Pole in sich aufzunehmen und von der Oskar Peschel in seiner Geschichte der Erdkunde behauptet, daſs sie als das Höchste gilt, was die Geometrie leisten kann.

Nimmt man den Mittelkreis als für sich bestehend heraus und konstruiert man ein ihm kongruentes Netz, so geben beide Kreise nebeneinandergestellt die Abbildung der Erde in Hemisphären.

Die Sternprojektion.

Diese Projektionsart liefert gleichfalls ganze Weltkarten. Die nördliche Hemisphäre ist kreisförmig, wie die Polarkarten zu sein

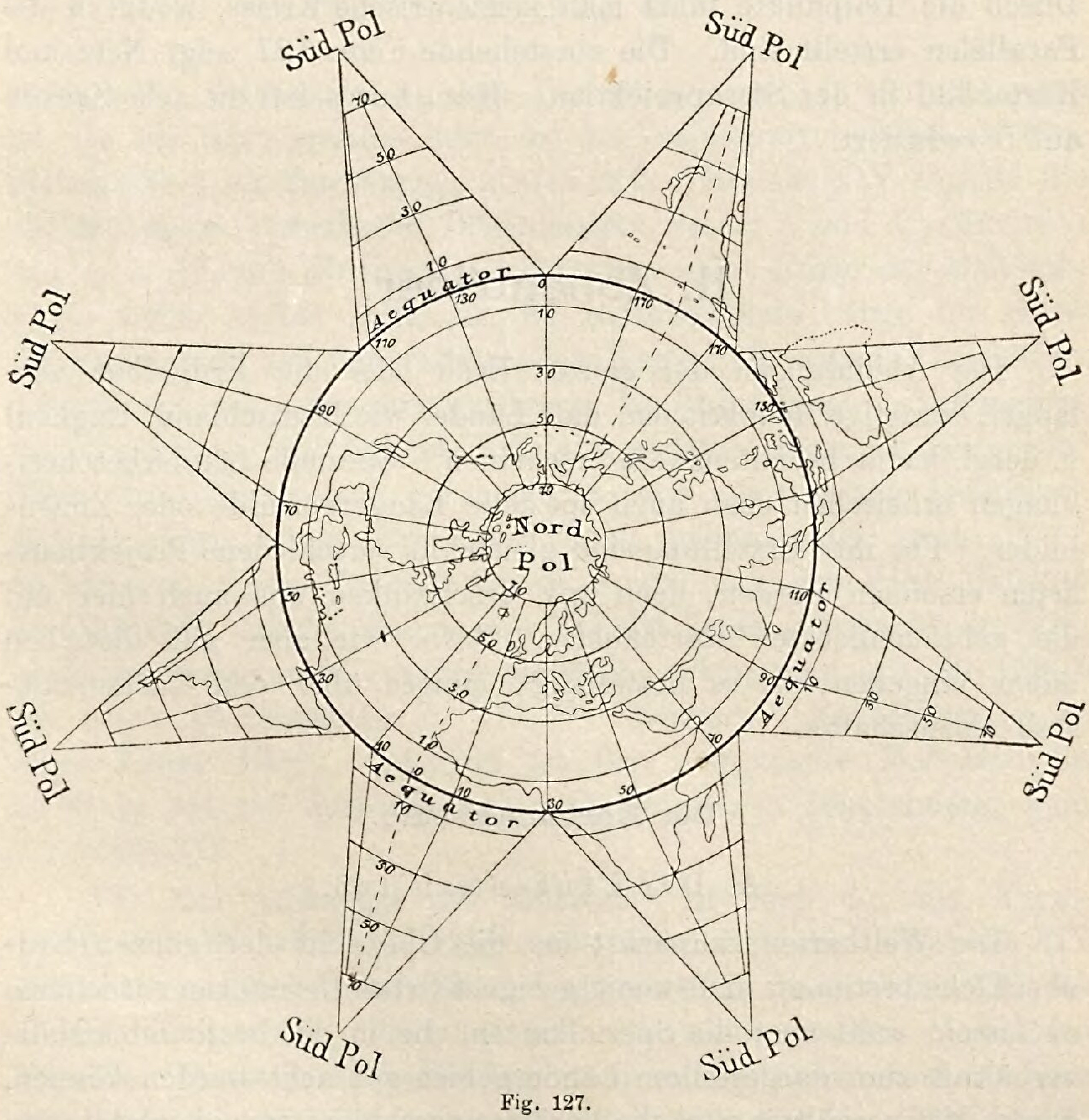


Fig. 127.

pflegen, die südliche ist in Zacken aufgelöst, wodurch das Netz eine Sternform, die der Projektion den Namen gegeben, erhalten

hat. Ihr Erfinder ist Dr. G. Jäger, Direktor des Tiergartens zu Wien. Bei ihm erschienen die Parallelkreise als achteckige Polygone, die Dr. A. Petermann in Kreise umwandelte. Die Konstruktion ist einfach. Von einem Mittelpunkt aus beschreibt man zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und $2r$. Den äufseren Kreis bringt man in acht gleiche Teile und konstruiert von ihnen aus die acht Zacken (Fig. 127). Die Bogengrade bestimmt man am innern Kreis mit dem Transporteur und verbindet die Schnittpunkte sowohl mit dem Sternzentrum als mit den einzelnen Spitzen der Zacken. Zur Erstellung der Parallelen teilt man irgend einen Meridianstrich bei dem Fortschreiten von 10^0 zu 10^0 in neun gleiche Teile sowohl innerhalb des Kreises als in irgend einem der Zacken. Durch die Teilpunkte führt man konzentrische Kreise, wodurch die Parallelen erstellt sind. Die vorstehende Figur 127 zeigt Netz und Kartenbild in der Sternprojektion. Berghaus hat die acht Zacken auf 5 reduziert.

II. Zonenbilder.

Die Abbildungen der ganzen Erde oder der Erdhalben verlangen derartige Reduktionen, dafs Länder wie Deutschland, England u. dergl. kaum beachtenswert erscheinen. Spezielle Länderbeschreibungen erheischen eben auch spezielle Ländergemälde oder Zonenbilder. Für ihre Erstellung sind gleichfalls verschiedene Projektionsarten ersonnen worden, doch wir beschränken uns auch hier auf die gebräuchlichsten Kartennetze. Bevor wir aber auf dieselben näher eingehen, ist es notwendig, einiges über den Kartenmafsstab einzuschalten.

Der Kartenmafsstab.

A. Der Längenmafsstab.

Die Weltkarten, zunächst für die Übersicht der ganzen Erdoberfläche bestimmt, sind wenig geeignet Ortsentfernungen entnehmen zu lassen, wohl aber die Spezialkarten, die in ein bestimmtes Mafsverhältnis zum dargestellten Ländergebiet gebracht werden können. Dieses Mafsverhältnis oder die Verjüngungszahl ist vom abzubildenden Land, wie auch von dem verfügbaren Raum abhängig. Erstreckt sich das erstere über x Längen- und über y Breitengrade, und

miſst ein Längengrad z. Ex. 91,28 $^{\mathrm{km}}$ und ein Breitengrad gleich einem Äquatorgrad 111,3 $^{\mathrm{km}}$, so ist die Ausdehnung in die Länge $91{,}28 \cdot x^{\mathrm{km}}$ und in die Breite $111{,}3 \cdot y^{\mathrm{km}}$. Betrüge der verfügbare Raum in die Länge λ^{mm} und die Breite φ^{mm}, so deuten die Quotienten $91{,}28\, x^{\mathrm{km}} : \lambda^{\mathrm{mm}} = m$ und $111{,}3 \cdot y^{\mathrm{km}} : \varphi^{\mathrm{mm}} = m'$ die Reduktion an. Je nachdem die Längen- oder Breitenausdehnung eines Landes den Ausschlag zu geben hat, wird man die eine oder andere Reduktionszahl oder auch das Mittel $\frac{m + m'}{2}$ beider, und zwar in einer abgerundeten Zahl, zu wählen haben. Nach der Gleichung

$$91{,}28 \cdot x : \lambda = m \quad \text{ist}$$

$$\lambda = 91{,}28 \cdot x \cdot \frac{1}{m},$$

so daſs die Verjüngung in dem Verhältnis $1 : m$ vor sich gegangen ist. In der Kartographie führt die die Verjüngung andeutende Verhältniszahl $1 : m$ den Namen Maſsstab. Tabelle XIV enthält die auf Millimeter reduzierten Bogenlängen von 1, 5 und 15 Minuten; von 1, 5, 10 und 20 Graden. Fehlt bei einer Karte der Maſsstab, so ist weiter nichts nötig als die entsprechende Länge für einen Bogenabschnitt auf der vorliegenden Karte mit dem Zirkel abzugreifen und am Transversalmaſsstab die Zirkelweite in Millimetern zu erforschen. Die Tabelle XIV gibt sodann, wenn die Länge der Weite nach Millimetern gefunden ist, den gewünschten Aufschluſs. Beträgt diese Länge für einen Grad nahezu oder auch 16 $^{\mathrm{mm}}$, so ist nach dieser Tabelle der in Anwendung gebrachte Maſsstab 1 : 7 000 000. Findet sich in der Tabelle keine entsprechende Zahl, so kommt man auch auf den Maſsstab, wenn man mit der Länge für einen Meridiangrad in 111,3 $^{\mathrm{km}}$ dividiert. Es betrage z. B. diese Länge 20 $^{\mathrm{mm}}$. Alsdann ist der angewandte Maſsstab, da 20 $^{\mathrm{mm}}$ in 111,3 $^{\mathrm{km}}$ 5 565 000 mal enthalten ist, in abgerundeter Zahl 1 : 5 560 000.

Für das Aufsuchen des Maſsstabes ist auch der sog. Kartometer in Gebrauch. Ihn erhält man, wenn man die in Tabelle XIV enthaltenen Längen auf einen Papierstreifen nach Figur 128 für 1^0 oder $1'$ u. dergl. überträgt und die entsprechenden Maſszahlen beisetzt. Diesen Meſsstreifen legt man an den Kartenrand, an dem die Meridiangrade abzulesen sind, oder noch besser an den Mittelmeridian der Karte selbst und sieht zu, welche Länge des Kartometers mit der der Karte übereinstimmt. Ist die Übereinstimmung

gefunden, so darf man nur die beigesetzte Zahl ablesen und man hat gleichfalls den Maſsstab, in welchem die vorliegende Karte erstellt ist. Miſst man den Abstand von 2, 3, 4 . . . Graden, so erhält man die Verhältniszahl, wenn man die beigesetzte Ziffer mit 2, 3, 4 . . . multipliziert. Deutet z. B. die Länge von 2 Graden auf die Reduktionszahl 3 500 000, so ist der Kartenmaſsstab 1 : 7 000 000.

Entspricht dagegen die Länge eines Grades auf dem Kartometer der Länge eines halben oder Viertelgrades auf der Karte, so wird die nebenstehende Reduktionszahl mit 2 bzw. mit 4 dividiert. Sollte dieselbe auf 5 000 000 lauten, so ist der Maſsstab der in Rede stehenden Karte im ersten Fall 1 : 2 500 000 im andern Fall 1 : 1 250 000.

Damit aber der Kartenleser Wegentfernungen aus der Karte selbst ohne weitere Manipulation abnehmen kann, fügt der Kartograph gemeiniglich einen in Kilometern nach den Reduktionsverhältnissen eingeteilten Linienmaſsstab bei. Die Anfertigung einer solchen Weglinie geschieht am einfachsten nach folgendem Schema:

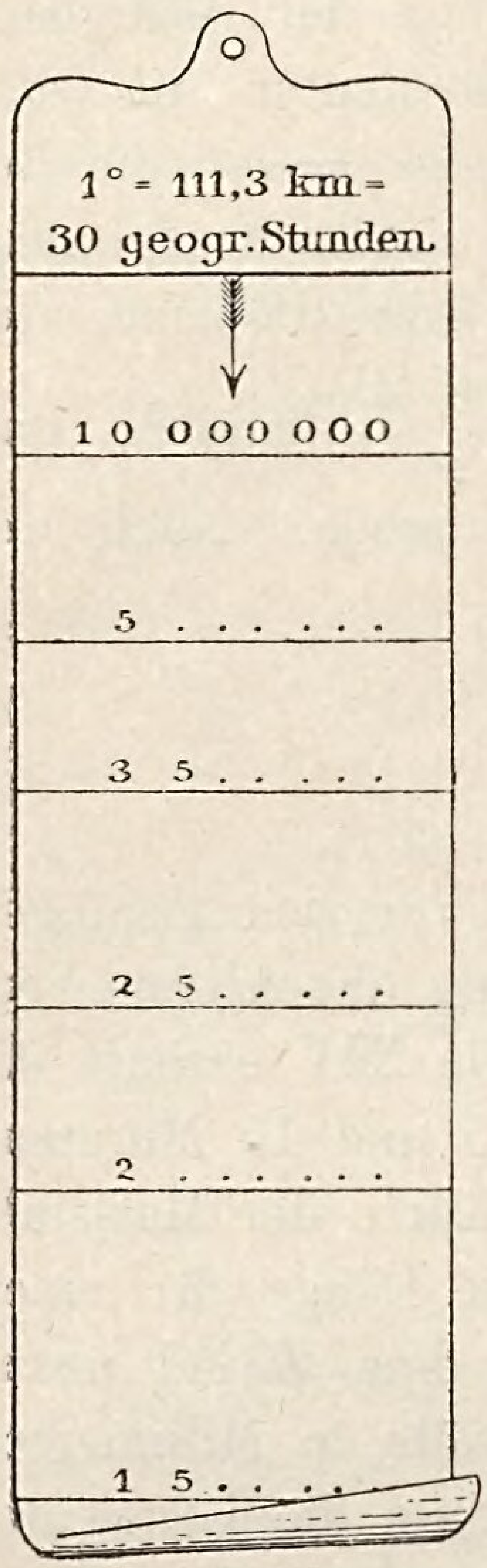


Fig. 128.

1. Maſsstab 1 : 1 000 000

$$1^{\text{km}} = 1^{\text{mm}}$$

2. Maſsstab 1 : 2

$$2^{\text{km}} = 1^{\text{mm}}$$

3. Maſsstab 1 : n

$$n^{\text{km}} = 1^{\text{mm}}$$

4. Maſsstab $1 : \frac{1 \ldots\ldots}{n}$

$$\frac{1^{\text{km}}}{n} = 1^{\text{mm}}.$$

Figur 129 stellt einen Linienmaſsstab nach der Reduktionszahl 1 : 1 000 000 vor. Nach der Verjüngungszahl 1 : 7 000 000 kommen

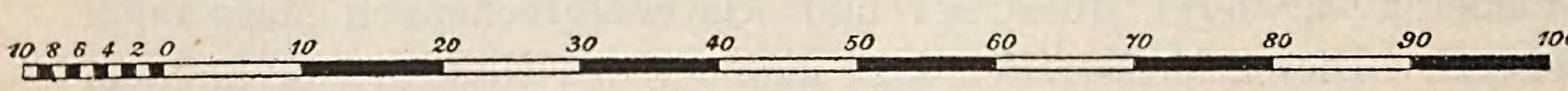


Fig. 129.

auf einen Millimeter 7^{km}; auf 50^{km} sodann $7{,}14^{\text{mm}}$ und auf 5^{km} $0{,}71^{\text{mm}}$. Nach diesen Werten, die sich bequem aus dem Trans-

versalmaſsstab entnehmen lassen, ist der Linienmaſsstab (Fig. 130) konstruiert.

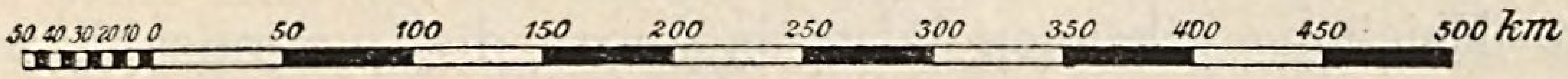


Fig. 130.

Da 111,3 km einem Äquatorgrad oder 30 geographischen Stunden gleichkommen, so entspricht 1 km 16 Minuten in der Zeit. So viele Kilometer man abmiſst, so viele Viertelstunden und Minuten hat man zu rechnen. 5^{km} sind alsdann $1^h\ 20^{min} = {}^4/_3{}^h$.

Lesen wir die dritte Gleichung S. 140 rückwärts, so ist

$$1^{mm} = n^{km}$$

$$t^{mm} = t \cdot n^{km} = t \cdot n \cdot 16^{min}.$$

Hieraus ergibt sich wiederum sehr einfach, so viel Millimeter man auf der Karte abmiſst, so vielmal n^{km} beträgt die gemessene Strecke in Wirklichkeit. Südwest-Deutschland, herausgegeben vom topograph. Bureau des kgl. bayer. Generalquartiermeisterstabes, ist im Maſsstab 1 : 250 000 entworfen und gezeichnet. Die Strecke Starnberg — Seeshaupt miſst dem Würmsee in gerader Linie entlang $76{,}5^{mm}$. Folglich ist die Naturlänge

$$76{,}5 \cdot 0{,}25^{km} = 19{,}12^{km} = 5^h.$$

Noch ein anderes Beispiel. Blatt Süd-Amerika Nr. 89 in Stielers Handatlas ist im Maſsstab 1 : 25 000 000 erstellt. Es ist dann

$$1^{mm} = 25^{km}.$$

Die Breite des einen Amazonas-Armes bei Pará miſst 2^{mm}, also ist die natürliche Breite

$$50^{km} = 13^h\ 20^{min}.$$

B. Der Flächenmaſsstab.

Miſst eine Fläche l^m in die Länge und b^m in die Breite, so ist ihr

$$\text{Inhalt} = l \cdot b.$$

Wird Länge und Breite n mal so groſs, so ist der Flächeninhalt

$$J = nl \cdot nb = n^2 (l \cdot b).$$

Die erste Fläche verhält sich sohin zur zweiten wie die Wurzel- zur Quadratzahl. Verdoppelt man Länge wie Breite, so erhält man in der Fläche nicht das Doppelte, sondern das Vierfache, denn

$$J = 2l \cdot 2b = 4 (l \cdot b).$$

Da $n = \sqrt{n^2}$ ist, so könnte man auch schreiben

$$J = n^2 (l \cdot b) = l\sqrt{n^2} \cdot b\sqrt{n^2},$$

welche Gleichung erkennen läfst, dafs man die Quadratzahl, welche die Flächenvielfachung angibt, nur in ihre Wurzelfaktoren zerlegen und damit Länge und Breite zu vervielfältigen braucht, um die gewünschte Flächenvergröfserung herbeizuführen. Das Doppelte der Fläche $l \cdot b$ erlangt man demnach durch die Gleichung

$$2J = l\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}.$$

Teilt man Länge und Breite durch n Einheiten, so ist die Teilfläche

$$J = \frac{l}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{l \cdot b}{n^2} = l \cdot b \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Ist demnach der lineare Mafsstab $1 : n$, so ist der der Fläche $1 : n^2$, weshalb wir sagen können: **Der Linearmafsstab verhält sich zum Flächenmafsstab wie die Grundzahl zum Quadrat, also wie $n : n^2$.**

Nimmt man Länge und Breite zur Hälfte, so erhält man nimmermehr die halbe, sondern nur die Viertelsfläche des ursprünglichen Flächeninhalts. Die Hälfte mit Beibehaltung des gleichen Formates kann nur aus der Gleichung genommen werden:

$$\tfrac{1}{2} J = l\sqrt{0{,}5} \cdot b\sqrt{0{,}5} = 0{,}7 \cdot l \times 0{,}7 \cdot b.$$

Zur Hälfte einer gegebenen Kreisfläche $r^2\pi$ gelangt man hiernach, wenn man den Halbmesser in 10 gleiche Teile bringt und 7 hiervon nimmt. Denn alsdann ist

$$0{,}7\,r \times 0{,}7\,r = 0{,}49\,r^2\pi,$$

d. i. nahezu die Hälfte von $r^2\pi$.

Soll ein Kreis gezeichnet werden, der noch einmal so grofs als ein gegebener ist, so kommt man durch folgendes Verfahren auch auf dem Wege der Konstruktion darauf. Man stellt zwei Halbmesser des Kreises *WnAs* (Fig. 121 S. 126) senkrecht zu einander und zieht die Hypotenuse *Wn*, welch letztere der Radius des Kreises ist, der noch einmal so grofsen Flächeninhalt als der gegebene Kreis besitzt. Betrachten wir *Wc* als den Radius eines Kreises, dessen Fläche auf die Hälfte reduziert werden soll, so behandeln wir *Wc* als die Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieckes. Die Katheten ergeben sich, wenn man *Wn* zieht und im Halbierungspunkt eine Senkrechte errichtet. Eine der Katheten ist der Radius für den begehrten Kreis. Handelt es sich darum, ein Rechteck auf

die Hälfte seines Flächeninhalts zu bringen, so zieht man eine Diagonale und bringt sie in vier gleiche Teile. Im dritten Teilungspunkt zieht man zu den zunächst liegenden Seiten parallele Linien, und man hat hiermit annähernd die Hälfte der gegebenen Fläche in einem zum Original ähnlichen Format. Bei der Verdopplung teilt man die Diagonale des gegebenen Rechtecks in drei gleiche Teile, verlängert sie um einen solchen Teil und zieht an den äufsern Punkt der verlängerten Diagonale parallele Linien zu den gegenüberliegenden Seiten. Ein Quadrat wird verdoppelt, indem man auf die Diagonale desselben ein zweites Quadrat errichtet.

Wenn nun eine Karte im Mafsstab zu $1 : \varkappa$, die andere in dem $1 : n \cdot \varkappa$ erstellt ist, so umfafst die erste Karte n^2 Flächeneinheiten für das gleiche Kartenbild mehr als die zweite. Ein Zahlenbeispiel wird diese Behauptung veranschaulichen. Der eine Mafsstab sei

1 : 250 000 der andere 1 : 1 000 000.

Bei der zweiten Karte ist Länge wie Breite für einen gleichen Flächenraum viermal kleiner, somit ist der entsprechende Flächenraum 16 mal kleiner als auf der ersten Karte. Diese Verminderung geschieht auf Kosten der genauen Detailszeichnung. Darum werden für Karten, die ins Detail gehen und für kleine Räume grofse Flächen in Anspruch nehmen, kleine Teilzahlen, für Übersichts- oder Generalkarten dagegen grofse Theilzahlen genommen.

Zu den grofsen Verjüngungsverhältnissen rechnet man 1:1000 bis 1:50 000, zu den mittleren 1:50 000 bis 1:500 000. Was über eine halbe Million geht, gehört zu den kleinen Verjüngungsverhältnissen. Bilder in grofsen Mafsverhältnissen heifsen Pläne, solche in mittleren und kleinen Karten. Darum Stadtplan — Landkarte.

Cylinderprojektion mit quadratischen Maschen.

Ein Äquatorgrad mifst $111{,}3^{\text{km}}$, ein Grad am 10. Parallelkreis $109{,}6^{\text{km}}$. Der Unterschied beider Gröfsen ist unbedeutend und für Karten bei den in Anwendung zu bringenden Reduktionsverhältnissen geradezu verschwindend. Ebendeshalb verstöfst es gegen die Wirklichkeit keineswegs, wenn man für äquatoriale Gegenden auch Netze benützt, bei welchen die Breiten- und Längenrade egal sind und sohin dieselben in quadratischen Maschen anfertigt. Dies ist die einfachste Art der Netzerstellung und sie ist der Cylinderprojektion in ihrer primitivsten Art beizuzählen.

Merkators Projektion.

Auch sie eignet sich vortrefflich für Länder der Tropenzone. Ist der Meridianabstand für λ Grade am Äquator nach der Reduktionszahl festgestellt, so erhält man die Schnittpunkte an einem der geradlinigen Meridiane nach der bekannten Gleichung

$$y = r \,\mathrm{Lg}\tan\left(45^{0} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

oder mit Anwendung der Tabelle XI

$$\lg y = \left(\lg \frac{180}{\pi} + \lg \varkappa\right) + \lg z.$$

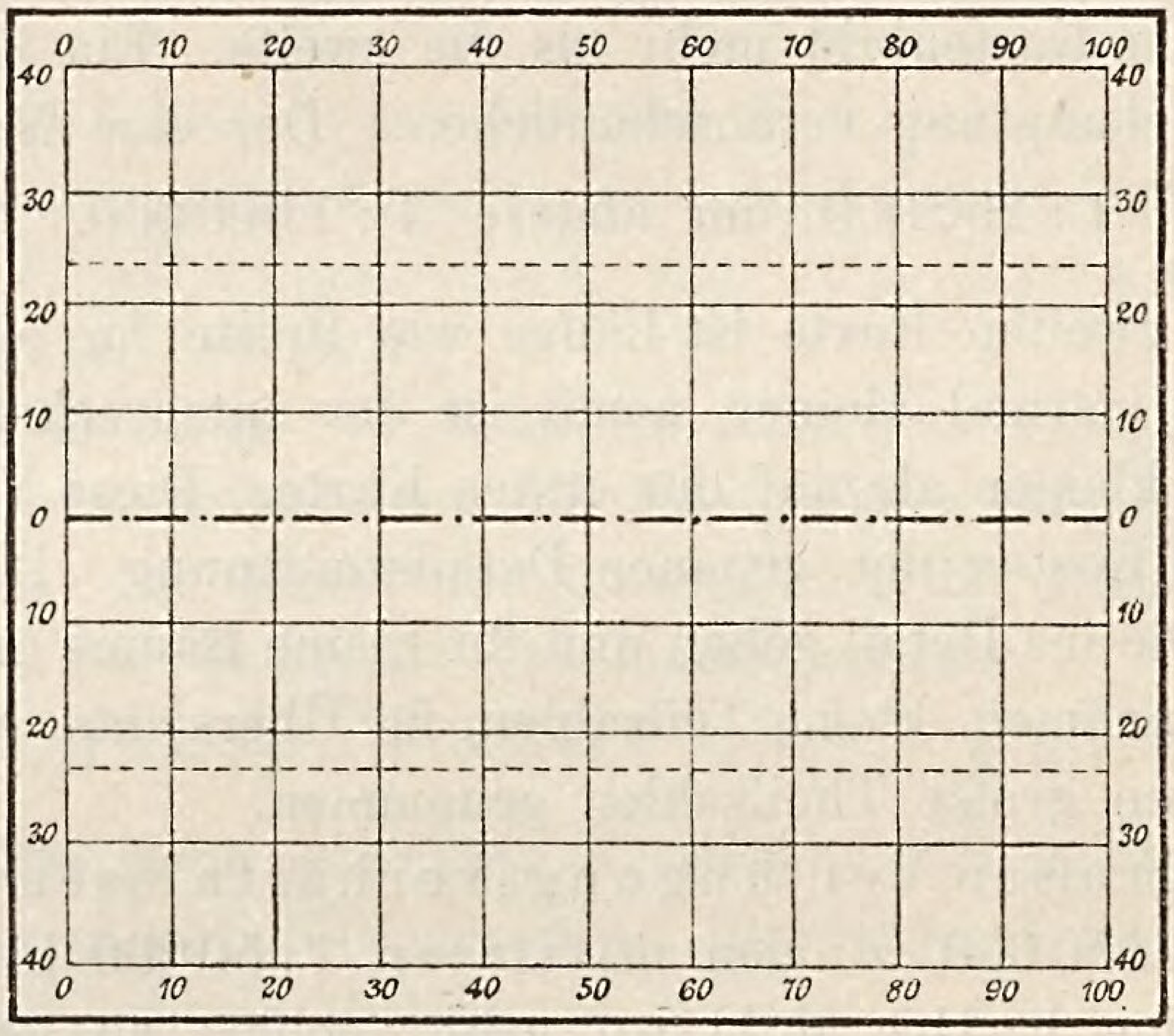


Fig. 131.

Für Australien und Polynesien wird die Merkator-Projektion gerne in Anwendung gebracht. Figur 131 zeigt ein derartiges Netz.

Sanson-Flamsteed'sche Projektion.

Für Tropenländer, zumal für den Erdteil Afrika, ist die zuerst nach dem Franzosen Sanson, hernach nach dem Engländer Flamsteed benannte Projektion, deren eigentlicher Erfinder jedoch Merkator ist*), beliebt. Nimmt man nach deren Annahme den Äquator als den mittelsten Parallelkreis, so fällt der Punkt, von welchem aus

*) Dieser Entwurf kommt bereits in der ersten holländischen Ausgabe des Merkator-Atlas auf dem Blatte von Südamerika vor, welches den Namen Honds trägt. Osk. Peschel, Lebensbeschreibung und Würdigung Gerhard Merkators. Löwenberg, Neue Folge S. 123.

die Abbildungen der Breitenkreise zu beschreiben sind, in unendliche Ferne und diese erscheinen darum samt und sonders als gerade Linien, welche den Mittelmeridian senkrecht schneiden. Dabei haben sämtliche Elemente dieses Netzes in ihren wahren Gröfsen zu erscheinen, so dafs die Gradabschnitte am Äquator wie auf der Kugel, denen an einem Meridian gleich sind. Beide, Äquator und Meridian, bei Abbildung einer Hemisphäre sind zwei Senkrechte von gleicher Länge, die man beide in gleich viele und gleich grofse Teile bringt, so dafs ein Gradabschnitt am Äquator ebenso grofs ist als am Meridian, somit $\lambda = \varphi$ ist. Auch die Parallelkreise bilden sich in ihrer wahren Gröfse ab, jeder von ihnen ist sodann, wenn $2r\pi$ der Äquatorumfang sein soll, $2r\pi \cdot \cos\varphi$ und ein Teilabschnitt im Verhältnis zum Äquator $\lambda \cos\varphi$. Nimmt man $\lambda = \varphi = 1$, so erhalten wir in den Kosinusen der Breiten, welche sich aus der Tabelle IV entnehmen lassen, die äqualen Teilabschnitte für die Parallelen. Verbindet man die Teilpunkte gleicher Längen mit einander, so gewinnt man die Meridiankurven.

Figur 132 stellt ein derartiges Netz für Afrika vor. Bestünde die Absicht ein Netz in der Sanson-Flamsteed'schen Projektion für

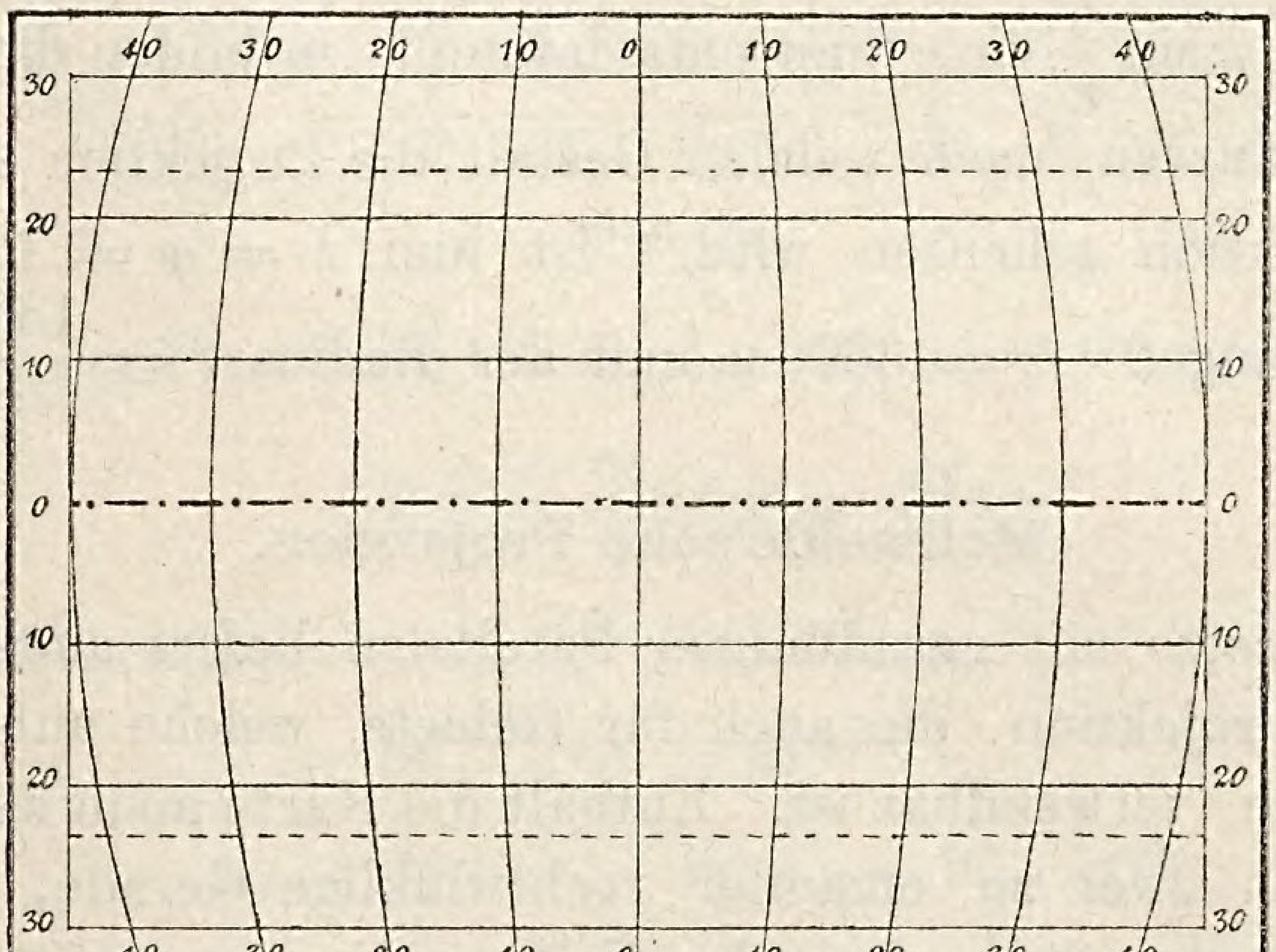


Fig. 132.

die ganze Erde zu entwerfen, so würde der Äquator wie bei der Mollweide'schen Projektion doppelt so grofs als der mittlere Meridian erscheinen. Dabei käme man darauf, dafs die Meridiankurven keineswegs Ellipsen vorstellen. Welcher Art von Kurven sie zuzurechnen sind, wird folgende Betrachtung lehren. Der Durchschnittspunkt des Breitengrades 10 von dem Meridian 40 ist auch bezeichnet

durch die Entfernung vom Äquator und durch den Abstand vom Mittelmeridian. Bezeichnen wir die geographische Breite mit φ, die geographische Länge mit λ, die Entfernung vom Äquator mit y und den Abstand vom Mittelmeridian mit x, alsdann ist nach der Proportion

$$2\pi : \varphi = 2r\pi : y$$
$$y = r\varphi$$

und x nach der Proportion

$$2\pi : \lambda = 2r\pi \cdot \cos\varphi : x$$
$$x = r\lambda \cdot \cos\varphi.$$

Da aber für φ auch $\frac{y}{r}$ gesetzt werden kann, so ist

$$x = r\lambda \cdot \cos\frac{y}{r},$$

welche Gleichung eine Kurve bedeutet, die zur Kategorie der transzendenten Kurven gerechnet wird. Diese vorstehende Gleichung läfst sich auch also schreiben

$$x = r\lambda \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right)$$

und da $x = k\sin\frac{y}{r}$ eine Sinusoide darstellt, so bilden die Meridiane sinusoidale Kurven, nach welcher Gestalt die Projektion auch sinusoidale Projektion geheifsen wird. Ist nun $\lambda = \varphi = 1 = \varkappa^{\mathrm{mm}}$, so ist der Umfang $2r\pi = 360 \cdot \varkappa$ und der Radius $r = \frac{180}{\pi} \cdot \varkappa$.

Mollweide'sche Projektion.

Kartennetze mit geradlinigen Parallelen liefert auch die Mollweide'sche Projektion, die auch für Gebiete, welche aufserhalb der Tropen liegen, verwendbar ist. Enthält die Karte auch den Äquator, so zieht man zwei zu einander rechtwinklige Gerade, wovon die eine den Äquator die andere den Nullmeridian vorstellt. Von dem erstern aus trägt man die Gradabschnitte, durch welche die Parallelen am Mittelmeridian zu führen sind, nach der Tabelle XV[a] bei Fig. 133 auf und erstellt mittelst gerader Linien die Parallelkreise. Enthält die Karte nicht auch den Äquator, beginnt sie vielmehr mit dem Parallel φ, so ist für den Parallel φ'

$$y' = y_{\varphi'} - y_{\varphi} = r\sqrt{2}\,(\sin\chi' - \sin\chi)$$
$$= y_{\varphi''} - y_{\varphi} = r\sqrt{2}\,(\sin\chi'' - \sin\chi) \text{ u. s. f.}$$

Die Ellipsenpunkte gibt, wie bekannt, die Gleichung

$$y = \lambda \cdot r\sqrt{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\sin\chi^2}\right).$$

Kommen auf einen Äquatorgrad $\varkappa^{mm}$, so ist $r\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\varkappa^{mm}$ und

$$y = \lambda\varkappa\sqrt{1-\sin\chi^2}.$$

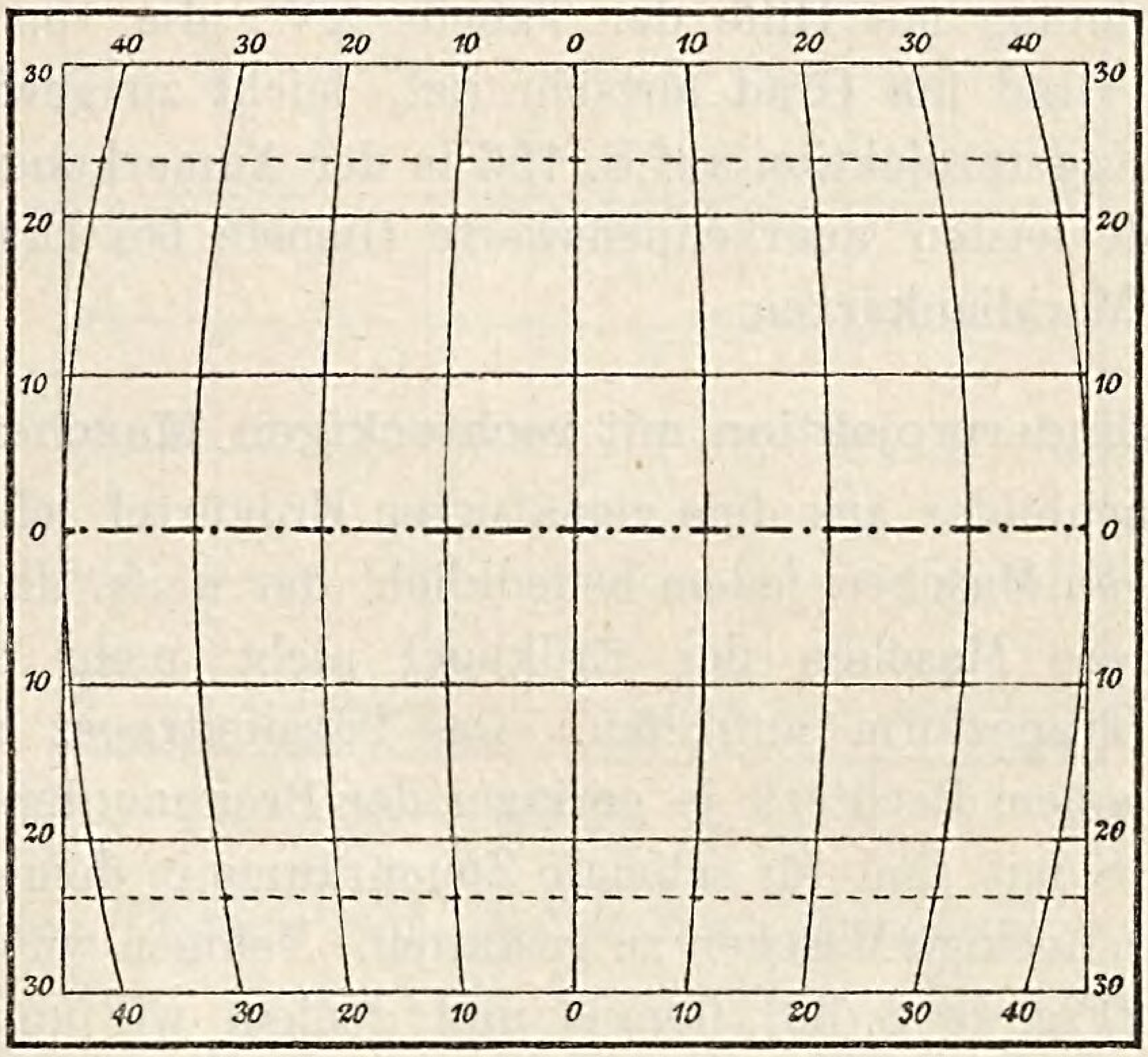


Fig. 133.

In unserer Figur sind 10^0 am Äquator mit 8^{mm} gegeben, somit ist

$$r\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}\cdot 0{,}8 = 72^{mm}$$

und die Meridiankurve von 30^0 ist alsdann

$$y_0 = 30 \times 0{,}8 = 24^{mm}$$
$$y_{10} = 24\sqrt{1-\sin\chi^2} = 23{,}77^{mm}$$
$$y_{20} = 24\sqrt{1-\sin 2\chi^2} = 23{,}11^{mm} \text{ u. s. f.}$$

oder nach der Tabelle XV^b, bei welcher $y = 1\cdot\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\sin\lambda^2}\right)$ genommen ist,

$$y_0 = 30 \times 72 \times 0{,}011111 = 24{,}00^{mm}$$
$$y_{10} = 2160 \times 0{,}011006 = 23{,}77^{mm}$$
$$y_{20} = 2160 \times 0{,}010697 = 23{,}11^{mm}$$
$$y_{30} = 2160 \times 0{,}010164 = 21{,}95^{mm}.$$

Würde die Karte vom 10. Parallel an zu konstruieren sein, so ist nach Tabelle XV[a] die Ordinate

$$y_{20} = 72\,(0{,}2720 - 0{,}1368) = 9{,}73^{\text{mm}}$$
$$y_{30} = 72\,(0{,}4040 - 0{,}1368) = 19{,}24^{\text{mm}}.$$

Mit dieser Darlegung dürfte der Beweis geliefert sein, dafs die Konstruktionen von Zonennetzen in der Mollweide'schen Projektion keinerlei Schwierigkeiten verursachen, da die erforderlichen Elemente durch Berechnung mit Hilfe der Tabelle XV[a], die von 0 bis zum 60. Parallel Grad um Grad fortschreitet, leicht zu gewinnen sind. Die bei der Kegelprojektion auf S. 156 in der Anmerkung erwähnten Kurvenlineale leisten anerkennenswerte Dienste bei Erstellung der elliptischen Meridiankurven.

Cylinderprojektion mit rechteckigen Maschen.

Für Zonenbilder aus dem gemäfsigten Erdgürtel scheinen Netze mit gradlinigen Maschen jedem bedenklich, der weifs, dafs in diesen Erdräumen die Maschen der Erdkugel nicht mehr quadratisch, sondern in Trapezform auftreten. Das Paralleltrapez nähert sich um so mehr einem Rechteck je geringer der Breitenunterschied einer Zone wird. Somit sind für schmale Zonenräume in dem gemäfsigten Erdgürtel rechteckige Maschen zu gestatten. Nehmen wir eine Kugelzone *omlp* (Fig. 46 S. 32) heraus und denken wir uns die Kugel von einem geraden Cylinder längs des mittleren Parallelkreises *ik* geschnitten, so werden alle Parallelkreise diesem gleich, seine Gradabschnitte sind auch die aller andern Parallelkreise auf der Karte, die Meridiangrade sind den Äquatorgraden als Teile gröfster Kreise gleich. Ist nun der Mittelparallel der Zone von der Breite φ und der Meridiangrad 1, so ist der Parallelgrad auf dem Mittelkreis und somit auf jedem Parallel der Zone $1 \cdot \cos\varphi$. Die Konstruktion ist sohin nicht schwer. In der Mitte der Papierfläche (Fig. 134) errichtet man zwei Senkrechte. Auf die senkrechte Mittellinie trägt man nach Mafsgabe der Reduktionszahl die Parallelabstände auf und durch sie führt man parallel zur horizontalen Mittellinie gerade Linien. Sie sind die entsprechenden Parallelkreise. An einem oberen und unteren Parallelkreis trägt man vom Mittelmeridian rechts und links $1 \cdot \cos\varphi$, welcher Wert aus Tabelle IV erholt werden kann, ab, verbindet die Teilpunkte, wodurch das Netz in rechteckige Maschen oder in der Cylinderprojektion für Zonen des gemäfsigten Erdgürtels fertig ist. Bei Tropenländern nähern sich die Rechtecke den Quadraten, in den Polarländern werden sie schmalen Streifen gleich.

Die ersten Karten des Altertums mögen derartige Netze zur Grundlage gehabt haben. Der erste Kartenzeichner, den wir kennen, heifst Anaximander, der um 550 v. Chr. lebte und ein Schüler

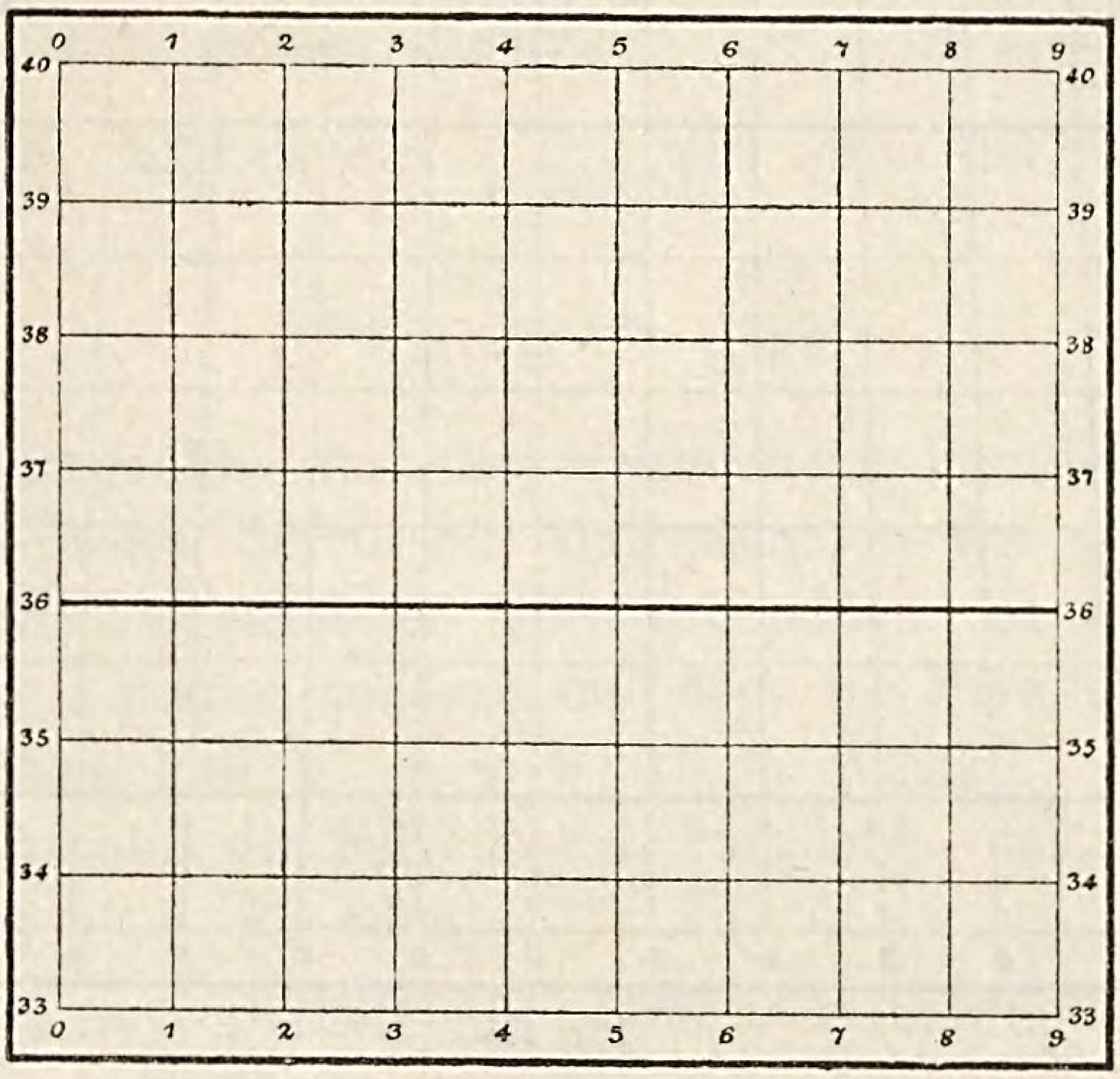


Fig. 134.

des Weltweisen Thales war. Selbst noch Ptolemäus, 130 v. Chr., bediente sich Netze in der Cylinderprojektion. Als mittleren Parallel nahm er den von Rhodus an. Diese Projektionsart entsprach auch der Anschauung, als ob die Erde eine Scheibe oder Tafel sei, deren Länge (Entfernung von Westen nach Osten) die Breite (die Südnordlinie) übertreffe.

Projektion mit trapezförmigen Maschen.

Im vierzehnten Jahrhundert trat für die rechteckigen Maschen eine Modifikation in der Art ein, dafs nicht der Konstruktion ein, sondern zwei Parallelkreise zu Grunde gelegt wurden, um hierdurch das Zonenbild zu erweitern. Offenbar sind die Gradlängen des nördlichen Parallels φ' geringer als des südlichen Parallels φ, also $\cos\varphi' < \cos\varphi$. Trägt man $\cos\varphi'$ auf den Parallel φ' und $\cos\varphi$ auf den Breitenkreis φ vom Mittelmeridian rechts und links ab, so gibt die Verknüpfung der Teilpunkte gleicher Längen schiefe Linien, welche die gradlinigen Parallelkreise, die in derselben Weise wie bei der Cylinderprojektion erstellt werden, in verschiedenen schiefen Winkeln schneiden. Aus den rechteckigen Maschen werden trapezförmige, aus den rechten Winkeln schiefe.

Figur 135 gibt ein solches Netz. Nach den Rändern hin muſs um der schiefen Winkel willen eine Verzerrung der Länderformen

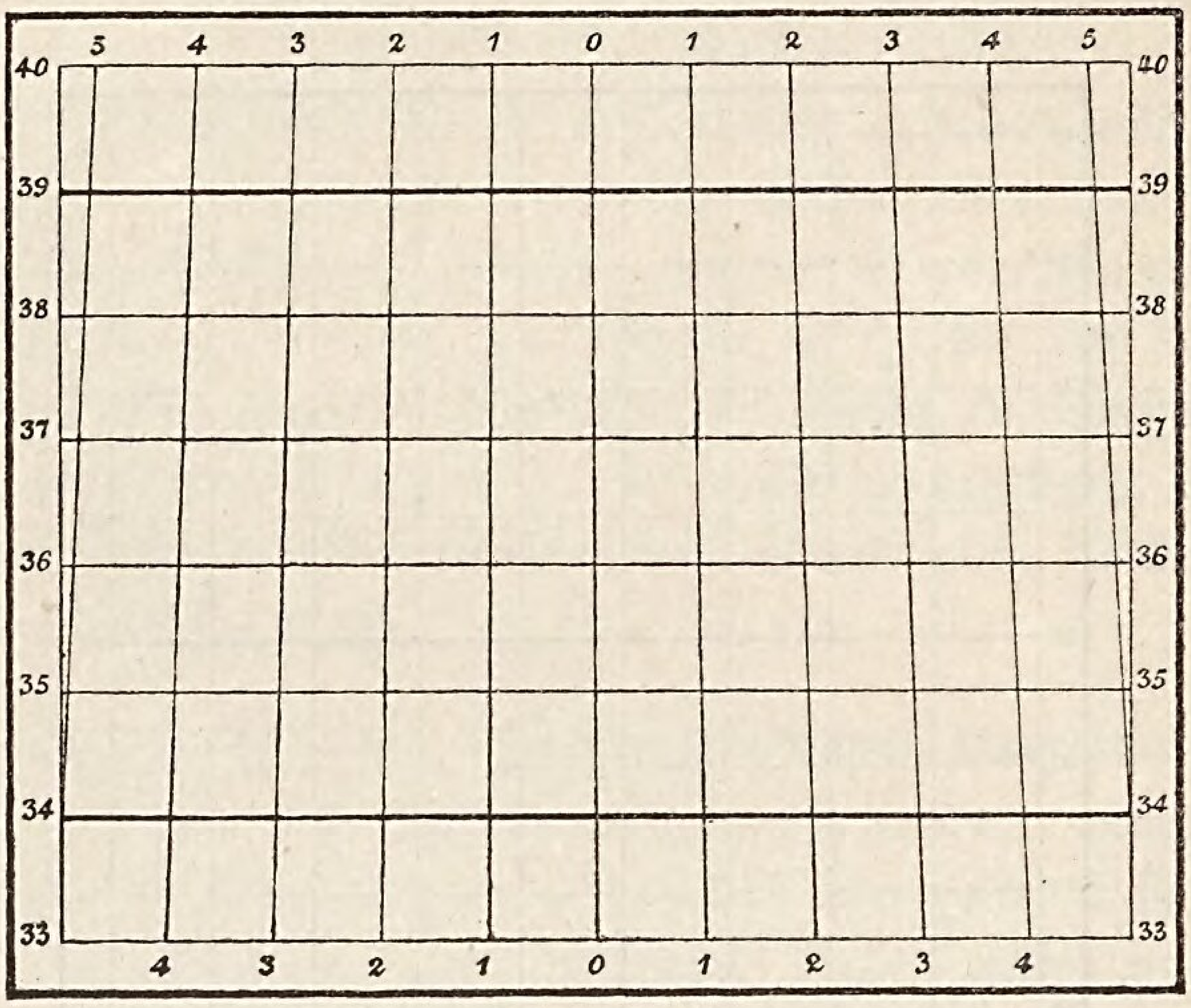


Fig. 135.

stattfinden, weshalb ein solches Netz nur angewendet werden kann bei Länderräumen, die sich über wenige Längengrade erstrecken.

Stereographisch-äquivalente Projektion.

Modifiziert von E. Collignon.

Diese Projektion gibt in gleicher Weise taugliche Bilder für nicht zu groſse Ländergebiete. Beabsichtigt man z. Ex. die Zone zwischen

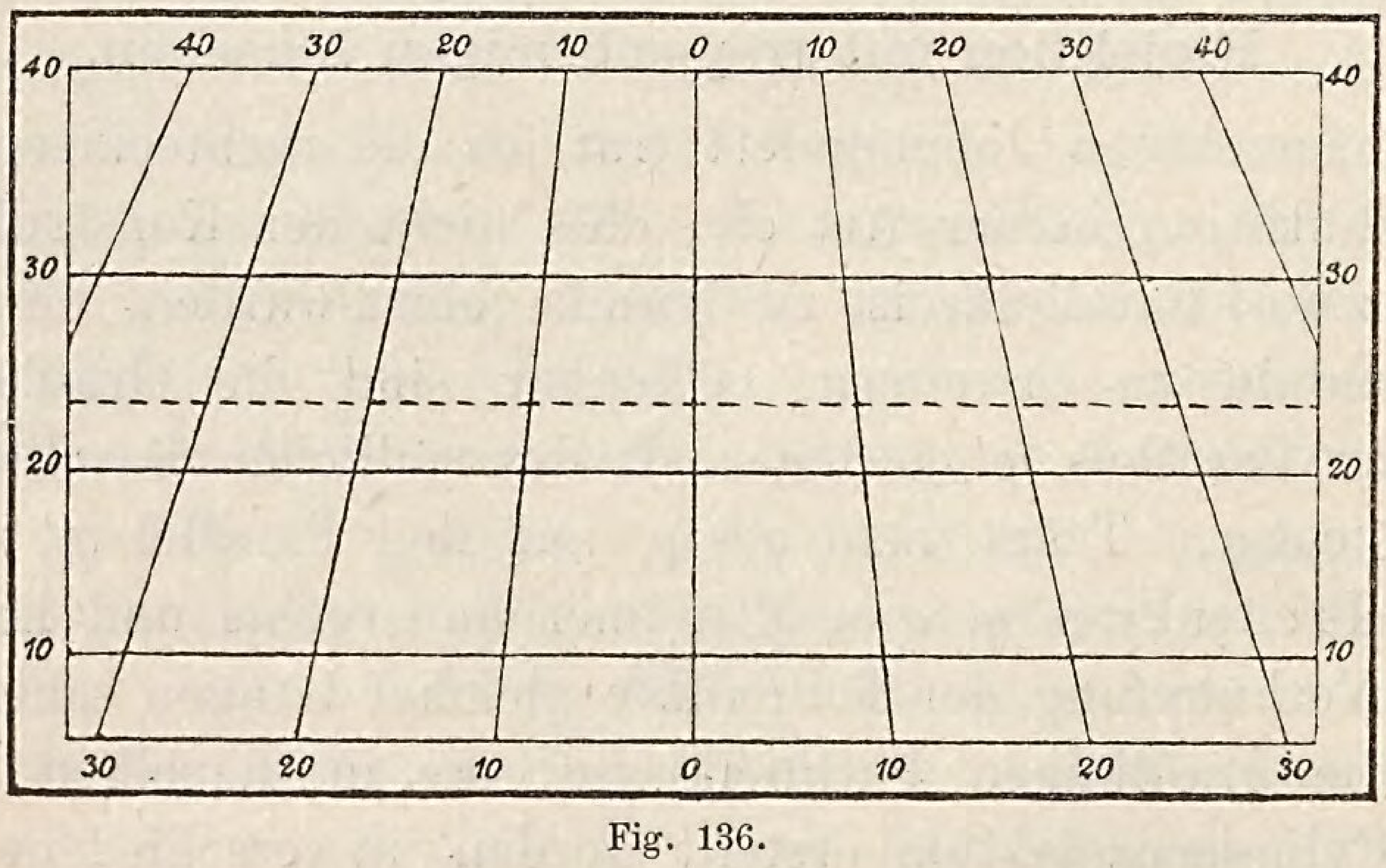


Fig. 136.

10^0 und 40^0 der Breite (Fig. 136) abzubilden, so berechnet man zunächst die Länge des halben Äquators x, an dem alle Grad-

abschnitte von gleicher Ausdehnung sind. Hat man die Abszisse, so hat man damit auch die Ordinate y, von welcher der Mittelmeridian einen Teil bildet. Gestattet nun der verfügbare Raum oder der anzuwendende Mafsstab für 10 Grade auf dem 10. Parallel $\varkappa^{mm}$, so kommt auf den ganzen Parallel $9 \cdot \varkappa^{mm}$. Nach Tabelle XII ist $x_{10}^1 = x \cdot 0{,}909$; folglich $x = \frac{x_{10}^1}{0{,}909}$ und sohin die Ordinate

$$y = \frac{x_{10}^1}{0{,}909} = \frac{9\,\varkappa}{0{,}909}.$$

Die Schnittpunkte für die betreffenden Parallelkreise erhält man bekannterweise durch die Multiplikation der y mit den in der Tabelle XII verzeichneten Verhältniszahlen. Da aber die Karte nicht mit dem Äquator, sondern mit dem 10. Parallel beginnt, so kommt in diesem Fall $y'_{10} = y \cdot 0{,}091$ in Wegfall. Hieraus folgt für die Schnittpunkte der betreffenden Parallelen, dafs für y'_{20} u. s. f. zu rechnen ist $y'_{20} - y'_{10}$ oder

$$y'_{20} - y'_{10} = y \cdot 0{,}1888 - y \cdot 0{,}091 = y\,(0{,}1888 - 0{,}091)$$
$$y'_{30} - y'_{10} = y\,(0{,}2929 - 0{,}091) \text{ u. s. f.}$$

Um einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, setzen wir für den Parallel, der die Basis der Karte zu bilden hat, wiederum φ und für dessen Verhältniszahl z, für alle folgenden Parallelen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots = z_1, z_2 \ldots$ Alsdann ist

$$\begin{aligned} y' &= \varphi_1 - \varphi = y\,(z_1 - z) \\ &= \varphi_2 - \varphi = y\,(z_2 - z) \\ &= \varphi_3 - \varphi = y\,(z_3 - z) \ldots \end{aligned}$$

Noch erübrigt es, um die Meridiane ziehen zu können, für sie die Schnittpunkte an dem Parallel, der die Karte abschliefst hier am 40. Parallelkreis, kennen zu lernen. Beträgt der Gradabschnitt am Äquator k^{mm}, so ist am 40. Parallel nach Tabelle XII

$$x'_{40} = k \cdot 0{,}5977.$$

Trägt man diesen Wert rechts und links vom Mittelmeridian auf und zieht durch die Schnittpunkte gleicher Längen gerade Linien, so hat man ein Netz in geraden Parallelen und Meridianen, wie es unsere Figur 136 gibt. Zugegeben mufs werden, dafs gegen die Ränder hin Verzerrungen eintreten, zumal bei Ländergebieten, die sich der Polarregion nähern.

Kegelprojektion.

Mit der Ausdehnung der Zone mufsten, wie wir bereits gesehen haben, die rechtwinkligen Maschen geopfert und dafür solche mit schiefen Winkeln eingetauscht werden. Da aber Parallel- und Mittagskreise sich auf dem Original rechtwinklig schneiden, so leidet offenbar die Ähnlichkeit der Abbildung, ja sie mufs sogar zu verzerrten Bildern, besonders gegen die Kartenränder hin, führen. Bei der Cylinderprojektion wird die Zone der Erdkugel durch eine ihr entsprechende Cylinderzone mit gradlinigen rechteckigen Maschen ersetzt. Es ist aber nicht allein der Cylinder sondern auch der Kegel mit der Kugel in einem gewissen Sinne verwandt. Eben deshalb kam man schon sehr frühe darauf, eine Kugelzone auf den Mantel eines normalen Kegels zu übertragen. Die Meridiane laufen in der Kegelspitze in konvergierenden, geraden Linien zusammen und die Parallelen bilden gleichlaufende Kreise, die gegen die Spitze wie bei der Kugel gegen den Pol hin abnehmen und von den Meridianlinien rechtwinklig geschnitten werden. Wickelt man einen solchen mit Parallelen und Meridianen übersponnenen Kegelmantel ab, alsdann erscheinen die Parallelkreise als Bogen konzentrischer Kreise, deren gemeinsames Zentrum die Kegelspitze oder der ideale Pol ist, und die Meridiane als gerade Linien, welche gegen den gemeinsamen Mittelpunkt der Parallelkreise konvergieren. Hierdurch bleibt neben dem Parallelismus der Breitengrade auch die rechtwinklige Durchschneidung derselben gewahrt. Und wenn auch die gleichgrofsen Winkel, welche die Meridiane unter sich einschliefsen, nicht in ihrer wahren Gröfse erscheinen, so gewähren sie dennoch den Vorteil, dafs die gleichen Unterschiede in der geographischen Länge auch auf der Karte gleichgrofs sind.

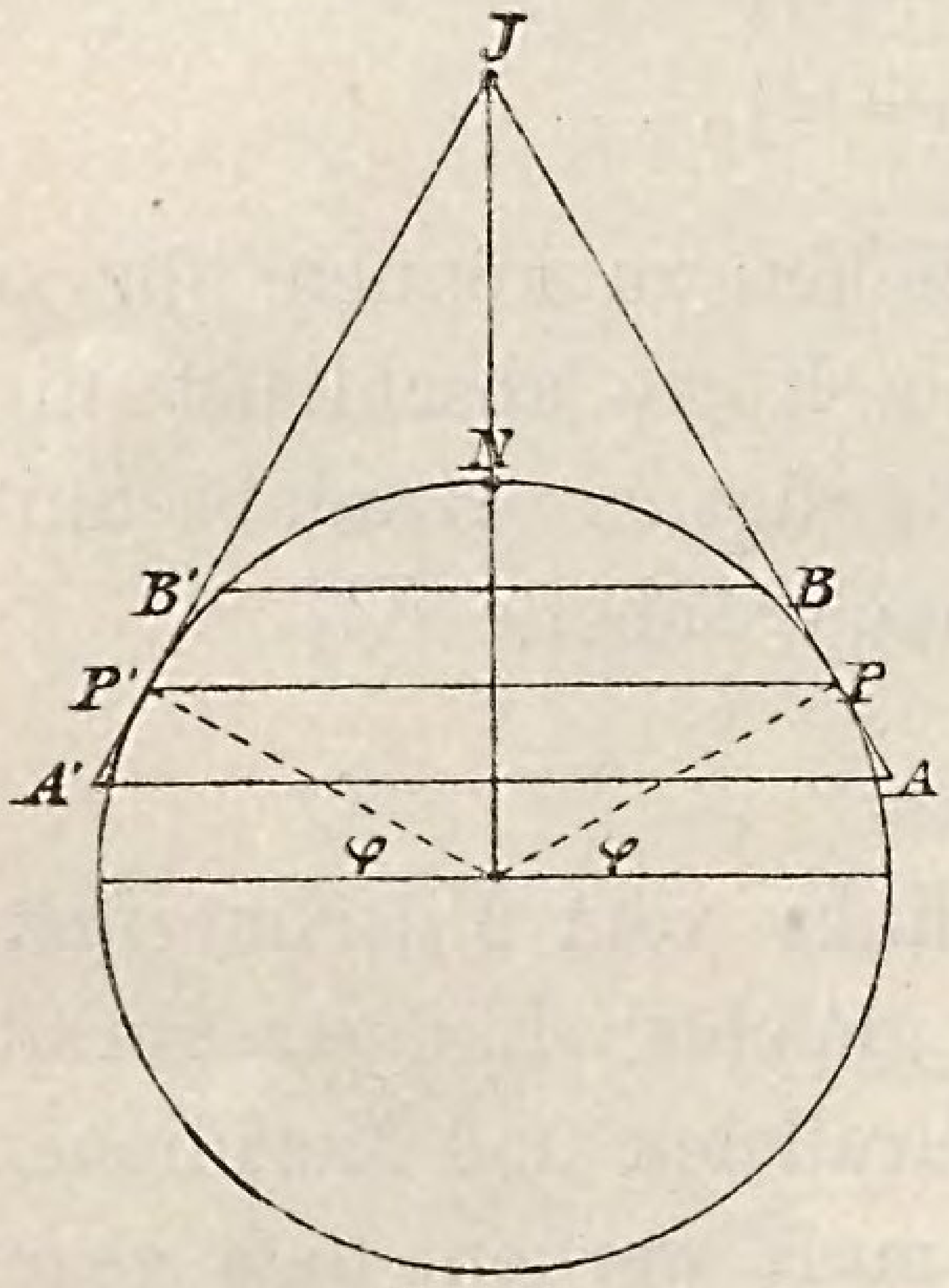


Fig. 137.

Soll auf den Kegel AJA' (Fig. 137) die Kugelzone $ABB'A'$ übertragen werden, so denkt man sich die Kugel selbst in ersteren so weit hineingeschoben, dafs die erzeugenden JA und JA' die Zone im Mittelparallel PP' berühren. Auf diese Weise werden die Erzeugenden zu Tangenten, die die Auffindung des idealen Poles

wie der Radien für die zu konstruierenden Parallelkreise leicht zulassen. Denn $JP = r \tan(90 - \varphi) = r \cot \varphi$.

Tabelle V gibt $R = 1 \cdot \cot \varphi$.

Die Tangente JP ist ein Meridian, der von der Kegelspitze oder dem idealen Pole denselben Abstand bewahrt wie JP' oder wie jeder andere Meridian, der den Parallel PP' schneidet. So wird der Meridian JP bei Abwicklung des Kegels zum Radius des Parallels PP' oder des Parallels von der Breite φ und seine Länge ist durch die Gleichung bestimmt

$$JP = r \cot \varphi.$$

Mit ihm wissen wir auch die Radien von den Begrenzungsparallelen, denn $JB = JP - BP$

und $JA = JP + AP$.

Der Mittelparallel erscheint in seiner wahren Gröfse, die Begrenzungsparallelen erfahren eine Erweiterung. Als Erfinder dieser Projektionsart wird Claudius Ptolemäus betrachtet.

Merkators Kegelprojektion.

Statt die Kugelzone mit der Kegelfläche an dem mittleren Parallel berühren zu lassen, hat Merkator sich dieselbe in gleichweiten Abständen vom Mittelparallel (Fig. 138) von den Erzeugenden eines Kegels durchstossen gedacht und hierdurch die konische Projektion verfeinert. Die Begrenzungsparallelen erscheinen in ihrer wahren Gröfse, die dazwischen liegenden Parallelen sind verkleinert. am meisten von allen büfst an seinem Umfang der Mittelparallel ein. In unserer Figur geschieht die Durchstofsung der Kugelzone $ABB'A'$ an den Parallelen $BB' = \varphi'$ und $AA' = \varphi$. Der Mittelparallel ist von der Breite $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ *). Der ideale Pol ist in der Kegelspitze J gegeben und von ihm aus gehen die Radien für die konzentrischen Parallelbogen aus. So ist der Radius für den Parallel $\varphi' JB$ und der für den Parallel φ JA. Der Kugelradius Bb vom Parallel φ' ist $r \cos \varphi$ und der Radius Aa vom Parallel φ ist $r \cos \varphi$.

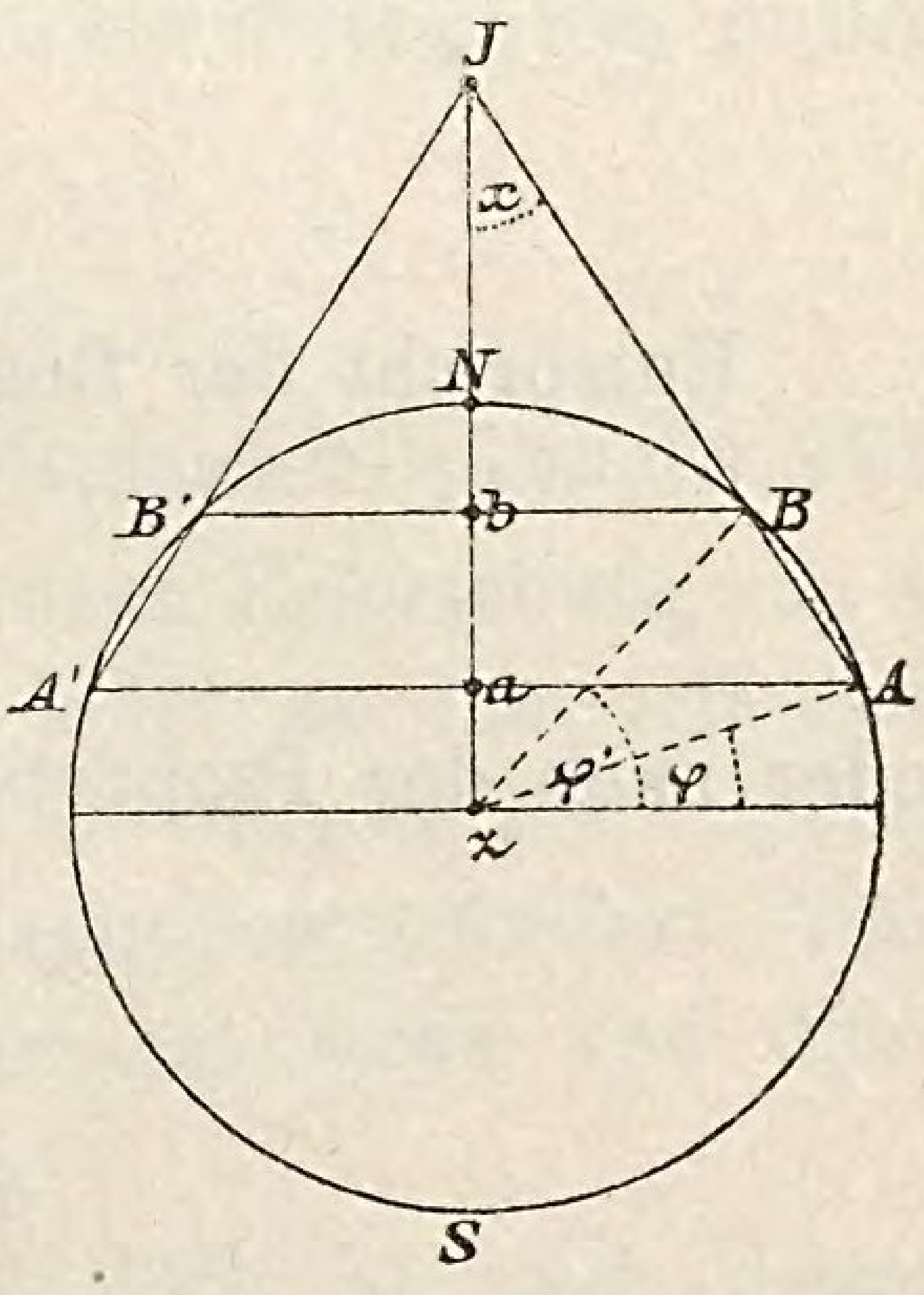


Fig. 138.

*) Der Mittelparallel φ_1 ist a) $\varphi_1 = \varphi + x$. b) $\varphi_1 = \varphi' - x$. Addiert ist $2\varphi_1 = (\varphi + x) + (\varphi' - x)$; also $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$.

Beide Radien bilden mit der Erzeugenden JA die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke JbB und JaA, die den Winkel x an der Spitze gemein haben. Derselbe ist ein Sekantenwinkel und nach S. 20 ist

$$\sphericalangle x = {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi').$$

Für Bb oder $r \cos \varphi'$ erhalten wir aus diesen Dreiecken die Gleichung

$$r \cos \varphi' = JB \cdot \sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')$$

und für Aa oder $r \cos \varphi$ die Gleichung

$$r \cos \varphi = JA \cdot \sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi').$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Werte für die Radien JB und JA der Parallelen φ und φ' entnehmen; denn es ist darnach:

$$JB = \frac{r \cos \varphi'}{\sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')}$$

und

$$JA = \frac{r \cos \varphi}{\sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi')}.$$

Die Tabelle XVI enthält für beide Radien die Werte mit dem Kugelradius 1 für die von den Parallelen φ und φ' begrenzte Zonen.

In dem Unterschied der Radien $JA - JB$ sind die Abstände der Parallelkreise, welche die Zone aufzunehmen hat, mit inbegriffen. Bezeichnen wir einen Meridianabschnitt mit β und ist die Differenz $JA - JB = n\beta$, so ist

$$\beta = \frac{JA - JB}{n}.$$

Entspricht der Bogen β dem Zentriwinkel $\frac{\varphi' - \varphi}{n}$, so ist

$$\text{arc}\,\beta = \frac{JA - JB}{n}$$

oder nach der Proportion

$$360 : \frac{\varphi' - \varphi}{n} = 2\,r\,\pi : \text{arc}\,\beta$$

$$\text{arc}\,\beta = \frac{r\,\pi}{180} \cdot \frac{\varphi' - \varphi}{n}.$$

Diesen Wert trägt man am Mittelmeridian Ja innerhalb der Zone $\varphi' - \varphi = AB$ (Fig. 139) ab und zieht durch die Schnittpunkte vom idealen Pol aus für die Parallelen konzentrische Kreisbogen.

Durch die Abwicklung des Kegelmantels erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Radius der Seite des Kegels und dessen

Bogen der Peripherie der Grundfläche gleich ist. Nach S. 29 ist arc AA' (Fig. 139) gleich $2\pi \cdot Aa$, der Umfang des Kreises mit dem Radius JA ist sodann $2\pi \cdot AJ$. Nun steht arc AA' dem Zentriwinkel ω gegenüber und dieser ergibt sich aus der Proportion

$$2\pi \cdot AJ : 2\pi \cdot Aa = 360 : \omega$$

wonach

$$\sphericalangle\, \omega = 360 \cdot \frac{Aa}{AJ} \text{ ist.}$$

Der Quotient $\frac{Aa}{AJ}$ ist nach Figur 138 der Sinus des Sekantenwinkels $x = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$. Somit können wir für den Zentriwinkel ω, welchen die beiden Radien JA und JA' bei J einschliefsen auch setzen

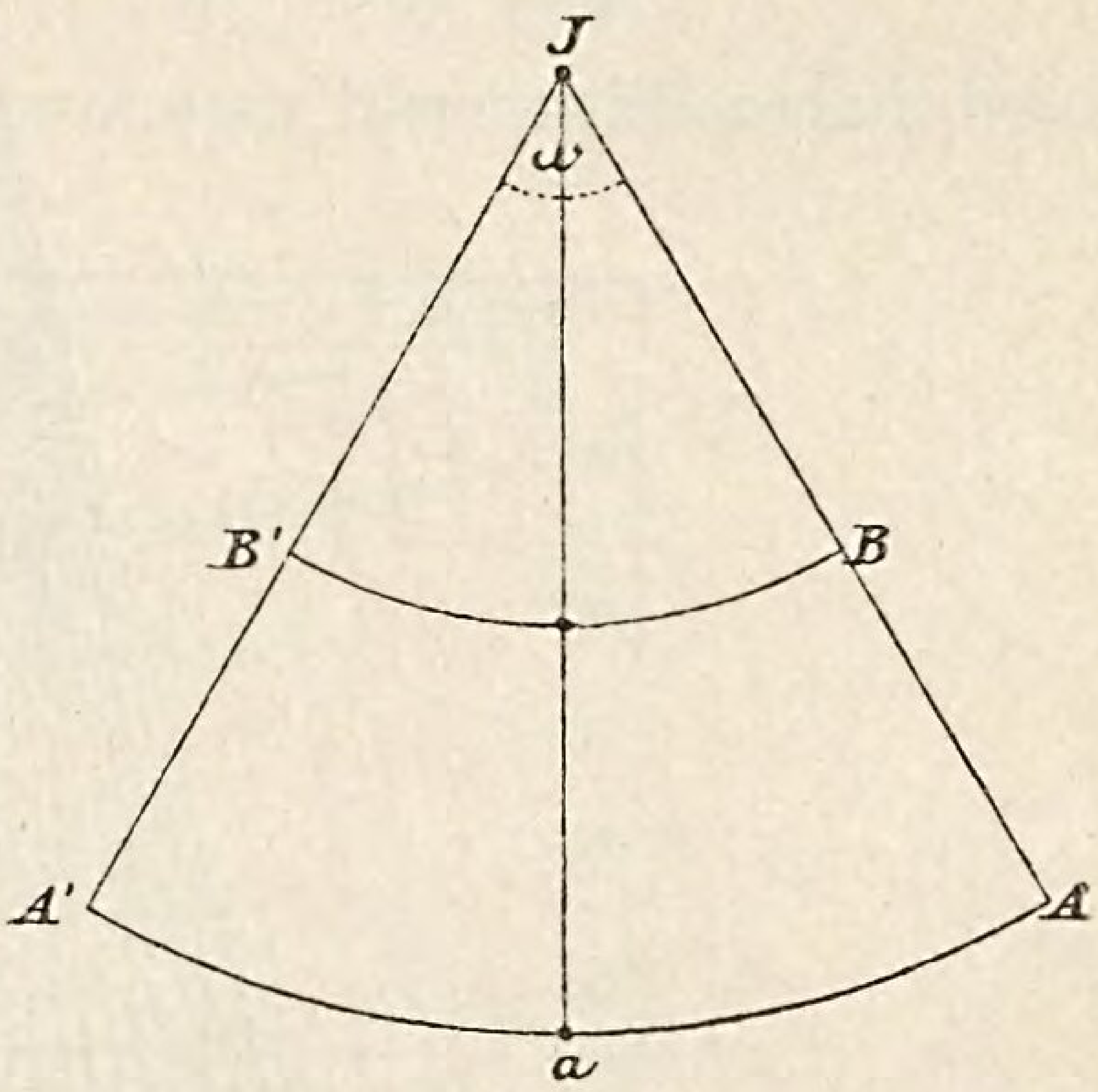


Fig. 139.

$$\sphericalangle\, \omega = 360 \cdot \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Die Geraden JA und JA' haben in der Projektion die Bedeutung von Meridianen, die vom idealen Pol aus divergieren. Fassen wir beide als zwei aufeinanderfolgende Meridiane auf, welche den Winkel λ', der dem Vollwinkel λ auf der Kugel zu entsprechen hat, einschliefsen, so ist der Winkel, um den sie divergieren, in der Projektion durch die Gleichung gegeben

$$\lambda' = \lambda \cdot \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Die Werte $\lambda' = 1 \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ enthält gleichfalls Tabelle XVI.

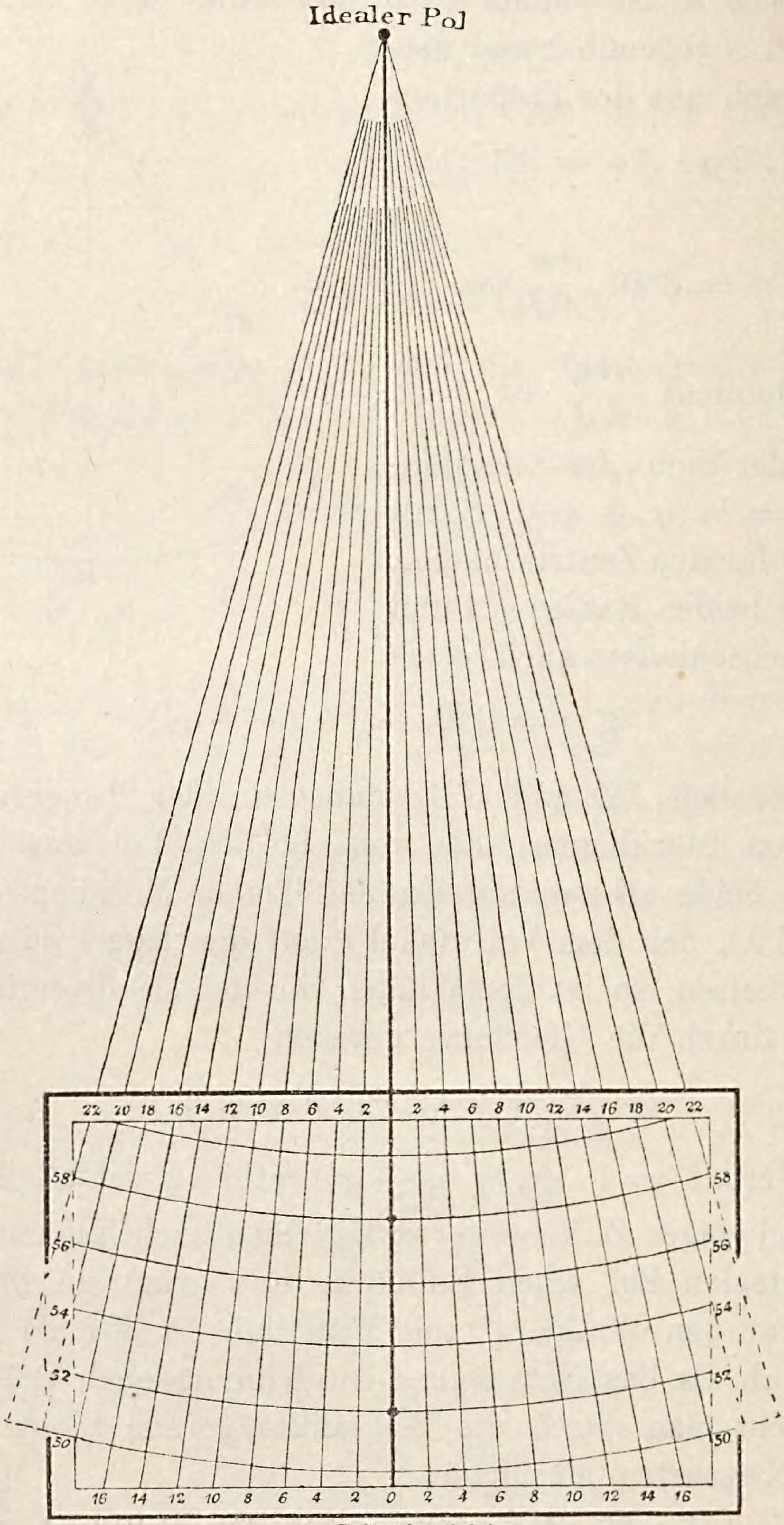
Mit beliebiger Zirkelweite schlägt man nach Erforschung von λ' um den idealen Pol einen Halbkreis und trägt an ihm mit dem Transporteur den Winkel λ' von Mittellinie so oftmals nach rechts und links ab als das Netz seiner Ausdehnung nach erfordert. Vom Pol aus zieht man durch die Teilpunkte gerade Linien und diese geben die begehrten Meridiane.

Das Netz für die Zone $50^0 - 60^0$ (Fig. 140) ist nach diesen Grundsätzen im Mafsstab 1 : 37 000 000 konstruiert.

Sollte der Zirkel wegen der Entfernung des idealen Poles nicht mehr ausreichen, so greift man zu einem Stangenzirkel, der eine Länge von 1—1 ½ m haben kann. In dem Fall, dafs auch dieser den Dienst versagt, hält man sich an die Bogenkonstruktion mittels

der Zentri- und Tangentialwinkel, wie sie auf S. 56 und 57 dargelegt worden ist. Die Punkte verbindet man durch ein gerades Lineal

Idealer Pol



1 : 37000000

Fig. 140.

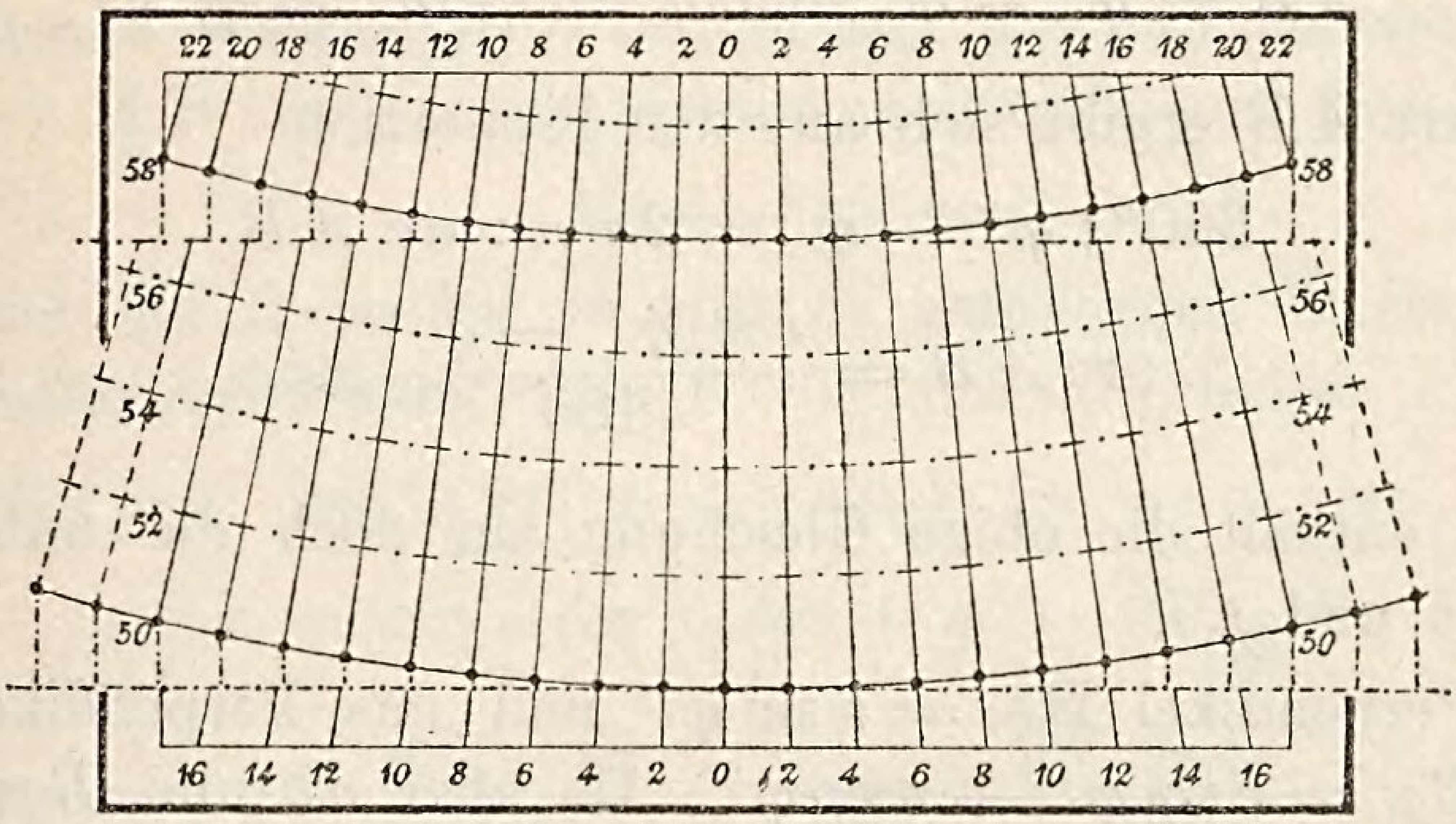
oder besser durch ein Kurvenlineal*). Sonach haben wir noch zwei weitere Gleichungen in Anschlag zu bringen, nämlich nach S. 57

*) Empfehlenswert sind die Kurvenliniale, welche für bestimmte Radien von 316 cm bis 13,5 cm Länge bei Mechaniker Heinrich Boscher in München zu haben sind.

$$x = JA \cdot \sin\lambda' = \frac{r\cos\varphi\sin\lambda'}{\sin{}^1\!/_2\,(\varphi+\varphi')}$$

$$y = JA\sin\lambda' \cdot \tan{}^1\!/_2\,\lambda' = \frac{r\cos\varphi\sin\lambda'\tan{}^1\!/_2\,\lambda'}{\sin{}^1\!/_2\,(\varphi+\varphi')}.$$

Als Illustration für diesen letzterwähnten Konstruktionsfall diene Figur 141.



1: 37 000 000.

Fig. 141.

Beinahe zweihundert Jahre nach Gerhard Merkator hat der Franzose Joseph Niklas de l'Isle, der erste Astronom der Petersburger Akademie, eine Karte von Rufsland veröffentlicht und diese Projektionsart dabei in Anwendung gebracht. Hierdurch geschah es, dafs die Erfindung Merkators auch dessen Namen erhalten hat.

Murdoch'sche Kegelprojektion.

Aufser den Begrenzungskreisen AA' und BB' (Fig. 142) zog Murdoch auch noch den Mittelparallel CC' und erforschte für diesen den Radius CJ. So reduzierte er die beiden Radien bei Merkators Projektion auf einen, denn

$$BJ = CJ - BC$$

und $$AJ = CJ + AC.$$

Die Oberfläche des abgestumpften Kegels $ABB'A'$ ist nach S. 32

$$O = 2\,Ci \cdot AB \cdot \pi$$

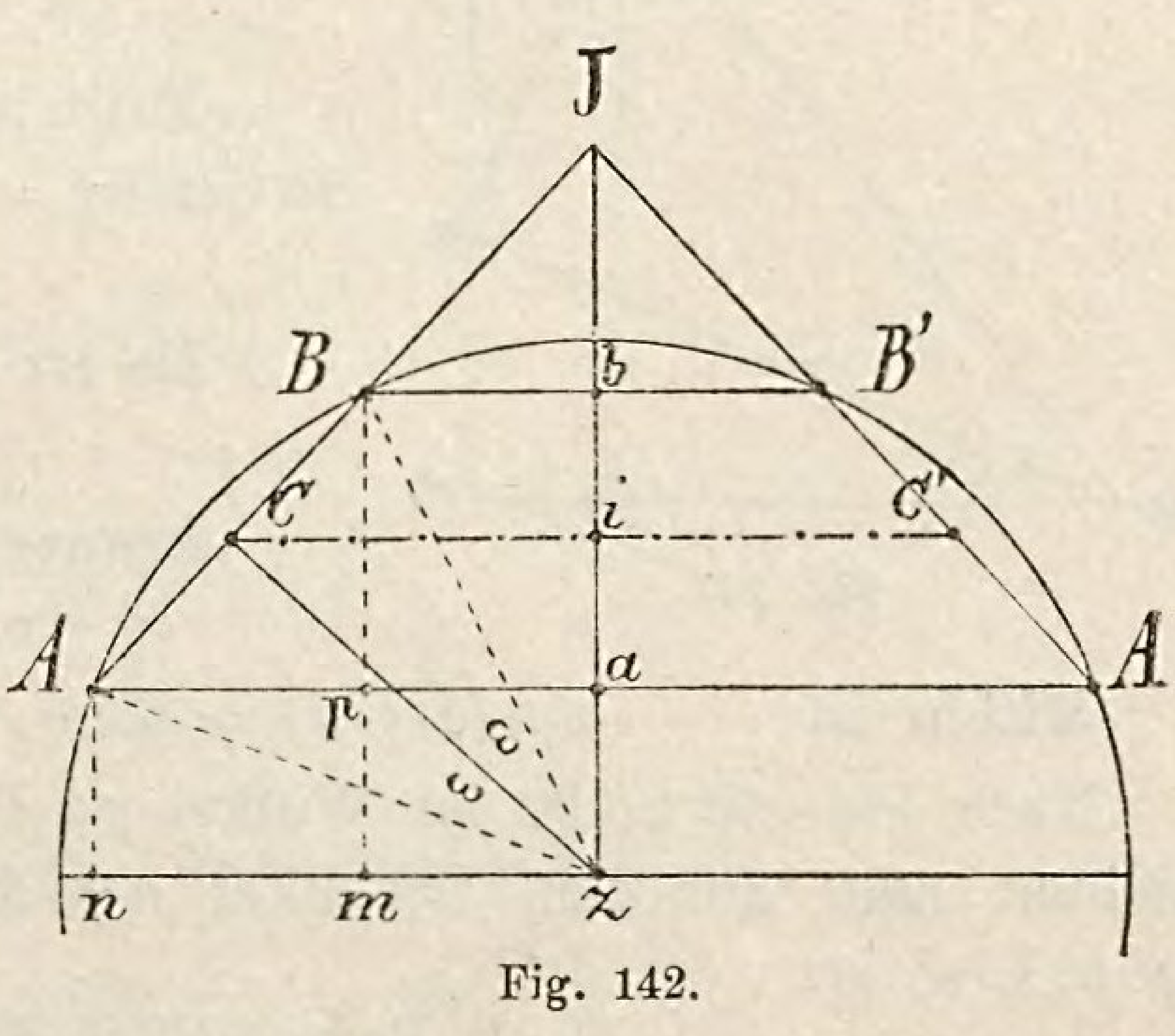


Fig. 142.

Denkt man sich die Sehne möglichst klein, so wird sie zum Bogen AB selbst und der Kegelmantel geht nach S. 33 in einen

Zonenmantel über, alsdann ist

$$2\,r \cdot \pi \cdot ab = 2\,Ci \cdot \pi \cdot \operatorname{arc} AB$$

oder gekürzt
$$2\,r \cdot ab = 2\,Ci \cdot \operatorname{arc} AB.$$

Bezeichnen wir den Parallel BB' mit φ'', den AA' mit φ' und endlich den CC' mit φ, so ist

$$AB = \varphi'' - \varphi' \text{ und } \varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'').$$

Für arc AB ergibt sich aus der Proportion

$$360^0 : \varphi'' - \varphi' = 2\,r\,\pi : \operatorname{arc} AB$$

dafs
$$\operatorname{arc} AB = \frac{r\,\pi\,(\varphi'' - \varphi')}{180} \text{ ist.}$$

Somit enthält die obige Gleichung nur noch die unbekannten Gröfsen ab und Ci.

Das Perpendikel $Bm = r \sin \varphi''$ und das Perpendikel $An = r \sin \varphi'$. $Bp = r \sin \varphi'' - r \sin \varphi'$. Da aber ab und Bp, weil sie beide zwischen den Parallelen AA' und BB' liegen, gleich lang sind, so ist

$$ab = r(\sin \varphi'' - \sin \varphi') = 2\,r \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \sin \tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi')^{*}).$$

*) Figur 143 gibt die Winkel so zusammengestellt, dafs sie den einen Schenkel ae gemeinschaftlich haben, und dafs die Schenkel ah und ad einen Winkel einschliefsen, welcher der Summe der Winkel c und x gleich ist. Bezeichnet man auf dem Schenkel ah des Winkels x einen Punkt b so, dafs $ab = 1$, so ist das von b auf ad gefällte Perpendikel

$$bf = \sin(c + x).$$

Ferner ist das von b auf ae gefällte Perpendikel

$$be = \sin x.$$

Fällt man von b das Perpendikel bg auf dh, so ist $bf = dg = de + eg$, also

$$\sin(c + x) = de + eg.$$

Es ist aber $de = ae \,.\, \sin c$; $ae = \cos x$, also

$$de = \cos x \,.\, \sin c.$$

Ferner ist, da Winkel beg = Winkel ead,

$$eg = be \,.\, \cos c = \sin x \,.\, \cos c.$$

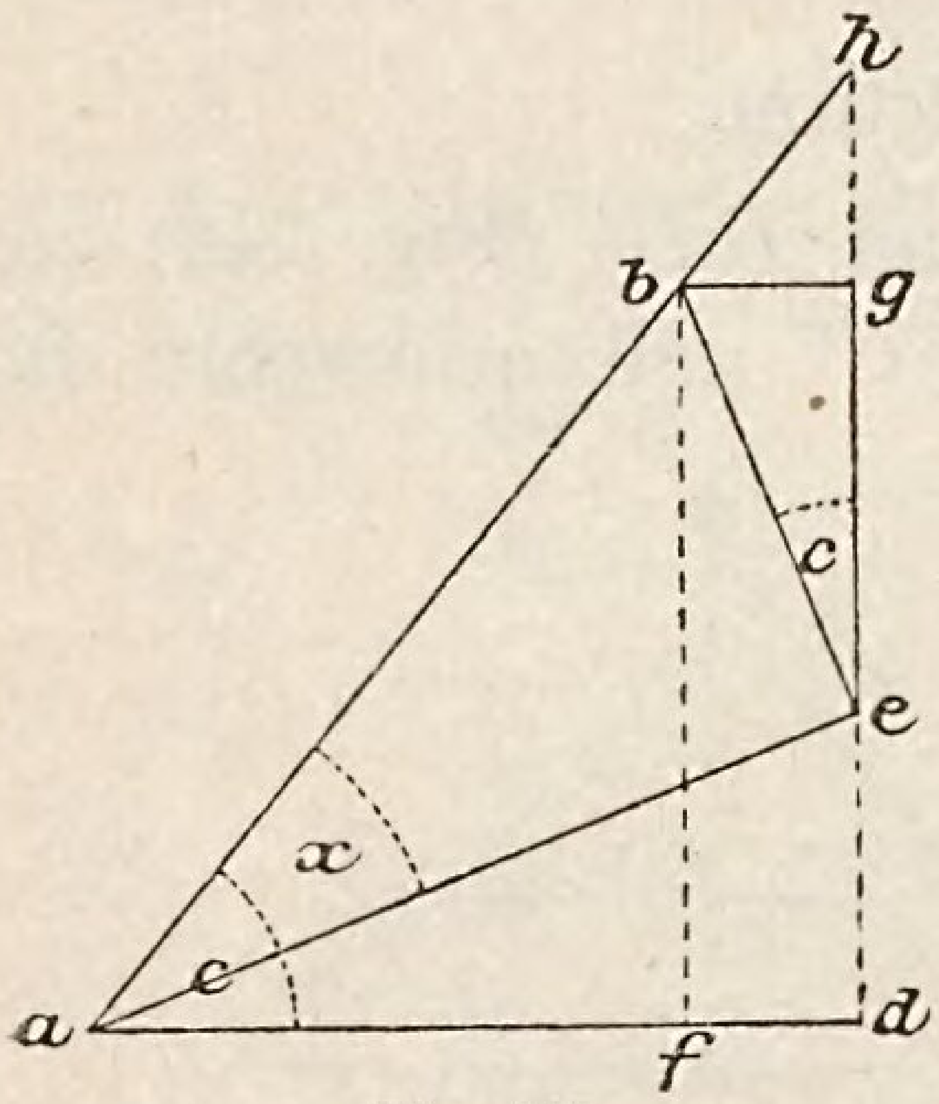


Fig. 143.

Mithin ist
$$\sin(c + x) = \sin c \,.\, \cos x + \cos c \sin x.$$

Nach Fig. 65 S. 52 ist Winkel $gad = bad - bag = \sphericalangle c - \sphericalangle x$. Bezeichnet man auf dem Schenkel ag des Winkels x den Punkt g, so dafs $ag = 1$, so ist

1. Perpendikel $dg = \sin(c - x)$
2. „ „ $bg = \sin x$
3. „ „ $ab = \cos x$.

In dem rechtwinkligen Dreieck Ciz ist Winkel $Czi = 90 - \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')$, somit

$$Ci = Cz \cdot \sin[90 - \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')] = Cz \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'').$$

Diese Gleichung hat uns eine neue Unbekannte, nämlich Cz gebracht. Verbinden wir, um sie kennen zu lernen, B und A mit z, so erhalten wir, da $Bz = Az = r$ ist, das gleichschenklige Dreieck AzB, dessen Winkel $AzB = 2\omega$ ist. Da nun Cz senkrecht auf der Sehne AB sitzt, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck BCz

$$Cz = r \cos \omega.$$

Setzen wir diese für ab und Ci gefundenen Werte in die gekürzte Anfangsgleichung oben S. 158 ein, so erhalten wir

$$4r^2 \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \sin \tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi') =$$
$$2r^2 \cdot \pi \cos \omega \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \cdot \frac{\varphi'' - \varphi'}{180}$$

oder gekürzt $$2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} = \pi \cos \omega \frac{\varphi'' - \varphi'}{180}.$$

Fällt man von g ein Perpendikel auf bf, so hat man $dg = ef = bf - be$.

Da aber $$bf = ab \,.\, \sin c = \cos x \,.\, \sin c$$
und $$be = bg \,.\, \cos c = \sin x \,.\, \cos c$$
so ist endlich, wenn man für dg, bf und be die gefundenen Werte einsetzt

$$\sin(c - x) = \sin c \cos x - \cos c \sin x.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen von einander mit Beachtung der Regel: „Eine Differenz $(c - x)$ wird von einer Zahl (a) subtrahiert, wenn man den Minuenden c von der Zahl (a) subtrahiert und den Subtrahenden zur entstandenen Differenz $(a - c)$ addiert", so ist

$$\sin(c + x) - \sin(c - x) = \sin c \cos x + \cos c \sin x - \sin c \cos x + \cos c \sin x = 2 \cos c \sin x.$$

Setzt man für $c + x = m$, für $c - x = n$, so ist, wenn man addiert

$$\begin{aligned} c + x &= m \\ + c - x &= + n \\ \hline 2c &= m + n \\ c &= \frac{m + n}{2} \end{aligned}$$

und wenn man subtrahiert

$$\begin{aligned} c + x &= m \\ -(c - x) &= - n \\ \hline 2x &= m - n \\ x &= \frac{m - n}{2}. \end{aligned}$$

Substituiert man beide Werte in die letzte Gleichung, so

$$\sin m - \sin n = 2 \cos \frac{m + n}{2} \sin \frac{m - 2}{2}$$

folglich $$\sin \varphi'' - \sin \varphi' = 2 \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}.$$

Diese Gleichung gibt uns für den als bekannt angenommenen Winkel ω Aufschlufs und wir erfahren durch sie, dafs

$$\cos\omega = \frac{360 \sin {}^1\!/_2 (\varphi'' - \varphi')}{\pi (\varphi'' - \varphi')} \text{ ist.}$$

Erst nach dieser Auseinandersetzung sind wir mit Cz ins Reine gekommen. Die Gerade JC bildet mit dem Radius Cz das rechtwinklige Dreieck JCz, in welchem

$$CJ = Cz \tan [90 - {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'')] = Cz \cdot \cot {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'').$$

Setzen wir für Cz den Wert $360\, r \sin {}^1\!/_2 (\varphi'' - \varphi') : \pi (\varphi'' - \varphi')$ ein, so erhalten wir für den Radius

$$CJ = \frac{360\, r}{\pi (\varphi'' - \varphi')} \cdot \sin {}^1\!/_2 (\varphi'' - \varphi') \cot \cdot {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'').$$

Die Werte für $\frac{360 \times 1}{\pi (\varphi'' - \varphi')} \cdot \sin {}^1\!/_2 (\varphi'' - \varphi') \cdot \cot {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'')$ findet man in der Tabelle XVII.

Wickelt man den Kegel, dessen Basis die Peripherie mit dem Radius Ci bildet, ab, so erhält man einen Sektor, dessen Seiten JC und JC' um den Bogen $2\pi \cdot Ci = \sphericalangle\, \omega$ abstehen. Der volle Winkel, welcher mit einer Seite des Sektors zu beschreiben wäre, beträgt $2\pi \cdot JC = 360^0$. Für den Winkel ω ergibt sich aus der Gleichung

$$2\pi \cdot JC : 2\pi \cdot Ci = 360 : \omega$$

der Wert

$$\sphericalangle\, \omega = 360 \cdot \frac{Ci}{JC}.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck CiJ ist der Winkel an der Spitze, da $Jz \perp zn$ und $JC \perp Cz$ steht, ${}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'')$ und der Quotient $\frac{Ci}{JC} = \sin {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'')$. Damit erhält die vorstehende Gleichung, wenn wir $\omega = \lambda'$ und $360^0 = \lambda$ setzen, die Form

$$\lambda' = \lambda \sin {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi''),$$

welche mit der auf S. 155 genau übereinstimmt.

Die Werte $\lambda' = 1 \cdot \sin {}^1\!/_2 (\varphi' + \varphi'')$ sind der Tabelle XVII beigegeben.

An dem mittleren Meridian trägt man vom mittleren Parallel CC' an (Fig. 142) die wahren Meridianabstände AC und BC ab und zieht durch die Schnittpunkte vom idealen Pol aus konzentrische Kreisbogen. Teilt man die Zone ${}^1\!/_2 (\varphi'' - \varphi')$ in n gleiche Teile; so treffen n Teile nördlich wie südlich vom Mittelparallel.

Bezeichnen wir den Teilbogen, welcher dem Zentriwinkel $\frac{\varphi'' - \varphi'}{2n}$ zu entsprechen hat, mit β, so erfahren wir die wahre Länge für arc β aus der Gleichung

$$360^0 : \frac{\varphi'' - \varphi'}{2n} = 2 r \pi : \text{arc}\, \beta,$$

nach welcher $$\text{arc}\, \beta = \frac{r \pi}{180} \cdot \frac{\varphi'' - \varphi'}{2n}$$ ist.

Für den Fall, dafs die Konstruktion nicht mit dem Zirkel zu bethätigen wäre, müfste man sich an das auf S. 156 und S. 157 besprochene Verfahren halten.

Bonne'sche Kegelprojektion.

Da die von Ptolemäus erfundene, von Merkator modifizierte, durch De l'Isle und Murdoch mit weiteren Abänderungen bedachte Kegelprojektion für Länderräume, wie Asien mit einer Ausdehnung von nahezu 80 Breitengraden nicht genügen konnte, so mufste entweder eine neue Projektionsart aufgesucht oder die bisherige Kegelprojektion dermafsen umgewandelt werden, dafs sie nicht nur für Zonen von 20 Breitengraden, sondern auch für solche von 50 und darüber tauglich wurde. Interessant ist es, dafs schon Ptolemäus eine solche Umwandlung vorgenommen hat, weitere Verbesserungen sind durch Petrus Apianus, Orontius Finäus, Guillaume le Testu und Merkator*) veranlafst worden. Trotzdem wurde diese umgewandelte Kegelprojektion wenig beachtet, bis endlich der Franzose Rigobert Bonne auf ihre Vorzüge hinwies, was ihm nichts geringeres eintrug, als dass sie seit jener Zeit

*) Abhandlungen zur Erd- und Völkerkunde von Oskar Peschel herausgegeben von J. Löwenberg. In der neuen Folge Seite 123 liest man in der Abhandlung: Lebensbeschreibung und Würdigung Gerhard Merkators folgendes:

„Es ist Breusings Verdienst, den Wert eines damals neuen Netzentwurfes der „herzförmigen“ Projektion Johann Stabens, Prof. an der Wiener Hochschule, am Beginn des 16. Jahrhunderts in helles Licht gesetzt zu haben. Er zog nämlich aus dem Pole als Mittelpunkt konzentrische, gleichabständige Kreise, teilte jeden nach den Verhältnissen, wie sie ihm auf der Kugel zukamen und verband die Teilungsstriche sodann durch Linien, welche die Meridiane vertraten: der erste Versuch, einem Entwurf die Vorzüge der äquivalenten Räume zu geben. Diese Projektion verfeinerte nun Merkator, indem er die Breitenparallelen nicht aus dem Pole als Mittelpunkt zog, sondern dazu die Fläche desjenigen Kegels wählte, der die Kugel im mittleren

mit seinem Namen bedacht wurde. Die Bonne'sche Projektion stimmt in den Grundzügen mit der auf S. 152 erwähnten Projektion von Ptolemäus überein.

Sie will, wie diese, dafs

1. die Parallelkreise als konzentrische Kreise erscheinen;
2. der Mittelmeridian als gerade Linie sich projiziert, die alle Breitenkreise rechtwinklig schneidet;
3. die Abstände, welche die einzelnen Parallelkreise auf dem Mittelmeridian bilden, den wirklichen Meridianabschnitten auf der Kugel gleich sind;
4. der gemeinsame Mittelpunkt der Parallelkreise auf dem Mittelmeridian in solcher Entfernung vom mittleren Parallelkreis liegt, als wäre die Karte die Abwicklung eines Kegels, der die Kugel längs dieses Mittelparallels berührt.

Sie will aber auch, und da geht sie von der eigentlichen Kegelprojektion ab, dafs

5. die einzelnen Meridianabstände auf den Breitenkreisen denen der Kugel gleich seien, weshalb die Meridiane, mit Ausnahme des mittleren, kurvische und nicht gerade Linien zu bilden haben. Hierdurch erscheint auch auf der Karte jede Fläche in ihrer wahren Gröfse. Eben deshalb liefert die Bonne'sche Projektion eine äquivalente Abbildung.

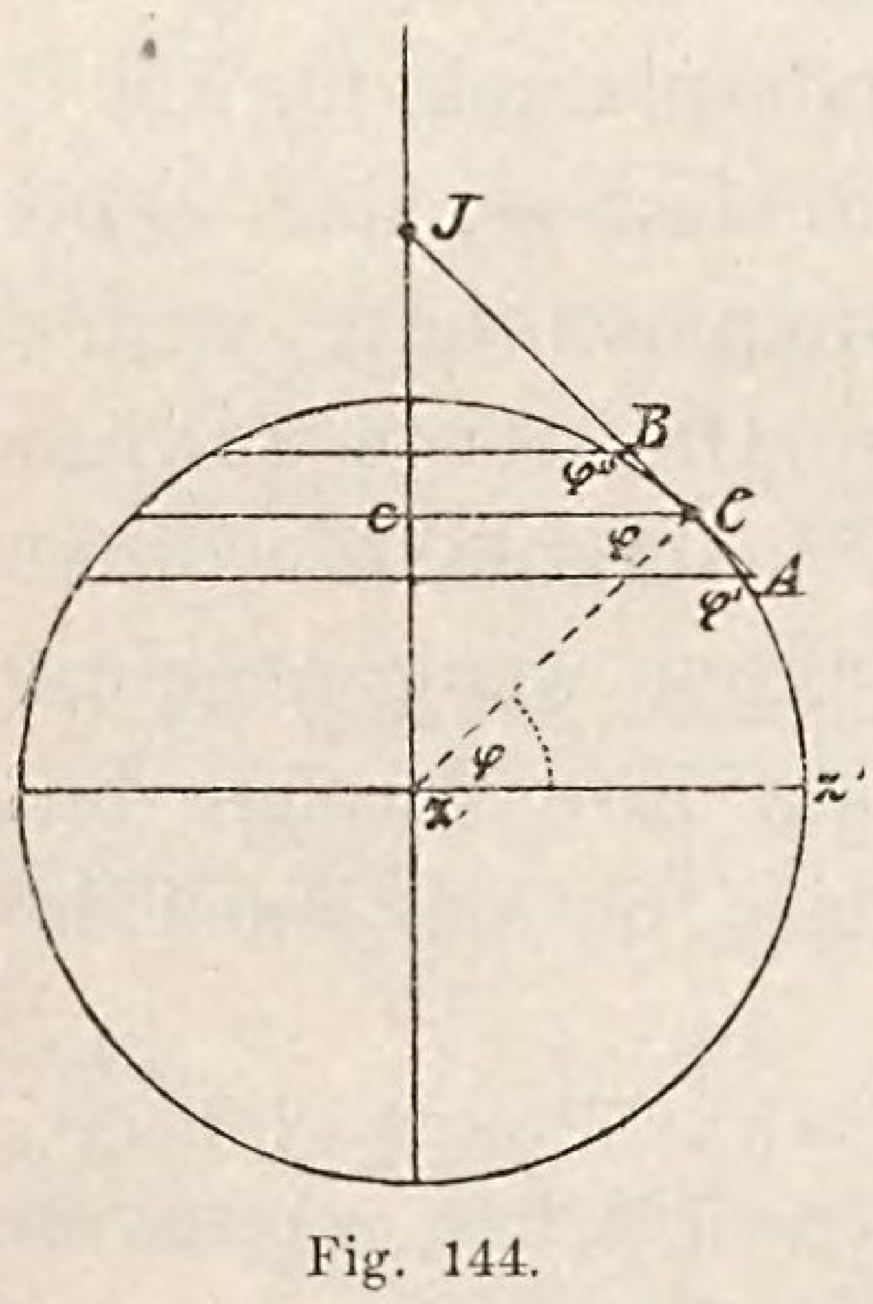


Fig. 144.

Die abzubildende Zone AB (Fig. 144) ist von den Parallelen φ'' und φ' begrenzt. Im Mittelparallel φ wird die Erzeugende JC eines Kegels, auf welchen die Kugelzone überzutragen ist, berührt. Die Erzeugende wird daher zur Tangente und nach S. 153 zum Radius des Mittelparalleles φ. Dessen Länge ist durch die Gleichung gegeben

$$JC = r \cot \varphi.$$

Tabelle V gibt JC durch $r' = 1 \cdot \cot \varphi$.

Parallel des darzustellenden Landes berührt. Darnach wurde die Weltkarte in seiner Ausgabe des Ptolemäus entworfen. Diese nämliche Projektion wurde im Anfang dieses Jahrhunderts für die Ausführung der grofsen Karte von Frankreich gewählt unter dem Titel „Projektion du dépôt de la guerre“, gewöhnlich aber schreibt man sie dem Kartenzeichner Bonne zu. Merkator ist also, um anachronistisch zu reden, der Erfinder der Bonne'schen Projektion.“

Bringt man von JC die Strecke BC in Abzug, so hat man den Radius für den Parallel φ''; addiert man dagegen AC zu JC, so erhält man den Radius des Parallels φ'.

Nun ist B von C ebensoweit entfernt als A, somit ist

$$BC = AC = n\beta$$

und die Zone $\varphi'' - \varphi' = BC + AC = 2n\beta$ und es ist

$$\beta = \frac{\varphi'' - \varphi'}{2n}.$$

Nach S. 161 ist

$$\text{arc}\,\beta = \frac{r\pi}{180} \cdot \frac{\varphi'' - \varphi'}{2n}.$$

Setzen wir, um einen übersichtlicheren mathematischen Ausdruck zu erlangen, für den Quotienten $\frac{\pi}{180} = 1^0$ die Zahl 0,01745 und dafür das Zeichen z, ferner für den Zentriwinkel $\frac{\varphi'' - \varphi'}{2n}$ wieder β, so erscheint die vorstehende Gleichung in der Form

$$\text{arc}\,\beta = rz \cdot \beta.$$

Für die Radien erhalten wir alsdann folgende Werte:

$$JB = r\cot\varphi - rz \cdot n\beta = r(\cot\varphi - n\beta \cdot z)$$
$$JA = r\cot\varphi + rz \cdot n\beta = r(\cot\varphi + n\beta \cdot z).$$

Praktisch genommen bedeutet der Ausdruck $2n(\beta rz)$ nichts anderes, als dafs man den Meridianabschnitt βrz, welcher arc β linear entspricht, vom Kartenmittelpunkt aus am Mittelmeridian nördlich wie südlich n mal abträgt und durch die Schnittpunkte vom idealen Pol aus für die Parallelkreise Bogen hindurchführt. Ist der Halbmesser nicht bestimmt, sondern $\beta \cdot z \cdot r$ mit $\varkappa^{\text{mm}}$ gegeben, so erhält man den Radius aus der Gleichung $r = \frac{\varkappa^{\text{mm}}}{\beta \cdot z}$. Kommt der Meridianbogen arc β einem Äquatorbogen arc λ an Gröfse gleich, so ist am Äquator

$$\text{arc}\,\lambda = \beta \cdot z \cdot r$$

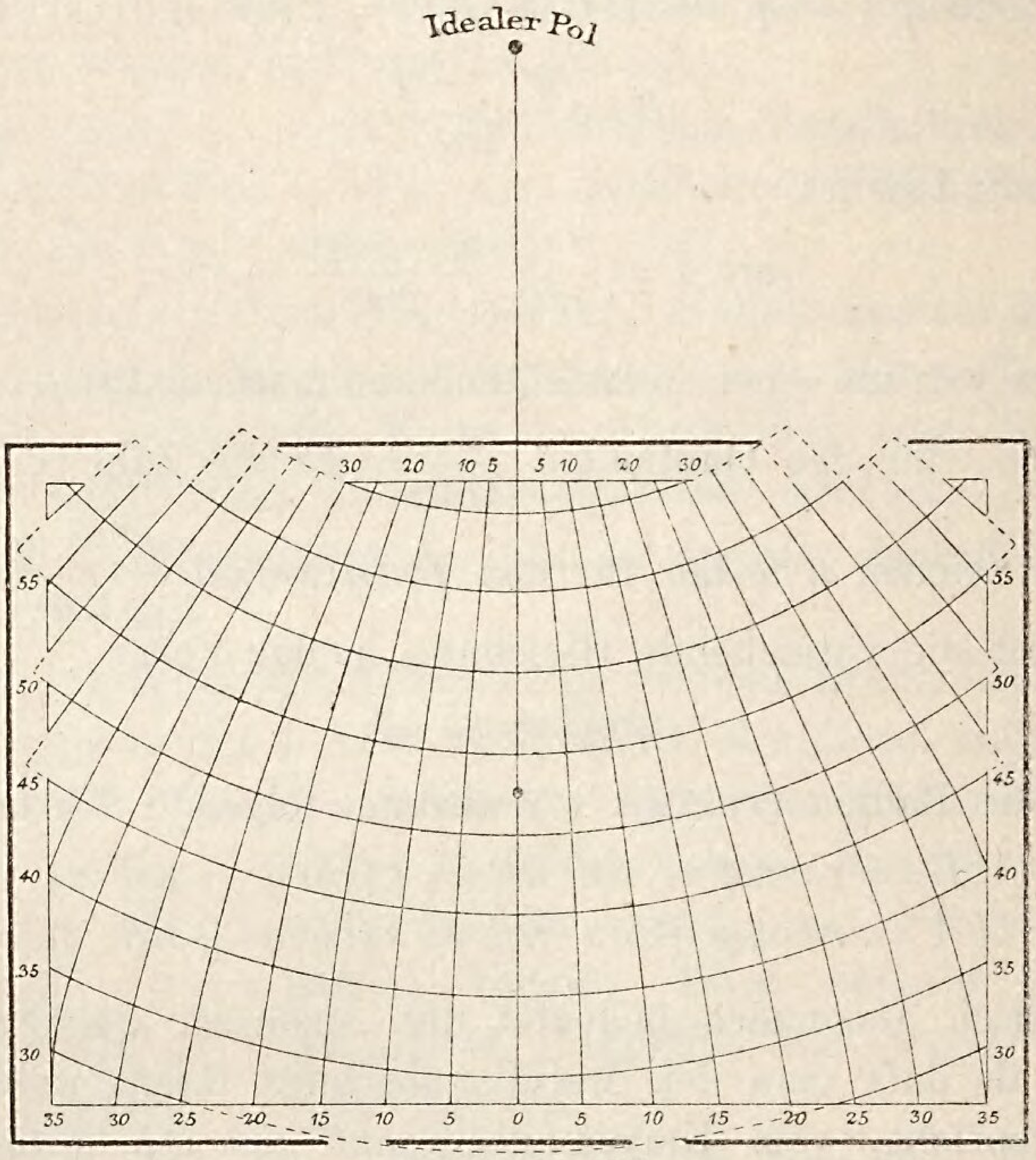
und dieser Bogen auf dem Parallel φ

$$\text{arc}\,\lambda' = (\beta \cdot z \cdot r) \cdot \cos\varphi.$$

Hieraus ist nach S. 85 zu entnehmen, dafs die Meridianabstände auf den jeweiligen Parallelen erhalten werden, wenn man den Meridianabschnitt $\beta \cdot rz$, welcher dem Entwurf als Mafseinheit zu Grunde gelegt wird, mit dem Kosinus der Breite multipliziert. Sind die numerischen Werte berechnet oder mit Hilfe der Tabelle IV bestimmt, so trägt

man sie rechts wie links vom Mittelmeridian an den Parallelkreisen auf und zieht zur Erstellung der kurvischen Meridiane die Punkte gleicher geographischer Längen durch eine stetige Linie zusammen.

Das Netz von Europa (Fig. 145) ist nach diesen Prinzipien im Mafsstabe 1 : 87500000 entworfen



1 : 87 500 000.

Fig. 145.

Für den Fall, dafs weder der gewöhnliche Zirkel noch der Stangenzirkel die Konstruktion ermöglichen, ist der Mittelparallel mittelst der Zentri- und Tangentialwinkel nach den Lehrsätzen der analytischen Geometrie S. 57 zu erforschen. Die Abwicklung des Kegels, in den die Kugel eingeschoben wurde, gibt einen Sektor, dessen äufsere Halbmesser den Zentriwinkel

$$\sphericalangle\, \omega = 360 \cdot \frac{Cc}{Cz} = 360 \cdot \sin \varphi$$

einschliefsen. Es ist dann auch für diesen Fall

$$\lambda' = \lambda \sin \varphi$$

und nach S. 157

$$x = CJ \sin \lambda' \ldots = r \cot \varphi \sin \lambda'$$

und $$y = CJ \sin \lambda' \cdot \tan {}^1\!/_2\, \lambda' \ldots = r \cot \varphi \sin \lambda' \tan {}^1\!/_2\, \lambda'.$$

Ist nach den gefundenen Werten der Bogen $q z q'$ (Fig. 146) konstruiert, so gewinnt man von ihm aus die nördlichen und südlichen Parallelkreise, indem man von den Punkten $z\ a\ b\ c\ d$ Bogen

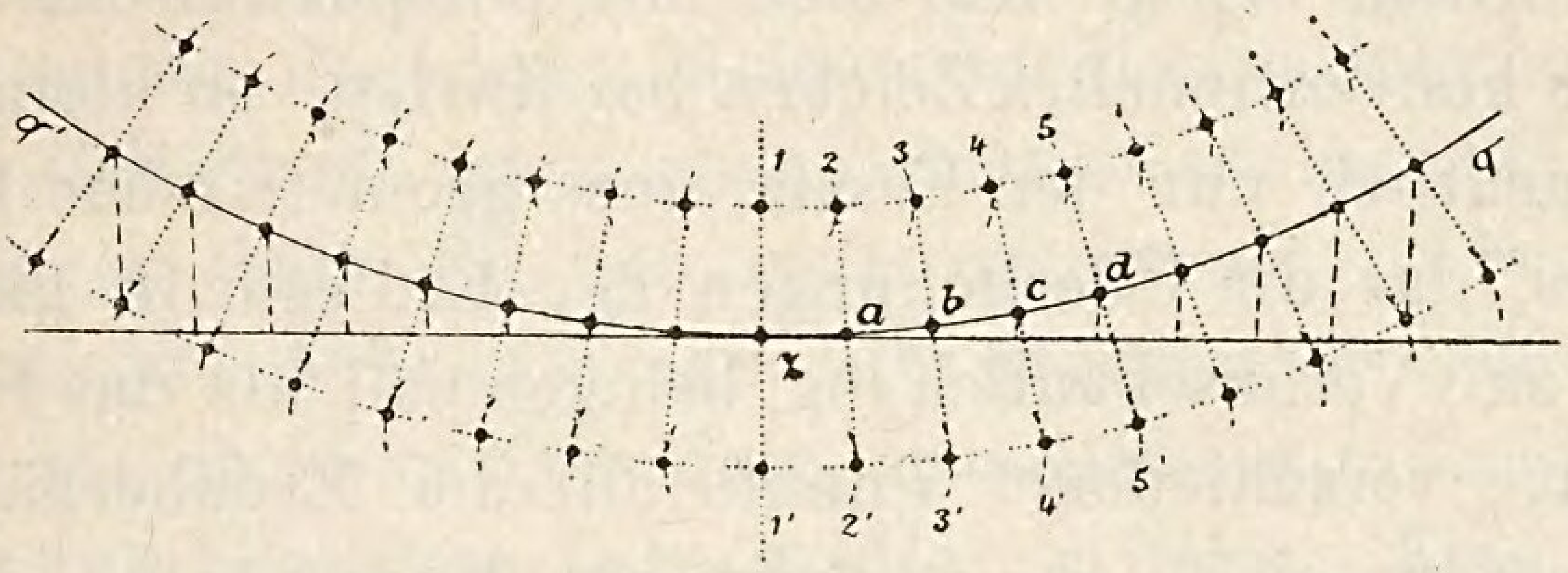


Fig. 146.

mit der Weite $\beta \cdot z \cdot r$ beschreibt. Dieselben seien 1, 2, 3, 4, 5 . . . oder auch 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ . . . Hierauf nimmt man für den jeweiligen Parallel $(\beta \cdot z \cdot r) \cos \varphi$ in den Zirkel und schlägt Bogen von 1 nach 2, von 2 nach 3 . . . Setzt man diese Manipulation so lange fort, als das Netz Parallelkreise erheischt und verbindet man die durch Kreuzbogen gewonnenen Punkte für die Parallelen wie für die Meridiane durch Linien aus freier Hand oder mit dem Kurvenlinial, so ist das Netz gleichfalls, wenn auch mit mancherlei Umständen verknüpft, erstellt.

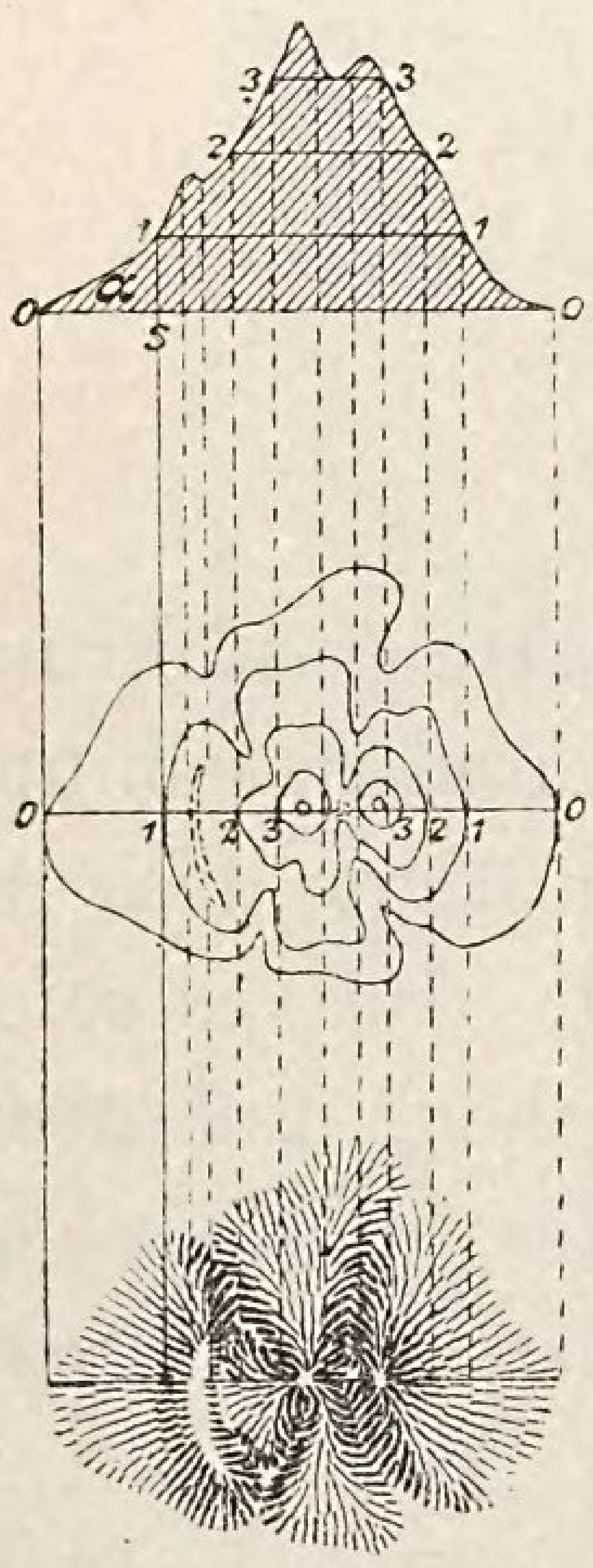
III. Terrainbilder.

Höhen- oder Kurvennetze.

Das Kartennetz ist das Gerüst, welches für exakte Ausführung eines Ländergemäldes nach der Längen- und Breitenausdehnung volle Garantie bietet, und das um so mehr, je sorgfältiger dasselbe dem Stoffe angepafst und je akurater es erstellt ist. Hat es seine Aufgabe erfüllt, so bleiben nur die Grundpfeiler stehen, und diese nehmen sich dem Bilde gegenüber so geringfügig aus, dafs sie von vielen unbeachtet bleiben, nur von Kennern eines wohlverdienten Blickes gewürdigt werden.

Die Materie aber, die das Netzgerippe erfüllt, bilden Ländergestalten, Meeresgestade, Flüsse und Seen, Städte und Märkte, endlich Ebenen und Höhen, Berge und Thäler. Gewifs ein reicher Stoff für ein buntes Gemälde. Und dennoch ist es nicht schwer, so ein Ländergemälde zu deuten, da von jeher nur übliche oder konventionelle Zeichen, die gleichsam ein kartographisches Alphabet bilden, angewendet werden, nämlich für fliefsende Gewässer Flufslinien für Seen Uferränder, für Strafsen Chaussee-

linien, für Städte Ortspunkte, für Berge Sterne und für Gebirge Raupen. Aber diese Raupen gehören erst in jüngster Zeit zu den herkömmlichen Zeichen. Sie sind ein Kind des 18. Jahrhunderts, vordem behalf man sich mit perspektivischen Maulwurfshügeln. Als konventionelles Zeichen bei Karten von kleinem Maſsstab sind sie eigentlich nur der Ersatz eines geometrischen Höhennetzes, eines Netzes, das die Überhöhungen der Erdfeste in gleicher Weise dem Leser zur Veranschaulichung bringen soll als das Kugelnetz die örtliche Lage verschiedener Punkte auf der Erdoberfläche. So alt nun Kartennetze sind, so neu ist ein Kurvennetz. Der Erfinder desselben ist der kurfürstlich-sächsische Major Lehmann. Durch sein 1799 erschienenes Werk: „Darstellung einer neuen Theorie der Bezeichnung schiefer Flächen im Grundriſs oder der Situationszeichnung der Berge“ kam Licht und System in die Terraindarstellung, und dem Netz der Flächengliederung vermochte er ein ebenbürtiges Netz der vertikalen Erdgliederung an die Seite zu stellen. Hiermit hat die Kartographie ihren Schluſsstein gefunden, so daſs sie fähig ist, Breite und Länge, Höhe und Tiefe im Ländergemälde zum mathematischen Ausdruck zu bringen. Wie kam aber Lehmann auf die mathematische Basierung der Überhöhungen? Also:


Fig. 147.

Lehmann dachte sich einen Berg (Fig. 147) durch Horizontalebenen in gleichen Abständen geschnitten. Die Schnittlinien solcher Ebenen bilden Kurven. Projiziert man dieselben, so erhält man den Berg in einer Ebene in den kurvischen Peripherien seiner Schnittebenen. Diese Kurven erhielten den Namen Horizontalen und bei gleichem Höhenabstand die Bezeichnung äquidistante Horizontalen. Auffallend erscheinen bei gleicher Schichthöhe die bald weiten, bald engen Horizontalschichten, doch die Deutung übernimmt das Profil der Bergzeichnung selbst. Weite Horizontalen sind die Projektion sanfter, enge dagegen die steiler Berghänge. So gestattet das Kurvennetz das Ablesen eines Berges nach Höhe, Form und Neigung des Hanges.

Doch hiermit begnügte sich Lehmann nicht, noch fehlte der Zeichnung die Plastik und der die Sache erschöpfende mathematische Ausdruck. Um beide zu gewinnen, sah er die Horizontale als die

Kante eines körperlichen Winkels an, den der Abhang mit der betreffenden Horizontalebene einschliefst. Indem er seine Gröfse durch den Neigungswinkel, dessen Schenkel senkrecht zur Kante oder Horizontale stehen müssen (s. S. 49), erforschte, kam er behufs der Ausfüllung oder dunkleren Färbung der Horizontalschichten einerseits auf den Gedanken, den zweiten Schenkel os (Fig. 147), der in die Horizontalebene selbst fällt und weiter nichts als die Projektion des ersten $o1$ ist, als Schraffe oder Bergstrich zu gebrauchen und andererseits auf den wichtigen Satz, dafs alsdann jeder Bergstrich senkrecht zur Horizontale stehen müsse. Eine Verbindung der beiden Schenkel durch die Schichthöhe $s1$ brachte ihn auf das rechtwinklige Profilsdreieck des Bergstriches. Ist nun Figur 148 bei den Böschungsverhältnissen α, β, γ die konstante Schichthöhe $ss' = h$, so erhält man aus den betreffenden Profilsdreiecken für die Bergstriche ab, cd, ef die Werte

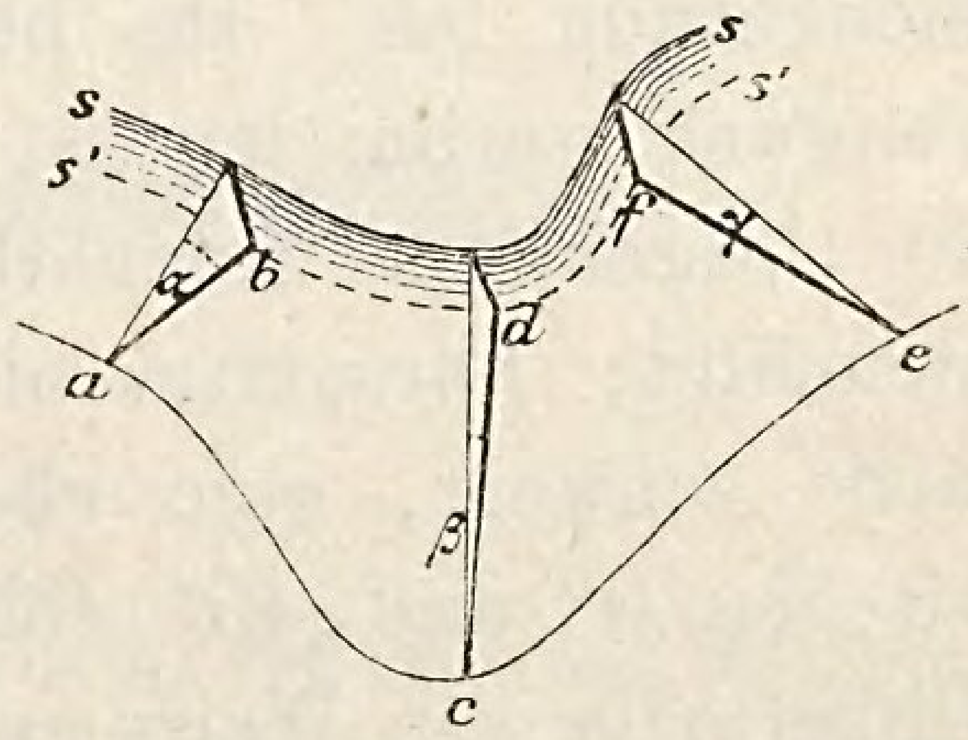


Fig. 148.

$$ab = h \cot\alpha;\quad cd = h \cot\beta;\quad ef = h \cot\gamma.$$

Unter den Bergstrichen bei gleicher Schichthöhe mufs eine gewisse Proportionalität statthaben, weshalb wir sie zu einander in ein Verhältnis bringen und sagen können

$$ab : cd : ef = \cot\alpha : \cot\beta : \cot\gamma,$$

was in Worten ausgedrückt heifst:

Die Bergstriche für dieselbe Schichthöhe verhalten sich wie die Kotangenten der zugehörigen Böschungswinkel.

Hieraus ergeben sich für den Bergstrich zwei weitere wichtige Sätze:

1. Bergstriche von gleicher Länge haben gleiche Böschungswinkel, und
2. bei Bergstrichen von ungleicher Länge gehört zum kürzern Strich der gröfsere Böschungswinkel und zum längeren Strich der kleinere Böschungswinkel.

Aus der Tabelle V finden wir für die Hauptgradationen die Werte

für	$0^0 =$	∞	für	$25^0 =$	2,15
„	$5^0 =$	11,43	„	$30^0 =$	1,73
„	$10^0 =$	5,67	„	$35^0 =$	1,43
„	$15^0 =$	3,73	„	$40^0 =$	1,19
„	$20^0 =$	2,75	„	$45^0 =$	1,00.

Stellen wir die Kotangenten wie die ihnen entsprechenden Werte zu einander ins Verhältnis und setzen wir die Strichlänge

für 5° als Einheit, so gewinnt man ein übersichtliches System für die Strichlängen bei gleicher Schichthöhe; denn

$$\cot 5^0 : \cot 10^0 : \cot 15^0 : \cot 20^0 : \cot 25^0 : \cot 30^0 : \cot 35^0 : \cot 40^0 : \cot 45^0$$

verhält sich annäherungsweise wie

$$1 : {}^1/_2 : {}^1/_3 : {}^1/_4 : {}^1/_5 : {}^1/_7 : {}^1/_8 : {}^1/_{10} : {}^1/_{11}.$$

Obwohl man aus den Strichlängen der Bergstriche innerhalb einer Horizontale den Neigungswinkel abzuschätzen wuſste, so begnügte sich Lehmann hiermit noch nicht, Irrungen waren noch möglich, er fügte, um dieselben ja auszuschlieſsen und um die Plastik zu erhöhen, dem Verhältnis der Strichlängen noch das der Beleuchtung bei. Da bei 45° Neigung eine Ersteigung mit Anstrengung verbunden ist, so hielt er sie einem senkrechten Hang oder besser der Schichthöhe gleich. Senkrecht faſste er als unbeleuchtet; horizontal als hell beleuchtet auf. Ein Hang von 45° wurde schwarz, eine ebene Fläche blieb weiſs. Alle Neigungen zwischen 0° und 45° sollten durch das Gemenge von Licht und Dunkel oder von Weiſs und Schwarz zum Ausdruck gebracht werden. Zu dem Zwecke teilte er die Schichthöhe oder, was das gleiche ist, den Hang von 45° in 9 Teile (Fig. 149). Bei 0° Neigung bleibt das

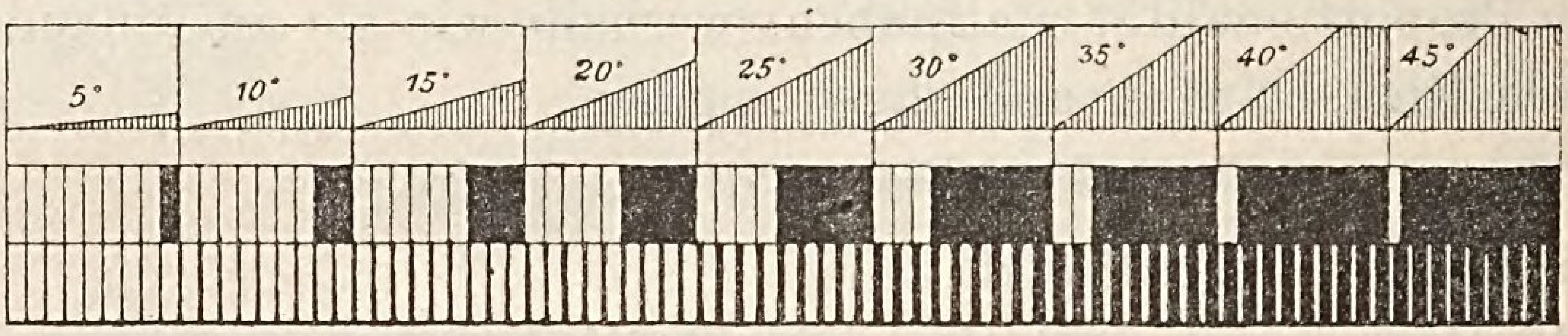


Fig. 149.

Papier weiſs, bei 5° wird ein Teil schwarz und 8 Teile bleiben weiſs, bei 10° Steigung werden 2 Teile schwarz und 7 Teile bleiben weiſs. Hierdurch gelangte er zu folgender Beleuchtungsskala:

Steigung	Weiſs : Schwarz
0° (eben) vollkommen weiſs	
5° (sanft)	= 1 : 8
10° (mäſsig steil)	= 2 : 7
15° (steil)	= 3 : 6
20° (sehr steil)	= 4 : 5
25° (auſserordentlich steil) .	= 5 : 4
30° „ „ „ .	= 6 : 3
35° (jähe)	= 7 : 2
40° „	= 8 : 1
45° (schroff) vollkommen schwarz.	

So ist der Bergstrich nach Länge, Stärke und der Art seiner Anlegung an die Horizontale mathematisch bestimmt und befähigt, aus ihm jederzeit wieder, wie aus einem Gefäſse, den Inhalt als da ist: Höhe und Form eines Berges zu schöpfen. Man miſst nur die Länge einer ganzen Schraffe, vervielfacht sie mit der Reduktionszahl, um sogleich die Naturgröſse zu erhalten, und erforscht aus dem Verhältnis vom Weiſsen zum Schwarzen den zum Bergstrich gehörigen Böschungswinkel. Ist die Länge einer Schraffe μ Millimeter, der zugehörige Neigungswinkel α, die Reduktionszahl M, dann ist die Schichthöhe

$$h = \frac{M\mu}{\cot\alpha}$$

und die Höhe eines Berges von n solchen Schichthöhen:

$$B = n \cdot \frac{M\mu}{\cot\alpha}.$$

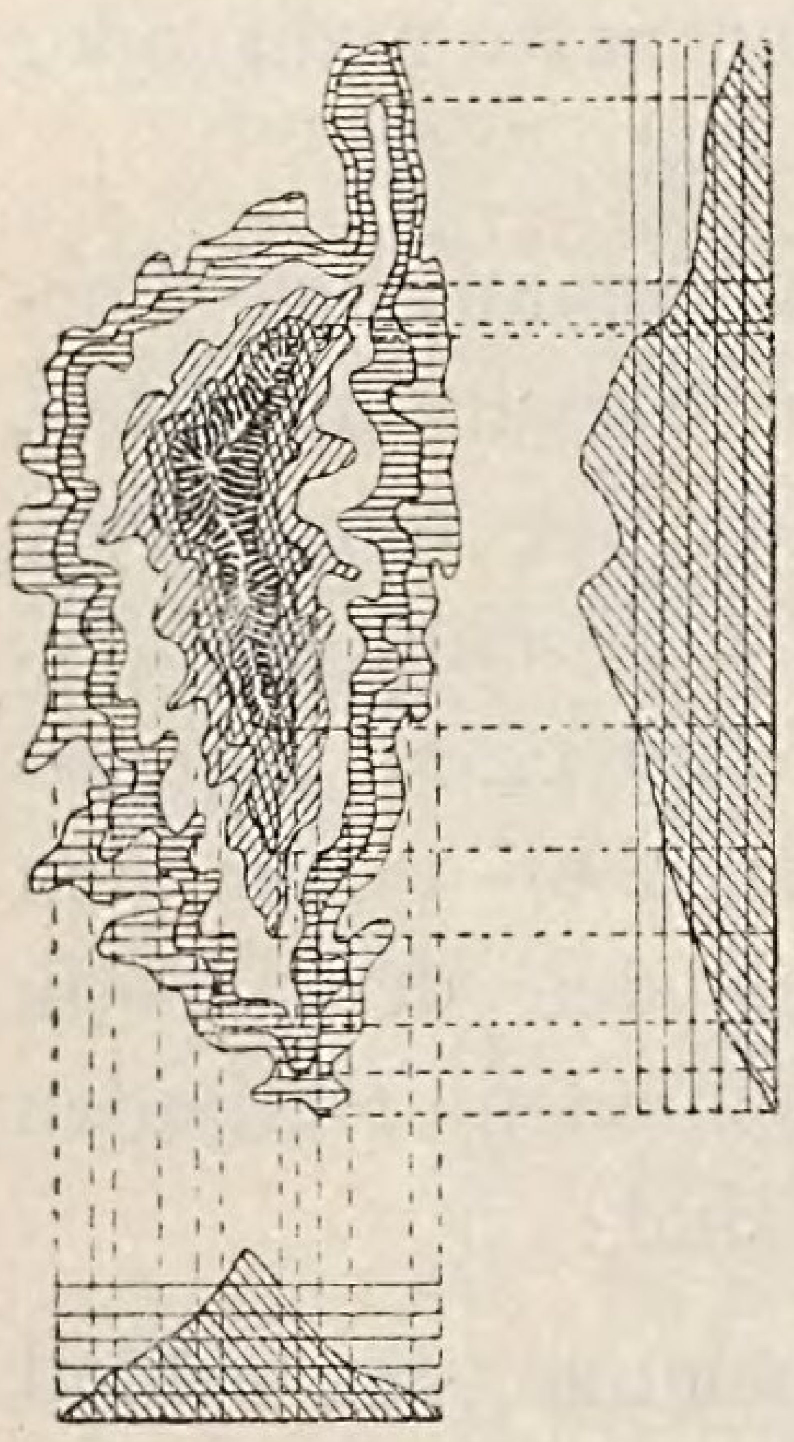
Beachtet man die Böschungsverhältnisse von Schicht zu Schicht, so vermag man den betreffenden Berg nach Höhe und Form aus der Schraffe herauszuzeichnen.

Die Theorie ist sonach der Wirklichkeit auf Schritt und Tritt gefolgt; aber sie praktisch zur Ausführung zu bringen, war ein Unternehmen, daran die Feinheit der theoretischen Sätze mehr oder weniger scheitern ging.

Denn wo ist ein Zeichner zu finden, der genau das Verhältnis des Schwarzen zum Weiſsen Strich für Strich einhalten, der auf die gleichen Raumteile die gleiche Anzahl der Bergstriche bringen möchte und wo ist ein Leser, der die Böschungswinkel genau abzuschätzen und die in der Zeichnung versteckten äquidistanten Horizontalen abzuzählen verstünde? Um aber weder den Vorteil eines sicheren geometrischen Netzes noch den der Plastik der Zeichnung aufgeben zu müssen, wurden verschiedene Methoden aus dieser einen Theorie entwickelt. Dieselben sind:

1. Bergzeichnung in Horizontalen ohne Strichelung. Sie erhielt ihrer gleichen Höhenabstände wegen den Namen Terrainzeichnung in äquidistanten Horizontalen, in Isohypsen, in Schichtenlinien, oder in Niveaukurven.
2. Bergzeichnung durch getuschte oder geschummerte Töne, welche das zeitraubende Stricheln abstellte und hellere oder dunklere Töne für leichte oder starke Böschung eintreten lieſs.

3. Bergzeichnung mit seitlicher Beleuchtung. Indem man das Licht von der linken Seite auf das Relief als einfallend sich vorstellte, brachte man in die Zeichnung den Wechsel von Licht und Schatten. Die Plastik der Darstellung gewann aufserordentlich, aber dies geschah auf Kosten der Richtigkeit. Oft erhielten dadurch steile Abhänge helle und sanfte Hänge dunkle Töne. Hierdurch wurde eine falsche Vorstellung im Beschauer erzeugt und so mufste man auch von dieser Methode der körperlichen Darstellung lassen.
4. Endlich kam man auf die Idee die Bergzeichnung in Horizontalen und in der Strichelung oder Schummerung, aber in verschiedenen Farben auszuführen. Ist die Strichelung schwarz, so werden die Horizontalen rot; ist die erstere in braun ausgeführt, dann werden die letztern schwarz. Nun war nur mehr ein Schritt, nicht blofs Berge und Gebirge, sondern die Überhöhungen der ganzen Erdfeste vom Meeresspiegel aus oder nach ihrer absoluten Höhe in Isohypsen vereint mit der Schraffier-, Tusch- oder Schummermethode darzustellen. Denn denkt man sich
5. „vom Meeresspiegel aus die Erdoberfläche durch Niveauflächen, welche diesem parallel und übereinander in gleichen Vertikalabständen liegen, geschnitten, so bilden die Linien, in welchen die horizontalen Niveauflächen die Oberfläche der Erde schneiden, in sich zurückkehrende Kurven". In dieser Art ist die Insel Corsika (Fig. 150) gezeichnet. Da aber die mittlere Höhe der Kontinente an 300^m^ die Meeresfläche überragen würde, so nimmt man die Kurven unter 300^m^ als Tiefland- und die über 300^m^ als Hochlandsbezeichnung auf. Um aber das Ablesen von Hoch und Nieder möglichst zu erleichtern, gibt man den Tieflandskurven einen grünen Ton (in der Figur durch horizontale Schraffur vertreten), die Kurven von Hochebenen bleiben weifs, Gebirgskurven über der Hochebene nimmt man braun (durch schräge und gekreuzte Strichelung in der Figur ausgedrückt). Bei der zunehmenden Höhe eines Gebirges mehren und verengern sich die Kurven. In diesem Fall, da hier Anbau und Besiedlung zumeist gering ist, läfst man die


Fig. 150.

Bergschraffur eintreten. Denn sie wirkt plastischer als die vielen, engen Kurven und verleiht dem Bilde der einfacheren Darstellungsform wegen mehr Übersichtlichkeit und Klarheit. In gleicher Weise kann die Bergschraffur bei weit von einanderliegenden Kurven ergänzend eintreten und leichtes Terrain innerhalb der Schichtenlinien durch sie hervorgehoben werden. Das einer Karte hie und da beigegebene Profil dient zur Veranschaulichung der Höhenlage eines Ortes über der Meeresfläche in ähnlicher Weise wie der Linienmafsstab zum Abschätzen oder Abnehmen von Wegstrecken.

So möchte die Kartographie ihren Gipfelpunkt erreicht haben, zumal in unserer Zeit, da die Praxis, um mustergültige Kartenbilder zu liefern, eifrigst bemüht war, den theoretischen Anforderungen möglichst gerecht zu werden.

Berechnung des Flächeninhaltes auf Karten.

Das Kartennetz gibt ein Land nach seiner Flächenausdehnung, aus diesem Liniensystem von Meridianen und Parallelen läfst sich die Fläche eines Landes auch wieder ermitteln. Nehmen wir z. Ex. die Pyrenäenhalbinsel. Dieselbe zeigt, dafs in der Breite 38 — 40°, wenn das Netz von 2 zu 2 Grade fortschreitet, 3 Trapeze und in der Breite 40 — 42 beinahe 4 Trapeze vom Land bedeckt sind. Mithin ist nur notwendig das Trapez einer Zone zu berechnen, nach welchem sich dann die ganze Fläche bestimmen läfst. Nehmen wir das Trapez zwischen 38 — 40° nördlicher Breite und 10 — 12° östlicher Länge von Ferro, so haben wir nach der Tabelle II für die Höhe des Trapezes 222 $^{\text{km}}$ und für die Grundlinie den doppelten mittleren Parallelgrad 173,23 $^{\text{km}}$, somit für die Fläche selbst 222 × 173,23 $^{\text{qkm}}$. Diese Art der Berechnung wäre leicht durchzuführen, wenn jede Masche des Netzes auch vom Land vollkommen bedeckt wäre. Die lückenhaften Stellen haben von jeher grofse Schwierigkeiten bereitet und zu mühsamen Auszirklungen und Berechnungen geführt. Schon 1814 kam der Trigonometer J. M. Hermann zu München auf ein Instrument, Planimeter genannt, mittels dessen man durch blofses Umfahren einer Fläche den Inhalt erfahren konnte. Leider fand seine Erfindung wenig Beachtung und wäre vergessen worden, wenn nicht Professor Gonnella zu Florenz und der Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon in der Schweiz gleichfalls auf die Konstruktion eines Flächenmessers gekommen wären.

Um seine Verbesserung haben sich vornehmlich Ingenieur Wetli in Zürich, Astronom Hansen in Gotha und Mechaniker Starke in Wien verdient gemacht. Seiner Wichtigkeit wegen schalten wir eine Beschreibung und kurze Gebrauchsanweisung dieses sinnreich erdachten Instrumentes bei. Sein vollständiger Name ist Polarplanimeter, weil sich seine beiden Arme A und B (Fig. 151), die durch eine Vertikalachse in Verbindung gebracht sind, um einen festen Punkt oder Pol P drehen. In der Hülse H befindet sich die Laufrolle L. Ihr äufserster Rand

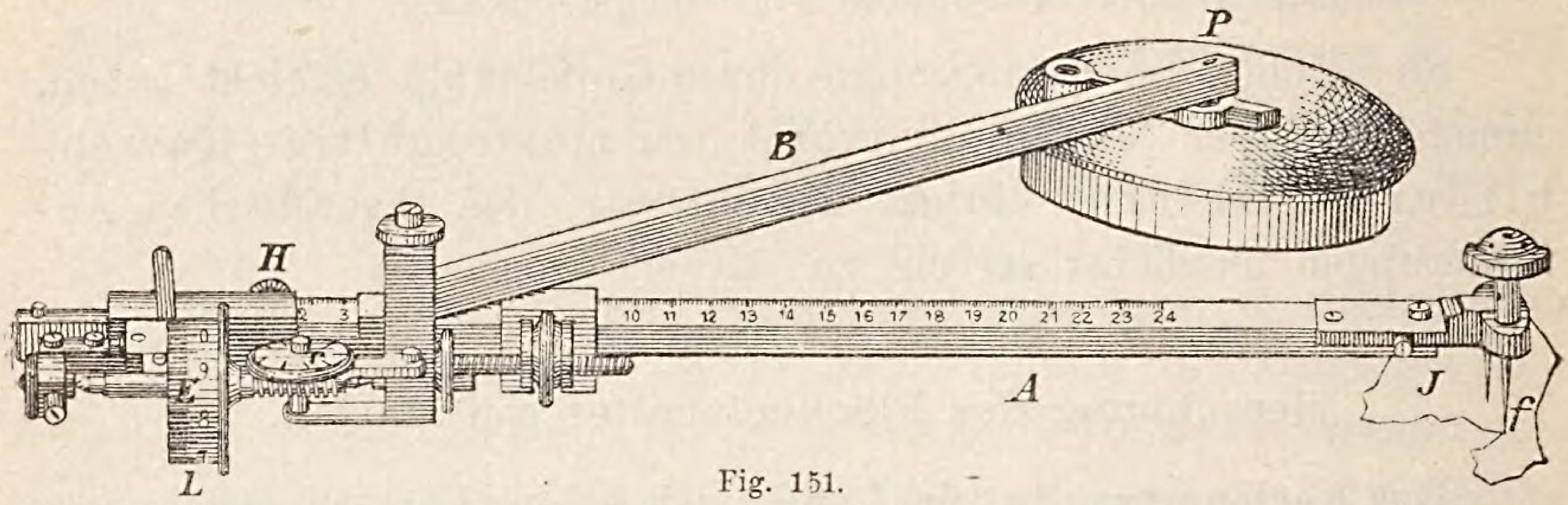


Fig. 151.

ist abgerundet und poliert, ihr cylindrischer Limbus E in 100 Grade geteilt, welche mittelst eines Nonius bis auf Zehntelsgrade abgelesen werden können. Die ganzen Umdrehungen zählt man an dem Rädchen r. Will man die Fläche J abmessen, so stellt man den Fahrstift f auf einen Punkt des Umfangs der zu messenden Fläche. Sodann liest man den Stand der Rolle an dem Nonius und dem Rädchen r ab. Ist er gerade $4^0\,35{,}3$, so notiert man 4,353. Alsdann umfahre man von links nach rechts die Figur bis zu dem Ausgangspunkt, lese den Stand der Rolle E wieder ab und subtrahiere die erste Ablesung von der zweiten, welche die Differenz $B - A = \Delta$ gibt. Ist auf dem Instrument 1 : 500 angegeben $0{,}1^0 = 2^{qm}$, so mifst die umfahrene Fläche in der Wirklichkeit $2\,\Delta^{qm}$. Die Kartenmafsstäbe sind verschieden, so dafs es den Anschein hat als müfste man für jeden Kartenmafsstab ein eigenes Instrument haben. Das ist nun aber durchaus nicht der Fall. Je gröfser die Verhältniszahl ist, um so mehr Fläche umfafst der gleiche Raum. Ist die Verhältniszahl doppelt so grofs, so vervierfacht sich die Fläche, statt 2^{qm} rechnet man 8^{qm}.

Bei dem Mafsstab 1:1 000 000 bringt man, wenn das gleiche Instrument verwendet wird, für $0{,}1^0 = 8^{qkm}$ in Rechnung, bei

1:2 000 000 alsdann für $0{,}1^0$ 4×8^{qkm}

1:3 000 000 „ „ $0{,}1^0$ 9×8^{qkm} u. s. f.

Es gibt aber auch Instrumente, die auf verschiedene Mafsstäbe verstellbar sind. Die Brauchbarkeit des Polarplanimeters*) möchte mithin nicht blofs für Pläne, sondern auch für Landkarten dargethan sein.

Hat man die Maschen, die vollkommen ausgefüllt sind, berechnet, so umfährt man den Rest eines Landes und fügt das hierdurch erhaltene zweite Resultat dem ersten bei und der Flächeninhalt ist gefunden. Um vor Fehler gesichert zu sein, umfährt man die gleichen Umrisse mehrere Male und sucht aus den Ablesungen, wenn sie sich nicht decken, das arithmetische Mittel. Aber nicht allein Ländergebiete, auch der Flächeninhalt von Flufsgebieten, von Seen und Meeren können durch den Planimeter erforscht werden.

Ist jedoch die zu messende Fläche so grofs, dafs der Pol innerhalb der Zeichnung befestigt werden mufs, so ist der Differenz Δ eine konstante Zahl beizufügen, welche für jede Mafseinheit des Planimeters auf der Seitenfläche des Armes A angemerkt ist. Hätte die Differenz $\Delta = 4{,}632$ erhalten, so wäre, im Falle die Konstante k ist, der Inhalt der umfahrenen Fläche $= (\Delta + k)\ 2^{\mathrm{qm}}$.

*) Um über die Zuverlässigkeit des Polarplanimeters eine Garantie zu haben, schlage man mit einem beliebigen Radius, jedoch in Übereinstimmung mit dem Mafsstab des Instrumentes einen Kreis und berechne seine Fläche. Seine Peripherie umfahre man vorschriftsmäfsig und vergleiche das Resultat, das man mit dem Instrumente gewonnen hat, mit dem der Berechnung. Ergeben sich Differenzen, so gleichen sie sich vielleicht durch mehrmaliges Umfahren aus, oder aber man hat das Instrument zu korrigieren. Entweder kann man den Fahrstift durch Lüftung der angebrachten Schräubchen ein- oder auswärtsschieben oder man mufs den durch Prüfung erhaltenen Fehlerkoeffizienten beim jedesmaligen Gebrauch des Instrumentes in Rechnung ziehen.

III. Teil.

Astronomisch-mathematische Geographie.

»Glücklich diejenigen, denen es gegeben ist, sich zum Himmel zu erheben! Sie lernen gering schätzen, was ihnen einst vortrefflich schien; sie lernen die Werke Gottes über alle Dinge setzen und in deren Betrachtung alle ihre Freude und Ergötzung finden. Vater der Welt, welchen Grund hast du, ein irdisches, armes, schwaches und elendes Geschöpf so hoch zu erhöhen, dafs es zum weithin herrschenden Könige wird, ja fast zum Gott: denn es denkt dir deine Gedanken nach.« Johann Kepler.

Astronomisch-mathematische Geographie.

Die Erde im Weltenraum.

Betrachten wir des Abends den wolkenfreien Sternenhimmel, so dünkt es uns, als umkreise er in stiller Nacht unsere Mutter Erde. Dabei gewahren wir, wenn wir die Betrachtung mehrere Nächte fortsetzen, dafs die einen Gestirne, wie der grofse Bär, nie unter unsern Horizont hinabtauchen, andere einen Teil ihres Umlaufes über, den andern Teil desselben unter unserm Horizont vollenden. Diese unmittelbare Wahrnehmung bringt uns zu der Ansicht des Altertums: „Die in den Mittelpunkt der Welt hingestellte Erdkugel hat die Achse für die Umdrehung des den Abschlufs des Alls bildenden Firmamentes zu tragen.“ Diese Auffassung über das Weltgebäude reichte bis ins Mittelalter hinein; aber dennoch erregte sie bei manchem denkenden Beobachter schon im Altertum Zweifel und Plato schrieb in seinem Timäus: „Die Erde, unsere Ernährerin, welche gedreht (oder geballt) ist um die durch das All ausgespannte Achse, macht er (der Weltenschöpfer) zur Wächterin und Hervorbringerin von Nacht und Tag.“

Aristarch, 270 v. Chr., lehrte, dafs sich die Erde um ihre Achse drehe und in einem schiefen Kreise um die Sonne; aber diese Gedanken fanden noch keinen Anklang, man kehrte zurück zum Schein und verblieb im Mittelalter, da die Astronomie zur Astrologie oder Sterndeuterei ausartete, dabei bis zu Kopernikus und Keplers Zeiten, also bis ins 16. Jahrhundert unserer Zeitrechnung. Wie mag man es aber für möglich halten, dafs, trotz der scheinbaren Bewegung der Himmelskörper, die winzig kleine Erde, nur ein Stäubchen im unermefslichen Weltenraum, der Punkt sein soll, um den sich das Himmelsgewölbe und alle Welten drehen sollen?

Die Umdrehung des Firmaments müfste bei den äufsersten Kreislinien von einer Geschwindigkeit sein, deren Annahme jede Wahrscheinlichkeit ausschliefst.

Viel ungezwungener erklärt sich der Umlauf der Sterne, wenn wir uns nach Plato die Sache umgekehrt vorstellen und sagen: Durch die Achsendrehung der Erde ensteht Tag und Nacht, durch sie scheint es, als seien die Sterne in kreisförmiger Bewegung begriffen, während sie stille stehen und wir durch die Umdrehung unseres Planeten an ihnen vorübergeführt werden. Diese Hypothese ist nun zur unumstöſslichen Gewiſsheit geworden, da sich für ihre Annahme vollgültige Beweise gefunden.

Im Jahre 1672 reiste der französische Astronom Richer nach Cayenne, einem Ort in Südamerika 5^0 nördlicher Breite. Er nahm eine nach Pariser Zeit regulierte Uhr mit. Als er dieselbe in Cayenne aufstellte, war er erstaunt, sie täglich um 148 Sekunden zurückbleiben zu sehen, wodurch er genötigt war, das Pendel um 3^{mm} zu verkürzen. Als er später nach Paris zurückkehrte, fand er, daſs diese Uhr täglich um 148 Sekunden vorlief, weshalb er das Pendel um 3^{mm} zu verlängern hatte. Die Ursache hiervon blieb ihm verborgen. Kaum hörte Newton von diesem rätselhaften Vorkommnis, so war er gleich mit der Deutung bei der Hand. Dieses Ereignis war ihm der experimentale Beweis für die Rotation oder Achsendrehung der Erde und für ihre abgeplattete Kugelgestalt. Bei einer Achsendrehung nämlich wirken die beiden Kräfte Zentrifugal- und Zentripetalkraft, die von ihrem Dasein Spuren und zwar erkennbare Spuren hinterlassen müssen. Denn rotiert die Erde, so sind die Pole oder Endpunkte der Achse wenig in Anspruch genommen, um so mehr die äquatorialen Regionen. Ihrer bemächtigt sich die Zentrifugalkraft und sucht sie dem Erdkern zu entfremden. Dies hat eine Annäherung der Pole gegen den Erdmittelpunkt und eine Aufbauschung der äquatorialen Zone zur Folge. Diese Abplattung und Aufbauschung ist teils durch die Gradmessung (siehe Tabelle II), teils durch das Pendel, das in dem äquatorialen Gürtel weniger, in den gemäſsigten Zonen stärker (weil näher dem Erdmittelpunkt) angezogen wird, hinreichend erkannt. Mithin steht die Erde keineswegs stille, sie bewegt sich um sich selbst, sie rotiert.

Einen anderen Beweis für die Achsendrehung hat uns Foucault geliefert. Die Thatsache, daſs ein freischwingendes Pendel nicht auf denselben Punkt (etwa eine Wand) gerichtet bleibt, sondern eine Drehung vornimmt, deutet er für Täuschung. Nicht das Pendel, sondern die Wand vollbringt die Drehung und diese nur deshalb, weil sie bei der Rotierung der Erde beteiligt ist. Und nehmen

wir von dieser Bewegung nichts gewahr, so geht es uns nicht anders als der Fliege, die auf einem Uhrzeiger sitzt. Um eine Einsicht in den Pendelversuch Foucaults zu erlangen, lohnt es sich einen Versuch*) zu machen und denselben mit Hilfe eines Globus zu erklären. Zu diesem Behufe bringt man einen mit einer Bleikugel beschwerten Faden so an, dafs man darunter einen Globus, der die Stelle der Erde zu vertreten hat, stellen kann. Bildet das Pendel die Fortsetzung der Erdachse, so steht es im Zenit des Nord- oder Südpoles. Versetzen wir das Pendel in Schwingung, doch so, dafs seine Schwingungsebene den Nullmeridian tangiert. Drehen wir die Kugel von links (West) nach rechts (Ost), so sieht es sich gerade an, als ob das Pendel den Meridianen von rechts nach links oder von Osten nach Westen entgegenkäme. Kommt der Nullmeridian wieder unter die Schwingungsebene, so hat nicht diese, sondern die Erde eine volle Umdrehung vollführt. Ist nun der Ort A (Fig. 152) von m nach n gelangt, so beträgt der Unterschied der Drehung λ^0. Genau um soviele Grade hat er sich von der Schwingungsebene entfernt. Die scheinbare, volle Drehung des Pendels däucht einem Bewohner in A kreis- oder scheibenförmig.

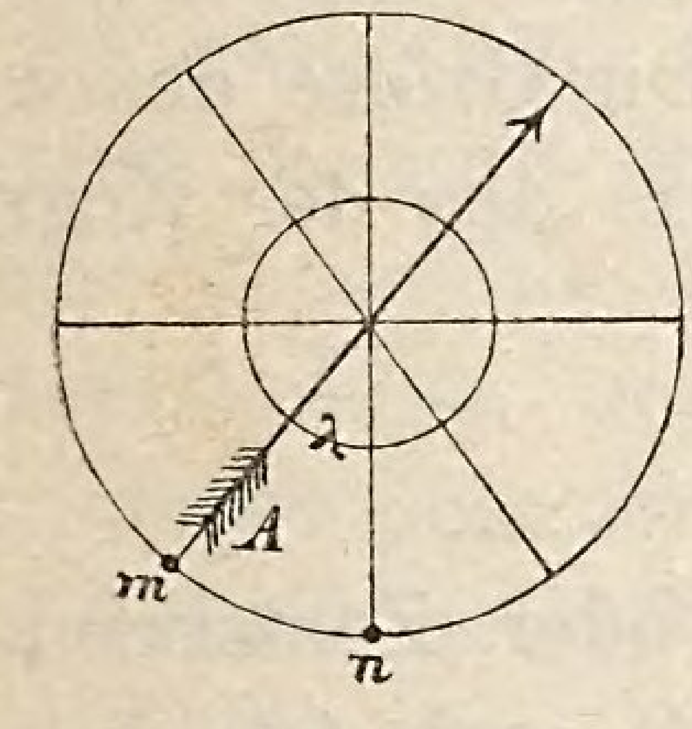


Fig. 152.

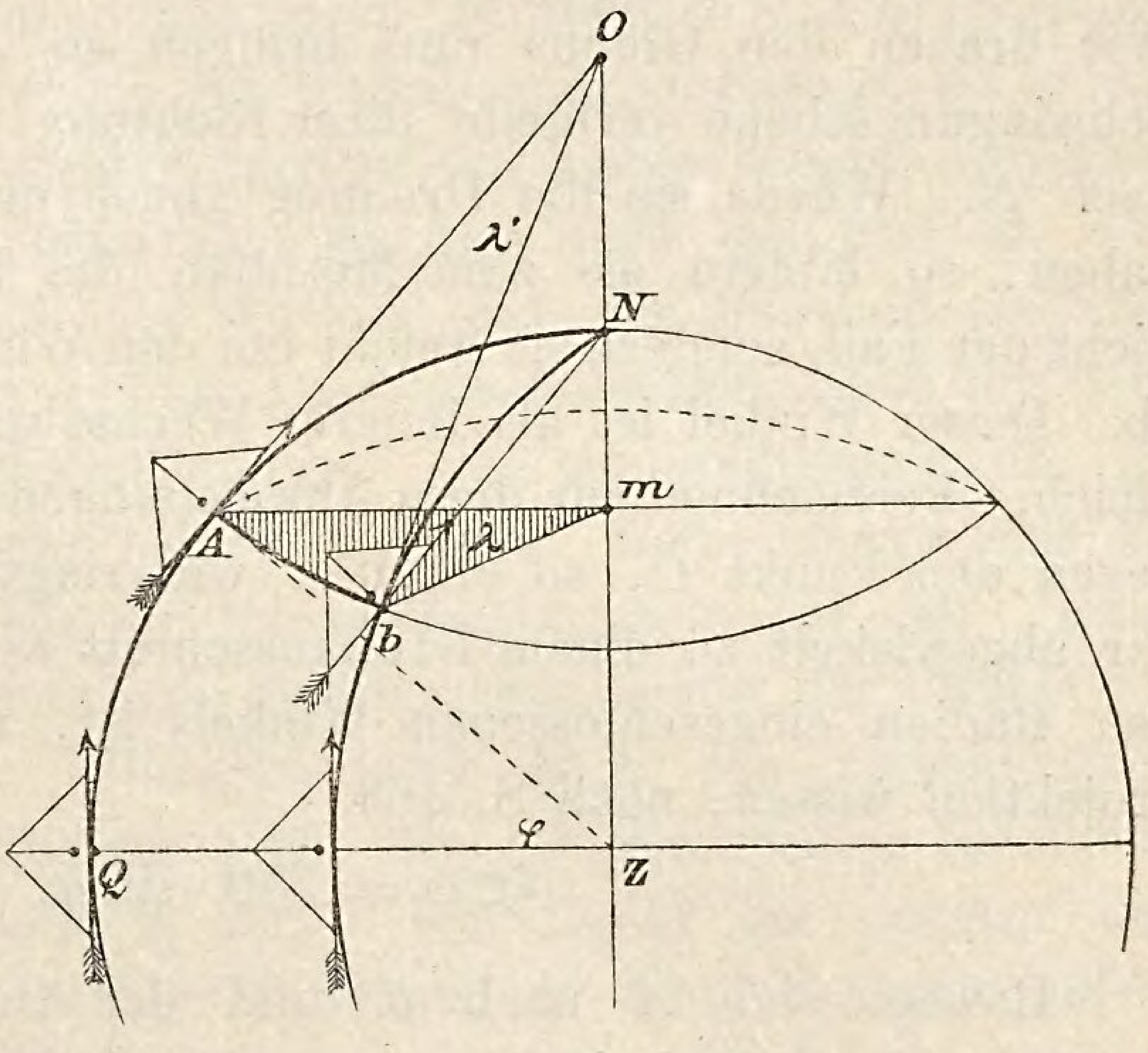


Fig. 153.

Nun wollen wir den Globus in eine solche Lage bringen, dafs das Pendel als die Fortsetzung eines Erdäquatorradius erscheint (Fig. 153). Wieder über dem Nullmeridian versetzen wir bei Q das Pendel in Schwingung. Seine Schwingungsebene befindet sich parallel

*) Den ersten Versuch stellte Foucault mit einem 2^m langen Pendel an. Derartige Versuche wurden mit viel längeren Pendeln häufig noch angestellt, sie alle bestätigen Foucaults Wahrnehmung und Deutung.

zur Achse, nie kann diese durch jene geschnitten werden. Drehen wir den Globus von West nach Ost, so bemerken wir alsbald, dafs die Meridiane in paralleler Richtung der Schwingebene nach einander zukommen oder, dafs die Schwingungsebene den Meridianen von Ost nach West parallel entgegentritt. Der Unterschied der Winkel, unter welchen die Meridiane unter einander sich schneiden, fällt hier weg, er ist Null; Meridiane wie Schwingungsebene stehen unterm Äquator zu einander parallel.

Um nun das Verhalten der Schwingungsebene zu den Meridianen zwischen Äquator und Pol zu ermitteln, geben wir dem Globus eine seitliche Lage, so dafs der Faden die Fortsetzung des Meridanradius ist, welcher den Ort A von der Breite φ berührt (Fig. 153). Indem wir durch eine Stricknadel die verlängerte Erdachse andeuten, bringen wir über dem Orte A das Pendel in Schwingung. Alsbald gewahren wir, dafs die Schwingungsebene die Achse in dem Punkte O schneidet. Der Winkel AOZ mufs, da $OZ \perp QZ$ und $AO \perp AZ$ steht, gleich der geographischen Breite des Ortes A also φ sein. Wir drehen den Globus und bringen so A um λ^0 nach b. Die Schwingungsebene verbleibt ihrer Richtung treu und schwingt von b nach N. Würde sie die Drehung gleich dem Meridian mitgemacht haben, so bildete sie zum Meridian die Tangente $b\,O$. Dies ist nicht der Fall, sondern sie weicht um den Winkel $Ob\,N$ vom Meridian ab. Dieser Winkel ist als innerer Wechselwinkel dem Winkel $B\,Ob$ gleich. Verzeichnen wir diese Abweichungen von Strecke zu Strecke gegen den Punkt O, so erhalten wir ringsum einen Kegelmantel, der abgewickelt zu einem Kreisausschnitt wird. Die Gröfse des von den Radien eingeschlossenen Winkels ist, wie wir aus der Kegelprojektion wissen, nach S. 164

$$\sphericalangle\, \omega = 360 \cdot \sin \varphi.$$

Bewegt sich A nach b, und der Bogen oder Zentriwinkel $Amb = \lambda^0$, alsdann ist der von den Radien $A\,O$ und Ob eingeschlossene Winkel

$$\lambda' = \lambda \cdot \sin \varphi.$$

Dieser Winkel λ' ist als Wechselwinkel gleich dem Winkel $Ob\,N$, also der Abweichung der Schwingungsebene von der Meridianebene gleich.

„Man erhält somit den Winkel, um welchen sich die Schwingungsebene des Foucault'schen Pendels an irgend einem Ort in einer gegebenen Zeit gegen den Meridian des Ortes drehen mufs, wenn

man die gleichzeitige Drehung des Polarpendels mit dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsortes multipliziert."

Tabelle XVIII enthält den Winkel λ' für die Breite φ für die Drehung während einer Stunde.

Das Pendel deutet zugleich auch an, dafs für die Darstellung von Ländern der gemäfsigten Zone die Kegelprojektion, für Polarkarten das kreisförmige Netz und für äquatoriale Gegenden die Cylinderprojektion am geeignetsten ist. Wäre man nicht schon mit diesen Projektionsweisen bekannt gewesen, wahrlich das Foucault'sche Pendel hätte auf sie führen müssen.

Der Foucault'sche Pendelversuch hat zugleich bewiesen, dafs die Rotation der Erde von West nach Ost erfolgt. Für die westöstliche Rotation liefert die Erde jedoch selbst einen unzweideutigen Beweis.

Ringsum ist die Erde von einer Dunsthülle, der Atmosphäre, umgeben. Ungleiche Erwärmung der Luftschichten am Äquator und Pol erzeugen einen Luftzug von Norden nach Süden, den Passat, und einen von Süden nach Norden, den Antipassat. Würde die Erde unbeweglich im Weltenraum verharren, so müfste das Hin- und Herstreichen der warmen und kalten Winde in direkten Bahnen jahraus jahrein erfolgen. Da dies nicht der Fall ist, vielmehr der Nordwind sich als Nordost und der Südwind als Südwest erweist, so ist man zu der Annahme berechtigt, dafs die Erde nicht unbeweglich ist, vielmehr durch eine Achsendrehung die gerade Windrichtung in eine schiefe umbiegt. Denn bewegt sich die Erde, so rotiert der über ihr hin gelagerte Luftozean mit. Dann nimmt die Luft im allgemeinen die Geschwindigkeit der Punkte an, über denen sie lagert. Dieselbe mufs nach den verschiedenen Breitengraden unterschiedlich sein. Die Achsendrehung geschieht in 86164 Sekunden (siehe S. 202). Ein Punkt am Äquator legt innerhalb eines Tages 40 000^{km} zurück, in einer Sekunde 465^{m}; ein Punkt

auf	dem	10.	Parallel	in	1	Sekunde	458^{m}
"	"	20.	"	"	1	"	436^{m}
"	"	30.	"	"	1	"	403^{m}
"	"	40.	"	"	1	"	357^{m}
"	"	50.	"	"	1	"	300^{m}
"	"	60.	"	"	1	"	233^{m}
"	"	70.	"	"	1	"	159^{m}
"	"	80.	"	"	1	"	81^{m}
"	"	85.	"	"	1	"	41^{m}.

Der Antipassat ist am Entstehungsherd mit einer Geschwindigkeit von 465 m per Sekunde ausstaffiert. Am 50. Parallel (Fig. 154) trifft er auf eine Geschwindigkeit von 300 m. Eine Abminderung der Schnelligkeit von Parallel zu Parallel kann in dem Verhältnis der wachsenden Breiten nach dem Gesetze der Trägheit nimmermehr stattfinden, und statt dafs der Antipassat 0° — 50° direkt ankommt, ist er vielmehr dem nördlich gelegenen Orte *A* voraus, so dafs die Bewohner in *A* den Antipassat nicht als Süd-, sondern als Südwestwind verspüren. Durch dieses Vorauseilen wird aus der direkten Richtung 0° — 80°, welche der Pfeil andeutet, die Kurve 0° — 80° oder was das gleiche ist: durch die Achsendrehung der Erde verliert der Antipassat seine uranfängliche Geschwindigkeit, und wird dabei in höhere Breiten mit niederer Rotationsgeschwindigkeit vordringend zu einem Vorauseilen veranlafst. Dafs er aber nach Osten und nicht nach Westen voranstürmt, weist auf eine Umdrehung der Erde von Westen nach Osten hin. Fassen wir den Passat oder den kalten Luftstrom ins Auge! In den Polargegenden ist er zu Hause. Sie statten ihn mit einer Geschwindigkeit von ca. 40 — 80 m per Sekunde aus. Hebt er seine Reise in niedere Breiten an, so stöfst er auf Stellen, die mit höherer Rotationsgeschwindigkeit ausgerüstet sind. Dieselbe urplötzlich anzunehmen gelingt ihm nicht, und wenn er meint, die Flügel seien ihm gewachsen und er könne auch mitstürmen, so ist ihm der Ort, auf den er zu will, schon enteilt und er kommt auf dessen Parallel erst in seinem Rücken an. Beim Orte *R* 60° kann es sich daher nicht ereignen, dafs ihm der Passat direkt aus Norden zukommt, derselbe wird gegen ihn stets eine nordöstliche Richtung einhalten. Dafs ein südlich gelegener Ort gegen Osten dem Passat voraus ist, kann eben keinen andern Grund haben, als die von Westen nach Osten bewerkstelligte Achsendrehung der Erde. Auf der südlichen Hemisphäre machen sich die gleichen Erscheinungen

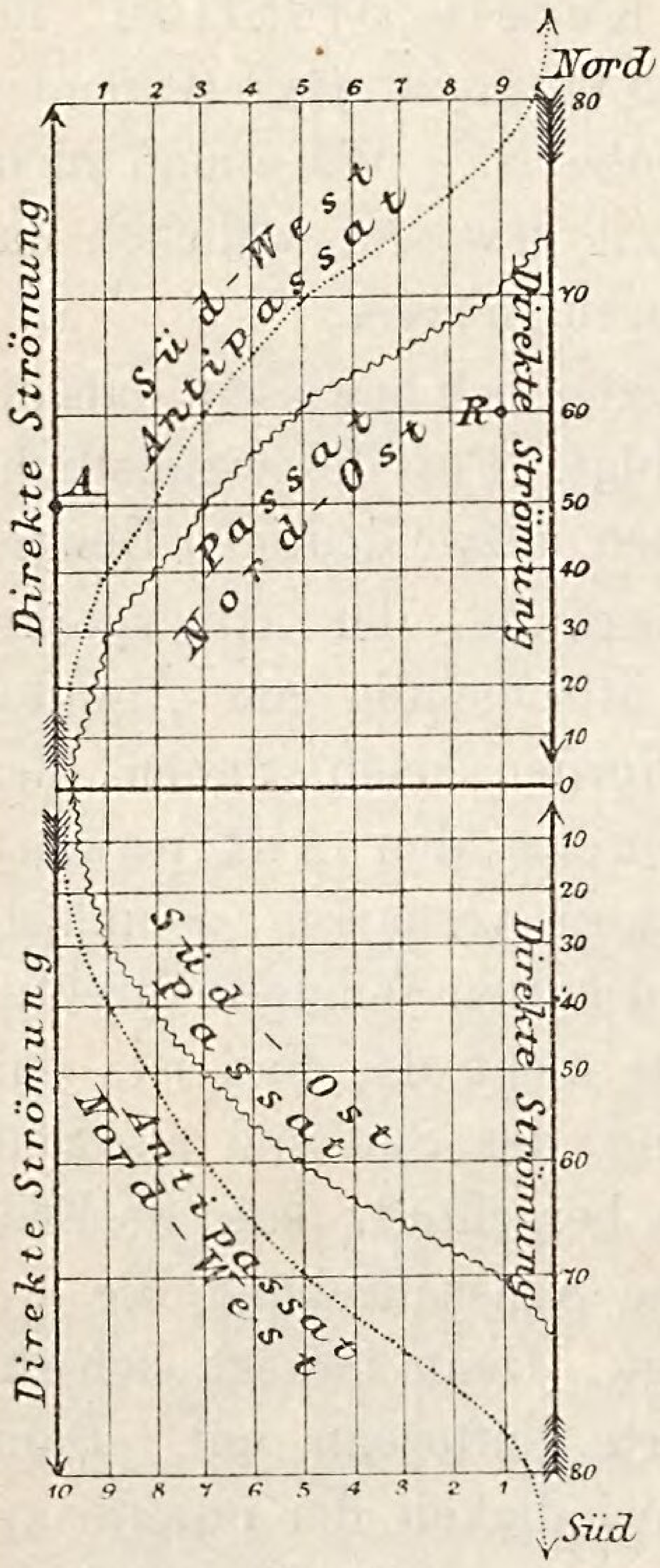


Fig. 154.

geltend, unserm Südwest entspricht ein Nordwest und unserm Nordost ein Südost.

Somit können wir nach dem Vorausgegangenen sicher behaupten, dafs die Erde eine Achsendrehung besitzt und dafs die Drehung von Westen nach Osten erfolgt.

In welchem Verhältnis sich die Erde zur Sonne, der Spenderin von Licht und Wärme, befindet.

Auch hier wie bei der Achsendrehung der Erde begnügte man sich Jahrtausende hindurch mit dem Schein; man nahm es als eine ausgemachte Sache an, dafs die Sonne, wie der Mond und die Sterne, in einem unaufhörlichen Reigen sich um die Erde bewegen. Diese geozentrische Ansicht, gestützt auf den Schein der Dinge, fand wohl ihre Gegner, die in Anbetracht der ungeheuern Gröfse der Sonne ihre Zweifel aussprachen und zu der Annahme sich hinneigten, nicht die Erde, sondern die Sonne stehe stille, und um sie laufe die Erde, wie Merkur und Venus.

Diese Ansicht verfochten Philolāos, Heraklides u. a., aber sie drangen nicht durch. Kopernikus, der Begründer der neuen Astronomie, selbst sagt: „Ich fand zuerst bei Cicero, dafs Hiketas gemeint habe, die Erde bewege sich; und dafs auch andere dieser Meinung gewesen, ersah ich aus folgender Stelle des Plutarch: Die gewöhnliche Meinung geht dahin, dafs die Erde ruhe; der Pythagoräer Philolāos dagegen nimmt an, dafs sie sich wie Sonne und Mond in einem schiefen Kreise um das Feuer (das ewige Weltfeuer) bewege. Haraklides aus Pontos und der Pythagoräer Ekphantos geben der Erde eine Bewegung, nicht fortschreitend, sondern rotierend, so dafs sie von Abend gegen Morgen um ihre Achse gedreht werde.“

Der Schöpfer der wissenschaftlichen Astronomie Hipparch verblieb dabei, den Lauf der Himmelskörper aus dem Augenschein zu erklären und sein Nachfolger, der grofse Alexandriner Claudius Ptolemäus, arbeitete ein eigenes Planetensystem aus, das er in eine genügende Übereinstimmung mit den Erscheinungen am Himmel zu bringen versuchte. Die Zahl der Kreise, an welchen er lehrte, dafs die Himmelskörper ihre Bewegungen vollbringen, war auf 70 angewachsen, so dafs sein System das eine leistete, die scheinbaren Bewegungen möglichst getreu darzustellen. Erst

nach anderthalb tausend Jahren zündete Nikolaus Kopernikus ein Licht an, das bald die Finsternis und Dunkelheit, in welcher man in seinen Meinungen befangen war, verscheuchte. Am 19. Februar 1473 wurde er zu Thorn geboren. In Krakau studierte er Medizin, Mathematik und Astronomie. Von Rom, wo er als Lehrer der Mathematik eine Zeit lang wirkte, zurückgekehrt, wurde er 1510 Domherr zu Frauenburg. Seine mit Eifer betriebenen astronomischen Studien brachten ihn zu der Überzeugung, dafs die Sonne nicht ein Planet, sondern ein Fixstern sei, der im Zentrum der Welt sich befinde und um den sich die Erde und die andern Planeten bewegen. In dem berühmten Buche: „De Revolutionibus orbium coelestium“ legte er seine Anschauung von den Bewegungen der Himmelskörper und ihren Erscheinungen nieder. Kurz vor seinem Hinscheiden empfieng er das erste gedruckte Exemplar seines epochemachenden Werkes. Gewaltiges Aufsehen erregte unter Gelehrten und Laien sein Buch. Die Erde verlor ihre hohe Würde; an ihre Stelle sah man die Sonne gesetzt. Die ganze Astronomie wurde hierdurch in andere Bahnen gelenkt; sie stützte ihre Beobachtungen nicht mehr auf den Schein, sondern auf das Sein. Das System, das er aufbaute, stand im direkten Gegensatz zum Ptolemäischen. Und so viele Zweifler es auch bei Veröffentlichung seiner Schrift noch gab, mit der Zeit errang sich die Wahrheit den Sieg, und heutzutage möchte unter den Kulturvölkern kaum jemand zu finden sein, der das Kopernikanische Weltsystem bezweifelte.

Denn es steht unumstöfslich sicher, dafs die Erde von der 1 1/2 Millionen mal so grofsen Sonne nach dem Gravitationsgesetz angezogen wird und nicht umgekehrt die grofse Sonne von der kleinen Erde. So ist die Erde nicht ein Fixstern, sondern wie Merkur, Venus, Mars u. a. ein Planet oder Wandelstern, der um den Zentralkörper, die Sonne, unausgesetzt kreist. Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne heifst die Revolution der Erde.

Wie Foucault für die Achsendrehung einen sinnlichen Beweis zu erbringen wufste, so James Bradley (geb. 1692 gest. 1762) für den Lauf der Erde um die Sonne. Bei genauer mit dem Fernrohr angestellten Beobachtung findet man, dafs ein Fixstern nicht an ein und derselben Stelle bleibt, sondern binnen Jahresfrist, somit entsprechend der Umlaufzeit der Erde um die Sonne einen kleinen Kreis resp. eine kleine Ellipse um seinen scheinbaren Ort zu

beschreiben scheint. Dieser Kreis ist das Gegenbild der kreisförmigen Bewegung der Erde um die Sonne, denn er findet nur hierin seine genügende Erklärung zusammengehalten mit der Geschwindigkeit des Lichts, dessen Ermittlung zuerst dem Dänen Olaf Römer durch Beobachtung der Finsternisse der Jupitersmonde gelungen ist. Er berechnete die Geschwindigkeit des Lichts in einer Sekunde auf 297 340^{km}. Die Geschwindigkeit des Lichts aber und die Geschwindigkeit der Bewegung der Erde stehen zu einander in einem bestimmten endlichen Verhältnis. Stünde die Erde still, so würde die Aberration des Lichtes, wie die soeben geschilderte Erscheinung genannt wird, nicht existieren und ebenso würde es sein, wenn das Licht gar kleine Zeit zu dem Durchlaufen des Raumes brauchte, wenn eben seine Geschwindigkeit unendlich grofs wäre. Eine Veranschaulichung für diese Erscheinung, wird Figur 155 bieten. Es stelle das Viereck einen im raschen Lauf befindlichen Eisenbahnwaggon vor, auf den von F aus und zwar senkrecht zur Bewegung des Wagens eine Kugel abgefeuert werden soll. Schlägt dieselbe bei α durch und bewegt sich in derselben Zeit während die Kugel den inneren Raum durchfliegt der Wagen von α nach a, so wird die zweite Wandung nicht gegenüber von a also bei β, sondern gegenüber der Eintrittsstelle also bei b durchlöchert. Ein Vergleich beider Öffnungen mufs uns auf die Meinung bringen, als habe die Kugel den Wagen in der Richtung ab durchflogen und sie sei nicht von F, sondern vielmehr von F' abgefeuert worden. Offenbar bezeichnet bei diesem Vorgang $a\alpha$ die Schnelligkeit des Wagens, ab die der Kugel in ein und derselben Zeit, $\sphericalangle\, \varepsilon$ den Winkel, um welchen die wirkliche von der scheinbaren Bewegung absteht. Ist die Schnelligkeit sowohl des Wagens wie die der Kugel bekannt, so ist

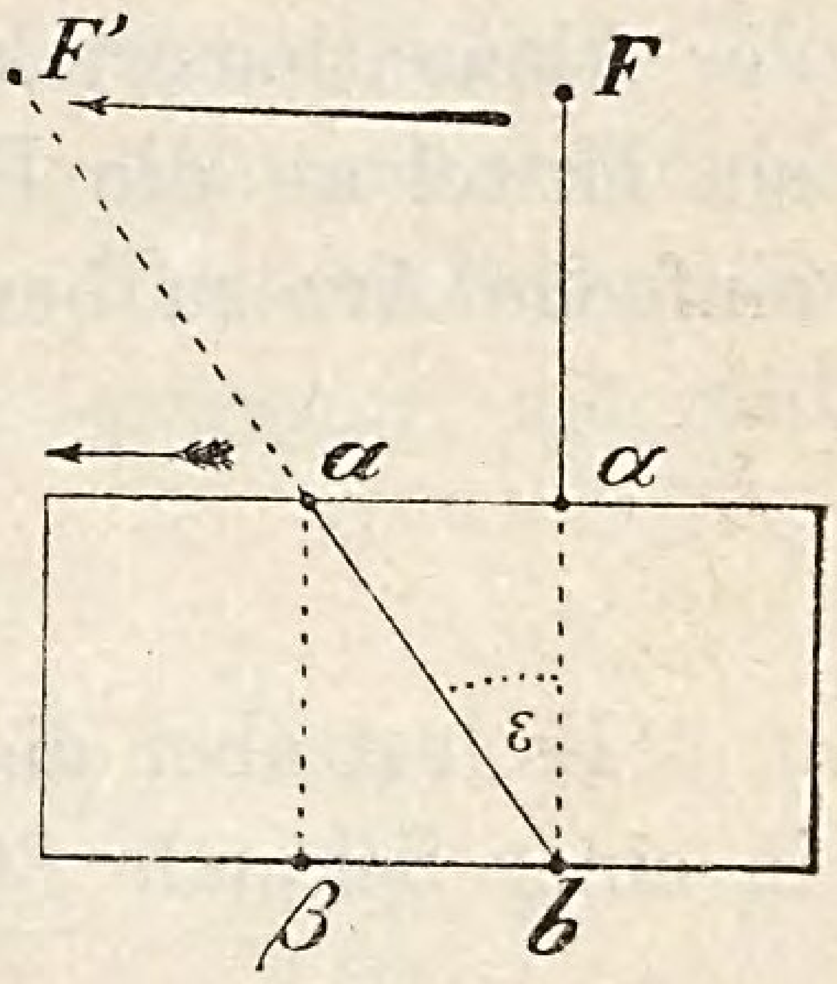


Fig. 155.

$$\tan \varepsilon = \frac{a\alpha}{b\alpha}.$$

Stellt nun $b\beta = a\alpha$ die Geschwindigkeit der Erde und $b\alpha$ die des eben rechtwinklig ihre Bahn treffenden Lichtstrahles vor, so kombinieren sich beide Geschwindigkeiten in der Weise, dafs der Eindruck auf das Auge in b derselbe ist, als ob bei ruhender Erde der Lichtstrahl von $b\,a$ gekommen wäre und so sieht der Beobachter

den Stern ob der Bewegung der Erde von b nach β nicht in F, sondern in F', woher ihm der Lichtsrahl zuletzt ins Auge gelangte. Diese Ablenkung des Lichtes führt, wie schon oben erwähnt wurde, den Namen Aberration und der Winkel ε heifst darnach der Aberrationswinkel. In welcher Richtung die Erde sich auch bewegen mag, immer wird der scheinbare Ort eines Sternes nach der Richtung, in welcher sich die Erde bewegt, verrückt. Demnach prägt der jährliche Lauf der Erde sein kleines Abbild im scheinbaren Lauf jedes Sternes am Himmel aus, so dafs die Fixsterne, wie oben behauptet wurde, als Zeugen für die Bewegung der Erde um die Sonne auftreten. Diese Aberrationsellipse hat nach genauen Beobachtungen einen Durchmesser von 40,5″, so dafs der Aberrationswinkel 20,25″ beträgt. Da diese Aberrationsellipse, weil ihre grofse Axe parallel zur Erdbahn sich befindet, für alle Sterne von gleicher Gröfse ist, so kann sie mit der Parallelaxe eines Sternes, von welcher später die Sprache ist, nicht verwechselt werden. Indem der Umlauf der Erde nach Weg und Zeit und auch der Aberrationswinkel bekannt ist, so gibt uns die obige Gleichung ein Mittel an die Hand, die Geschwindigkeit des Lichtes auf eine einfache Art zu berechnen. Dieselbe ist sodann

$$b\alpha = \frac{a\alpha}{\tan \varepsilon}.$$

Es legt aber die Erde im Jahr 394 Millionen Kilometer zurück, in einer Sekunde 30^{km}, das Licht alsdann

$$b\alpha = \frac{30^{\text{km}}}{\tan 20{,}25''} \quad \text{d. i.} \quad 305\,000^{\text{km}}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem von Römer erforschten ziemlich überein und beweist, dafs das Licht 10 000 mal schneller als die Erde ist.

In welchen Bahnen die Planeten die Sonne umkreisen.

Kopernikus dachte sich die Planetenbahnen als Kreise. Bei schärferer Beobachtung stellte sich heraus, dafs wir die Sonnenscheibe am 31. Dezember in einem Sehwinkel von 32′ 36,5″ und am 1. Juli in einem solchen von 31′ 31,23″ erblicken. Ingleichen wurde wahrgenommen, dafs sich die Erde im Sommer langsamer, im Winter dagegen rascher auf ihrer Bahn weiter bewege. Bei

einem kreisförmigen Umlauf, wobei die Erde den gleichen Abstand von der Sonne einzuhalten hätte, müfste letztere im gleichen Winkel d. h. in gleicher Gröfse jederzeit gesehen werden können. Da dies nun nicht der Fall ist, so kann dem Gröfser- und Kleinerwerden der Sonne nur eine Annäherung und Entfernung der Erde, ein Perihel und Aphel, entsprechen. Alsdann befindet sich die Sonne nicht im Mittelpunkt, sondern im Brennpunkt der nicht kreisförmigen, wohl aber elliptischen Erdbahn. Johann Kepler (geb. 1571 gest. 1630) kam durch genaue Betrachtung der Marsbahn auf diese Thatsache. Er sprach das Resultat seiner Wahrnehmung mit den Worten aus: „Die Erdbahn und überhaupt alle Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.“

Jsaak Newton (geb. 1643 gest. 1727) gelang es durch die Auffindung des Gravitationsgesetzes, den Beweis zu Keplers Entdeckung der elliptischen Planetenbahnen zu führen. Durch ihn wissen wir, dafs bei der Bewegung der Erde um die Sonne sowie um sich selbst zwei Kräfte ununterbrochen wirksam sind. Die Erde will, der einmal angenommenen Richtung folgend, von *a* nach *b* (Fig. 156) hinaus in den Weltenraum schweifen. Diesem Bestreben steuert die Sonne durch ihre Anziehungskraft entgegen; sie will die Erde von *a* nach *S*, also direkt an sich heranziehen. Weder der einen noch der andern Kraft folgend, schlägt die Erde den Mittelweg zwischen beiden Mächten ein und gelangt so von *a* nach *d*. Der Weg *ad* erweist sich als die Diagonale des Parallelogramms *abcd*. In *d* angekommen wiederholt sich derselbe Vorgang; ihr Bestreben ist nach *e* gerichtet; die Sonne möchte sie in *S* haben; ihr Weg ist dann die Diagonale *dg* des Parallelogramms *defg*. Verfolgen wir diese Bahn weiter und weiter, so werden wir zuletzt zu einer geschlossenen Kurve, die nichts mehr und nichts weniger als eine Ellipse ist, kommen. So bilden Kopernikus, Kepler und Newton ein Dreigestirn, das uns die harmonische Gliederung des Sonnensystems vollkommen zu offenbaren vermochte. Denn „wenn Kopernikus nachwies, dafs sich die

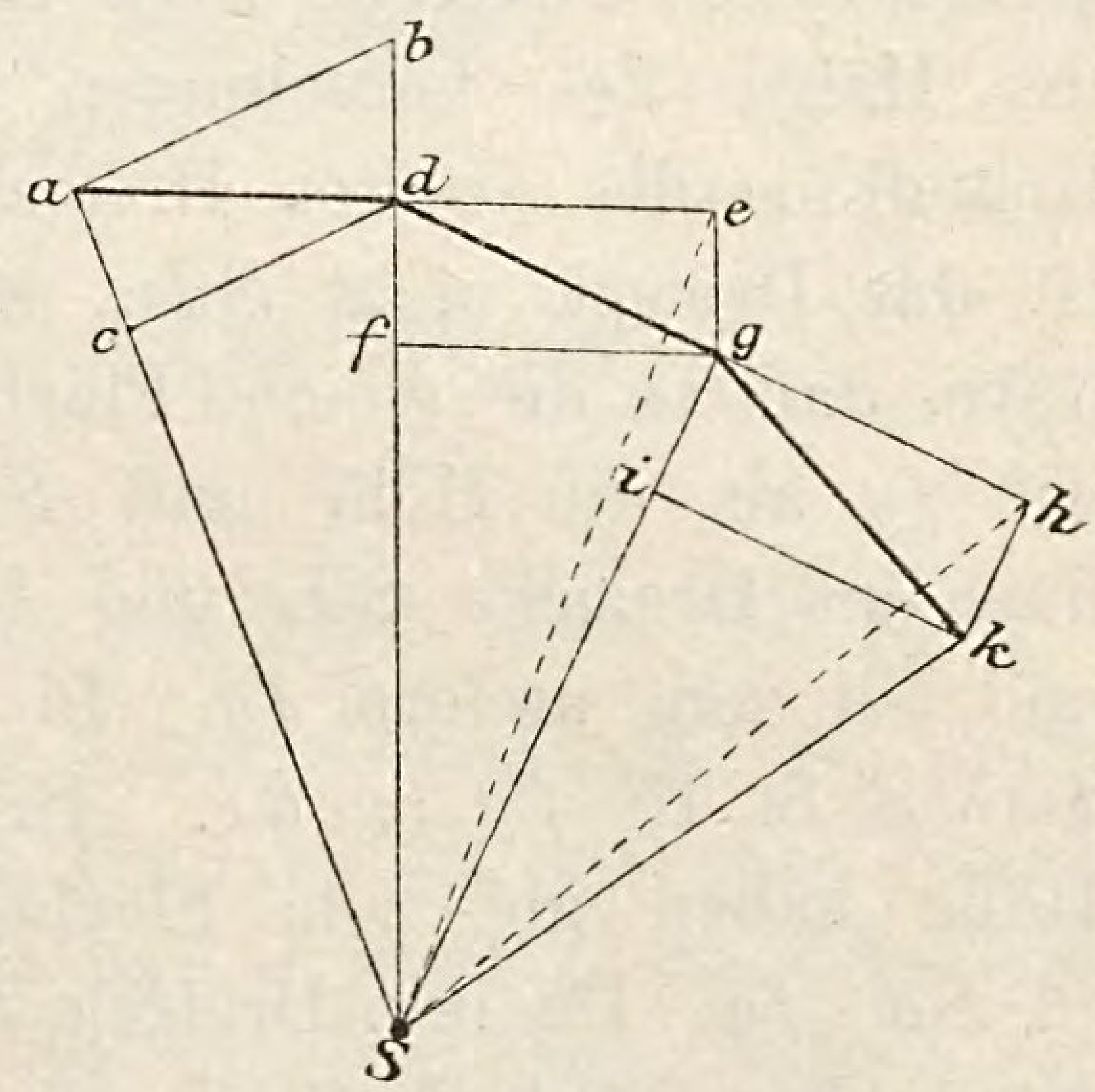


Fig. 156.

Planeten um die Sonne bewegen, und wenn Kepler uns zeigte, wie sie sich bewegen, so offenbarte Newton, warum sie sich so und nicht anders bewegen."

Die Keplerschen Gesetze.

Drei Gesetze sind es, die Keplers Namen unsterblich gemacht. Des ersten, dafs die Planeten in Ellipsen sich bewegen, ist schon hinreichend Erwähnung geschehen, so dafs es sich nur noch um Hinzufügung der beiden andern handelt.

Das zweite Gesetz lautet:

Die von dem Radius vector in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume (Flächen) sind einander gleich.

Darnach sind es nicht die Bogen, die einander gleich sein sollen, sondern die Flächen. Nach Figur 156 bewege sich der Leitstrahl oder Radius vector Sa von a nach d und in demselben Zeitabschnitt von d nach g. Würde sein Weg in gleichen Zeitabschnitten und bei gleicher Geschwindigkeit von a über d nach e sein, so erhielten wir, da $ad = de$ ist, wenn wir e mit S verknüpfen, das gleichschenklige Dreieck Sae mit der Höhe Sd, dessen Fläche $\frac{1}{2}\, \overline{ae} \cdot \overline{Sd}$ betrüge. Da nun das Dreieck Sae in die zwei gleichgrofsen Dreiecke Sad und Sde zerfällt, so trifft auf jedes die Hälfte des berechneten Flächenraumes. Nun ist aber die Grundlinie des zweiten Dreieckes nicht de, sondern dg und dann ist das Dreieck nicht Sde, sondern Sdg, von dem zu beweisen wäre, dafs es die gleiche Fläche enthält als Dreieck Sde. Nehmen wir fg als die Höhe und Sd als die gemeinschaftliche Grundlinie der Dreiecke Sde und Sdg. Bei dem einen ist die Höhe de und bei dem andern fg. In dem Parallelogramm $defg$ ist nach Satz 3 S. 15 $fg = de$. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleichen Flächeninhalt; mithin ist $\frac{1}{2}\, \overline{Sd} \cdot \overline{de} = \frac{1}{2}\, \overline{Sd} \cdot \overline{fg}$. Da nun Dreieck Sdg gleich ist dem Dreieck Sde und dieses dem Dreieck Sad, so mufs selbstverständlich Dreieck Sdg an Flächeninhalt auch gleich sein dem Dreieck Sad, wodurch dargethan ist, dafs der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt. Nun ist $dg > ad$ und $gk > dg$; dagegen $Sg < Sd$ und wieder $Sk < Sg$, woraus hervorgeht, dafs die Verminderung der einen Seitenlänge ein proportionales, d. h. flächenausgleichendes Wachsen der andern Seite zur Folge hat. So geht aus dem zweiten Keplerschen Gesetz genügend hervor, dafs die Erde in der

Sonnennähe gröfsere Dreiecksgrundlinien (Bogen) in derselben Zeit durchschreitet als in der Sonnenferne, was auf nichts anderes hinaus will als auf das, dafs sich die Erde im Perihel schneller und im Aphel langsamer fortbewegt.

Das dritte Keplersche Gesetz heifst:

Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernung von der Sonne.

In Zeichen $a^2 : b^2 = e^3 : x^3$.

Die Umlaufszeit der Planeten lassen sich durch Beobachtungen erforschen. Hat man die mittlere Entfernung eines Planeten gefunden, so kann man nach dem Keplerschen dritten Gesetz durch Berechnung auf die mittlere Entfernung eines anderen Planeten schliefsen. So ist der Erde Umlaufzeit 365 Tage, die des Merkurs 88 Tage, der Erde mittlere Entfernung von der Sonne 148 344 000 km, mithin ist die des Merkurs

$$365^2 : 88^2 = 148\,344\,000^3 : x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{88^2 \cdot 148\,344\,000^3}{365^2}} = 57\,462\,000^{\text{km}}.$$

Ferner: die Umlaufzeit des Jupiters beträgt 12 Erdenjahre, alsdann ist der mittlere Sonnenabstand des Jupiters

$$1^2 : 12^2 = 148\,344\,000^3 : x$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{12^2 \cdot 148\,344\,000^3}{1^2}} = 777\,520\,000^{\text{km}}.$$

Die scheinbare Sonnenbahn ist die wirkliche Bahn der Erde.

Stellen wir uns nach Figur 157 unter S vorläufig die Erde im Mittelpunkt des Himmelsgewölbes vor, welche von der Sonne scheinbar umkreist wird. Blicken wir von S nach I, so steht die Sonne vor dem Zeichen ♈ und verdeckt uns dasselbe. Halten wir dieses Zeichen fest, so ist dasselbe die Projektion der Stellung I am Himmelsgewölbe. Sodann ist das Zeichen ♋ die Projektion der Stellung II u. s. f. Projizieren wir statt vier zwölf Stellungen der Sonne, so gewinnen wir zwölf feste Punkte am Himmel, deren Verknüpfung zu einer Kurve führt, welche die Projektion der scheinbaren Bahn der Sonne am Himmelsgewölbe ist. Diese Zeichen, die zur Feststellung der Sonnenbahn von alters her schon dienten, sind

Gestirne und führen zumeist Namen von Tieren hergenommen. Sie zusammen bilden einen schmalen Gürtel am Himmel, welcher Tierkreis oder Zodiakus genannt wird. Die Projektion der scheinbaren Sonnenbahn heifst Ekliptik oder Verfinsterungskreis, weil sich in ihr die Eklipsen oder Finsternisse ereignen. Die Namen der Zeichen sind:

I.	Widder	♈	Stier	♉	Zwillinge	♊
II.	Krebs	♋	Löwe	♌	Jungfrau	♍
III.	Wage	♎	Skorpion	♏	Schütze	♐
IV.	Steinbock	♑	Wassermann	♒	Fische	♓

Diese zwölf Sternbilder betrachtete man im Altertum „gleichsam als Häuser, in welche die Sonne nach und nach eintrat, und ihre Bezeichnung stand in innigem Zusammenhange mit den Jahreszeiten und den davon abhängigen Beschäftigungen des bürgerlichen Lebens. Der Frühlingspunkt lag zur Zeit der alten Griechen und Ägypter im Sternbild des Widders, der Herbstpunkt in dem der Wage; jenes Bild deutete auf das Austreiben der Herden im Frühlinge, dieses auf die Gleichheit von Tag und Nacht. Bis auf den heutigen Tag haben sich jene Zeichen der Alten erhalten, nur haben sie ihre symbolische Bedeutung mit einer mathematischen vertauscht“.

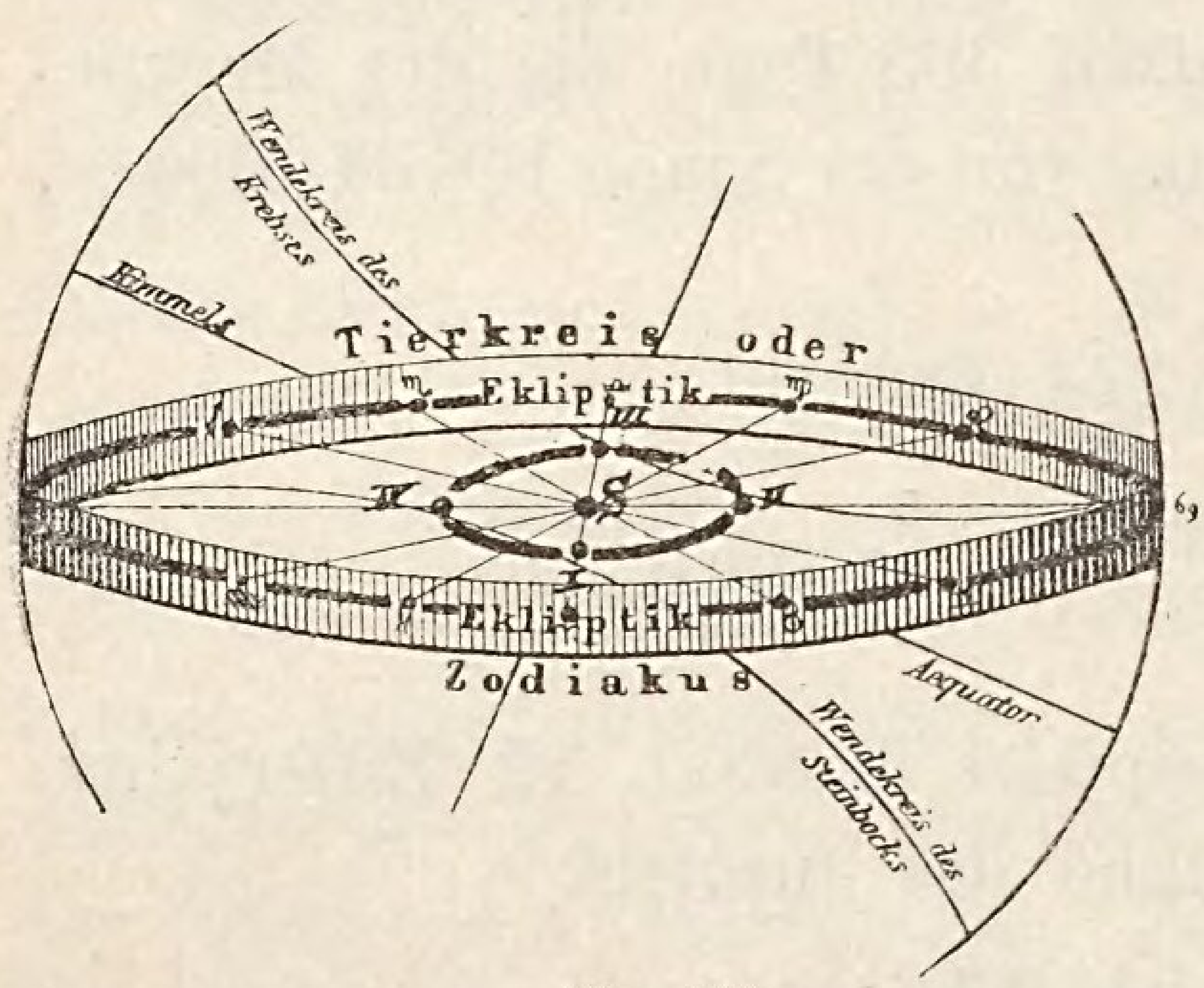


Fig. 157.

Setzen wir an die Stelle der Erde die Sonne, alsdann macht ein Beobachter auf der Sonne in Bezug auf die Erde dieselbe Bemerkung, ihm ist die Ekliptik sodann die Projektion der Erdbahn am scheinbaren Himmelsgewölbe. Und so ist die scheinbare Sonnenbahn die wirkliche Bahn der die Sonne umkreisenden Erde, welche zwischen den Sternbildern, die den Tierkreis bilden, liegt. Befinden wir uns im Punkte III, so wähnen wir, die Sonne stehe im Zeichen des Widders, im Punkte IV angekommen, glauben wir, die Sonne sei von Westen nach Osten bis zum Zeichen des Krebses gekommen. Es ist aber die Sonne in *S* verblieben und die Erde hat den Weg vom Zeichen der Wage bis zum Zeichen des Steinbocks zurückgelegt. So ist in diesem Falle die scheinbare Sonnenbahn nur ein Hinweis

auf die wahre Erdbahn. Der scheinbare Stand der Sonne von dem der Erde differiert stets um 180°. Und während die tägliche scheinbare Bewegung der Sonne von Osten nach Westen erfolgt, findet die jährliche scheinbare Bahn von Westen nach Osten statt.

Die Pole der Ekliptik EE' und die Pole des Himmelsäquators (Fig. 158) decken sich nicht, sondern stehen um 23° 27′ 30″ von einander ab. Um denselben Winkel stehen auch Himmelsäquator und Ekliptik auseinander. In der Astronomie führt dieser Winkel ε den Namen **Ekliptikschiefe.** Mithin steht der Weltpol von der Ekliptik nicht 90°, sondern 90° — 23° 27′ 30″ = 66° 32′ 30″ ab, es hat also die Weltachse zur Ekliptik oder Erdbahn eine Neigung von 66° 32′ 30″.

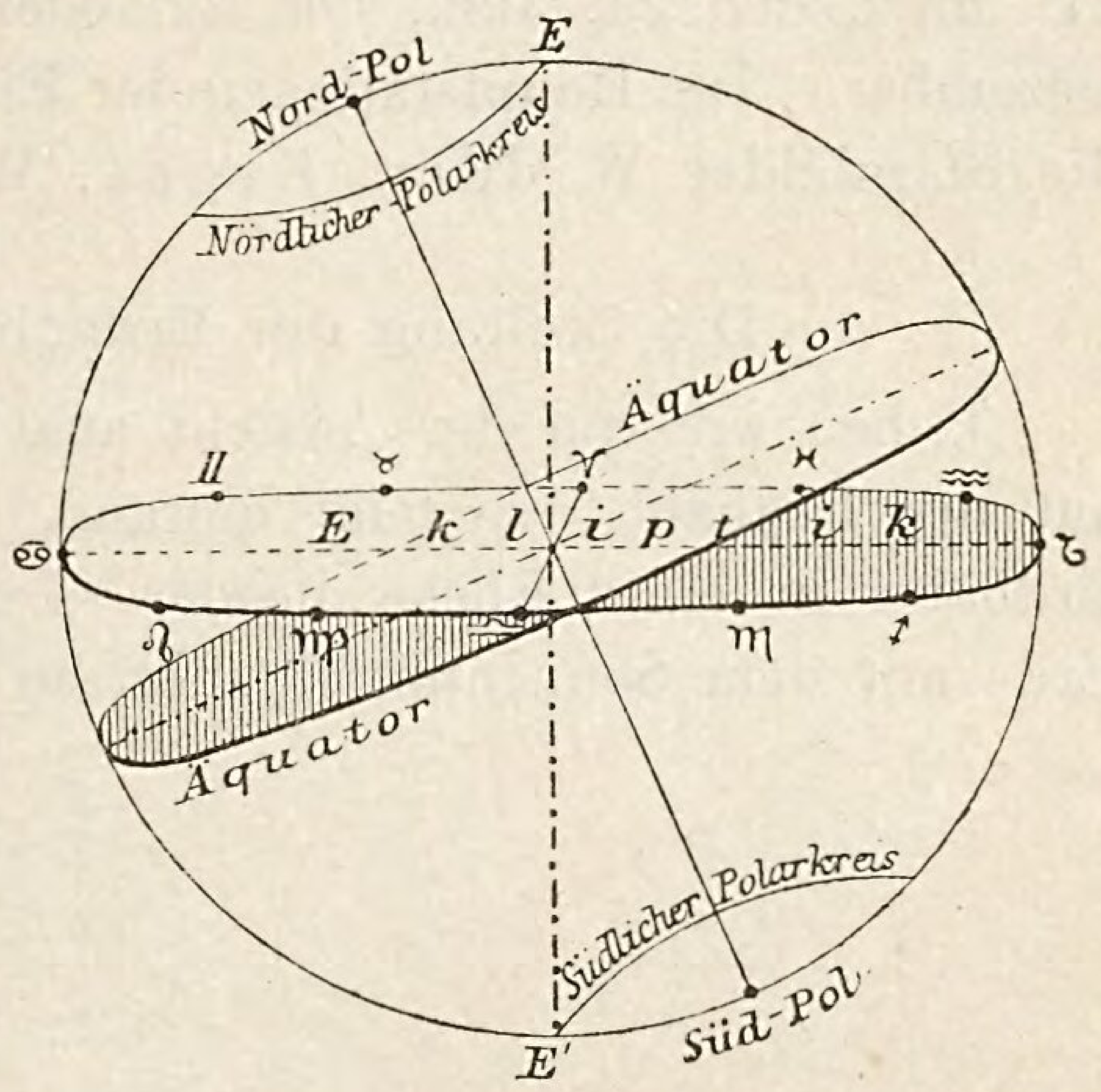


Fig. 158.

Die Hauptstationen der Erdbahn.

Am 21. März erblickt man die Sonne im Sternbild des Widders (Fig. 158) und die Erde selbst befindet sich vor dem Sternbild der Wage. Auf der nördlichen Erdhalbe ist Frühlings- und auf der südlichen Hemisphäre Herbstanfang. Hat die Erde 90° auf ihrer Bahn durchlaufen, so steht sie beim Sternbild des Steinbocks, so dafs wir die Sonne vor dem Bild des Krebses sehen. Bei uns beginnt der Sommer, auf der südlichen Halbkugel der Winter. Die Erde befindet sich im Aphel, mit verminderter Geschwindigkeit legt sie ihren Weg bis zum Widder zurück und verlängert uns hierdurch um 7 Tage den Sommer. Sobald wir die Sonne im Zeichen der Wage erblicken, wissen wir, dafs für uns der Herbst-, für die Bewohner der südlichen Erdhälfte der Frühlingsanfang gekommen ist. Ein weiterer Weg von 90° bringt die Erde in das Sternbild des Krebses und zugleich in die Sonnennähe. Für uns ist Winters-, für die Bewohner der südlichen Erdhalbe Sommersanfang. Mit beschleunigter Geschwindigkeit durchschreitet sie den Weg im Perihel, wodurch uns der Winter um die 7 Tage, um die uns der Sommer

verlängert worden, verkürzt wird. Aus der Ungleichheit der Flächenquadranten erklärt sichs, daſs die Jahreszeiten nicht von gleicher Dauer sein können. Die Anfänge der Jahreszeiten fallen auf den 21. März, den 21. Juni, den 22. oder 23. September und den 21. Dezember. Die Hauptstationen der Erde in der Ekliptik bezeichnen die Sternbilder Widder, Krebs, Wage, Steinbock.

Die Stellung der Erdachse zur Erdbahn.

Gehen wir von der Ansicht aus, die Erdachse stehe senkrecht auf der Erdbahn, so folgt hieraus, daſs der Erdäquator und die Erdbahn in einer Ebene liegen. Verknüpfen wir (Fig. 159) den Erd- mit dem Sonnenmittelpunkt, so trifft in den Stellungen I, II,

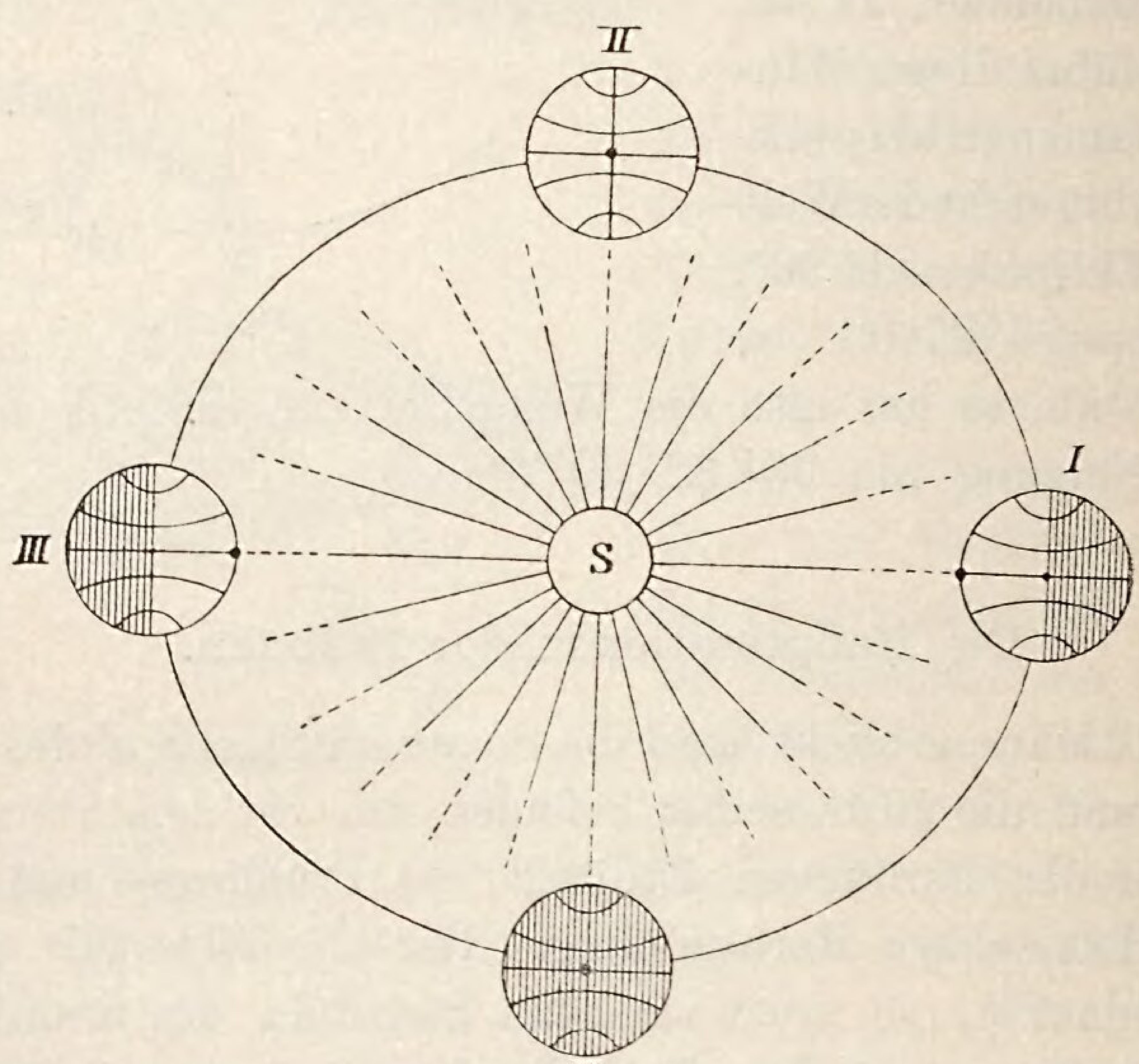


Fig. 159.

III, IV die Zentrale jedesmal einen Äquatorpunkt, so daſs nie ein Ort auſserhalb des Äquators die Sonne im Zenit haben kann. Alsdann tangieren die Sonnenstrahlen jederzeit die Pole, so daſs der Beleuchtungskreis den Äquator und sämtliche Parallelen halbiert. Tag und Nacht wäre sonach fort und fort gleich und ein Wechsel von Sommer und Winter bliebe ausgeschlossen, wir hätten einen ewigen Frühling oder Herbst, denn nur diese beiden Jahreszeiten stimmen mit der Annahme senkrechter Achsenstellung zur Erdbahn überein. In Wirklichkeit haben wir aber im Sommer längere und heiſse, im Winter kurze und und kalte Tage, im Sommer

einen hohen mittägigen Stand und im Winter einen niederen mittägigen Stand der Sonne über dem Horizont. Ist sie im Frühling und Herbst im Zenit des Äquators, so scheint sie sich 23° 27′ 30″ über den Himmelsäquator im Sommer zu erheben und im Winter um ebensoviele Grade unter denselben hinabzusinken. Überhaupt entsteht bei Betrachtung der Sonne die Meinung, als wandere sie von Sternbild zu Sternbild und gelange, wie Figur 157 zeigt und auf S. 189 in diesem Sinne besprochen wurde, am 21. Juni ins Sternbild des Krebses und im 21. Dezember in das des Steinbocks.

Da zur Genüge bewiesen sein dürfte, dafs sich nicht die Sonne, sondern die Erde bewegt, von einem Emporsteigen über den Himmelsäquator und einem Hinabtauchen unter denselben nie und nimmer die Rede sein kann, so mufs unsere Wahrnehmung auf einer Täuschung beruhen. Der Widerspruch hört auf, wenn wir die Sache also ansehen, dafs sich nicht die Sonne der Erde, sondern vielmehr die Erde der Sonne zuneigt. Konstruieren wir demgemäfs (Fig. 160) die Äquatorebene zur Erdbahnebene in einem Winkel von 23° 27′ 30″, so werden wir unsere Täuschung inne, und merken, dafs die Neigung der Erdachse zur Erdbahn uns ein Entgegenkommen und Entfernen der Sonne glauben liefs. Es steht dann die Erdachse von der Erdbahn um 66° 32′ 30″ ab oder, was dasselbe heifst: Erd- und Weltachse fallen in eine Ebene zusammen. Da aber die Weltachse und damit auch die Erdachse in ihrer Lage zur Ekliptik verharren, so bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, dafs die Erdachse trotz der fortschreitenden Bewegung der Erde doch stets dieselbe Richtung im Weltenraum behält, so dafs die Erdachse immer parallel zu sich selbst fortrückt.

Betrachten wir die Erde bei schiefer Achsenstellung in den vier Hauptstationen und sehen wir zu, ob sich alsdann für den Wechsel der Jahreszeiten eine genügende Erklärung finden läfst. Wenn die Erde (Fig. 160) die Position von II und IV inne hat, trifft die Zentrale einen Äquatorialpunkt, sie steht im Zenit des Äquators; der Beleuchtungskreis geht durch die Pole und halbiert sämtliche Parallelen. Tag und Nacht sind gleich. Dasselbe trifft am 21. März und 21. September zu, also im Frühling und Herbst. Befindet sich die Erde in der Position I, alsdann steht die Zentrale senkrecht auf einem Punkt der Krebswende, 23° 27′ 30″ weiter nördlich. Der Beleuchtungskreis geht um ebensoviele Grade, da er 90° vom Wendekreis absteht, über den Nordpol hinaus, während die Sonnenstrahlen nur den antarktischen Polarkreis berühren. Die

Parallelkreise werden ungleich halbiert, auf der nördlichen Erdhälfte scheint die Sonne um 23° 27′ 30″ über den Horizont höher gestiegen zu sein; hier gibt es lange Tage und kurze Nächte, auf der südlichen Erdhalbe kurze Tage und lange Nächte, ja die Kalotte

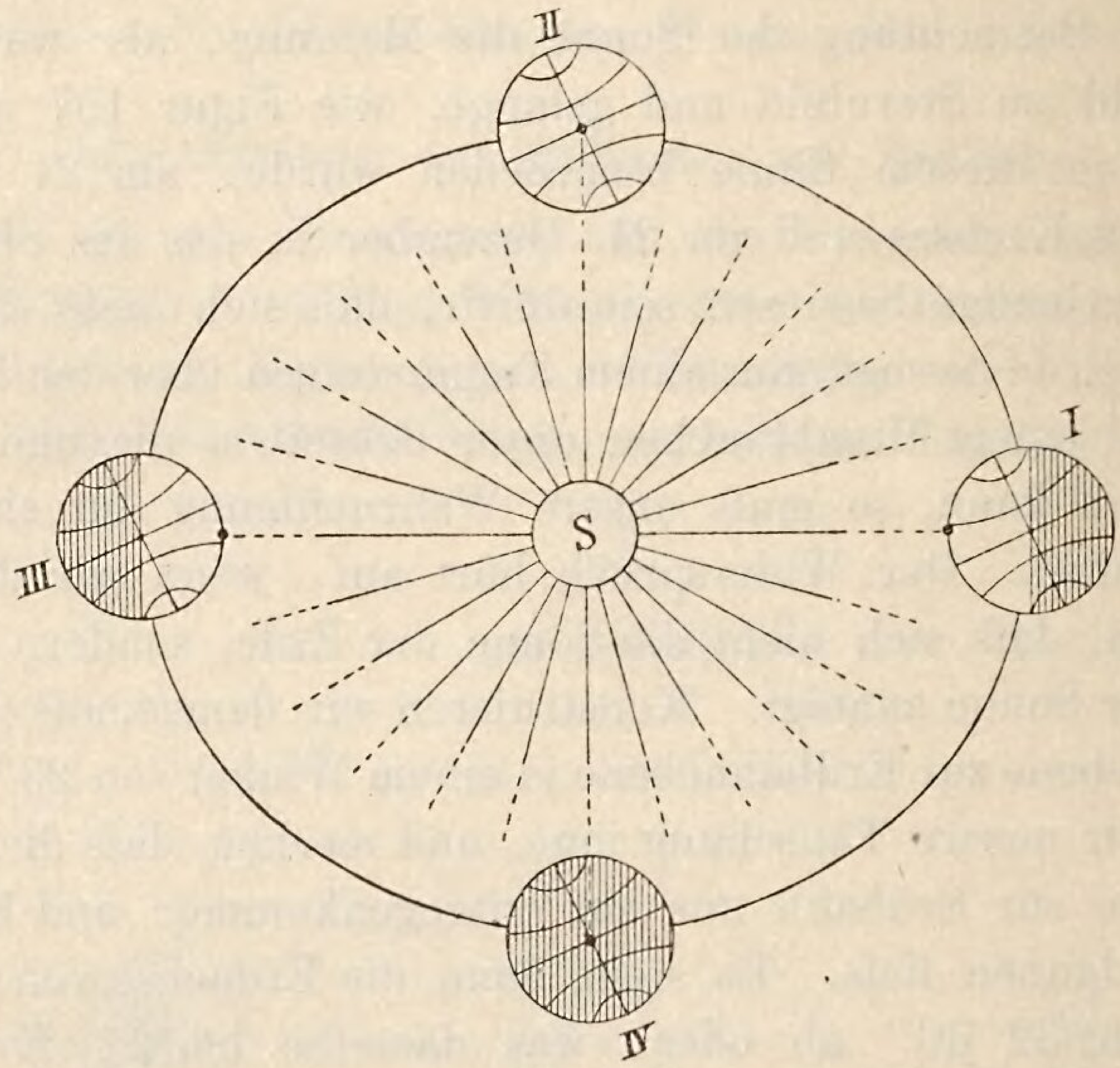


Fig. 160.

innerhalb des antarktischen Parallels bekommt gar kein Licht zugesendet und bei der entsprechenden nördlichen Kugelhaube geht die Sonne ein halbes Jahr hindurch nimmer unter. Sechs Monden darnach ist die Erde in der Position III. Die Zentrale trifft auf einen Punkt des südlichen Wendekreises, die Sonne steht in dessen Zenit, so dafs dieselben Verhältnisse hier statt haben, wie ein halbes Jahr zuvor auf der nördlichen Erdhalbe. So und nicht anders müfste bei einer schiefen Achsenstellung der Wechel der Jahreszeiten erfolgen. Wie stimmt nun die Wirklichkeit zur Annahme? Vortrefflich, beide decken sich. Alsdann ist die genügende Erklärung, nach der wir suchten, gefunden und die Behauptung gerechtfertigt, dafs der Wechsel der vier Jahreszeiten nicht vom Emporsteigen der Sonne über und Hinabtauchen derselben unter den Himmelsäquator, sondern lediglich nur von der schiefen Stellung der Erdachse zur Erdbahn abhängt; die Sonne verharrt in majestätischer Ruhe, beleuchtend die sie umkreisende Erde.

Es ist aber beizufügen, dafs die Erde keine vollkommene Kugel ist, bei welcher sich alle Anziehungskräfte auf eine Anziehung

des Mittelpunktes reduzieren müfsten. Durch die gröfsere Massenanschwellung über dem Äquator und da Sonne und Mond nicht in der Ebene des Äquators stehen, macht sich nach ihrer verschiedenen Stellung eine gröfsere oder geringere Anziehung auf einzelne Teile der Erde bemerklich, so dafs die Lage der Erdachse einer periodischen Schwankung, die man mit dem Worte Nutation bezeichnet, unterliegt. So wird die Erdachse, deren Verlängerung die Himmels- oder Weltachse gibt, beständig von ihrem Parallelismus abgelenkt, welcher Bewegung selbstverständlich der Äquator nachkommt und, da dieser die Lage des Himmelsäquator bestimmt, thut dies in gleicher Weise auch der letztere. „So wird wegen der Abweichung der Erdachse von dem strengen Parallelismus der Nordpol des Himmels nicht immer in der Nähe des heutigen Polarsternes liegen, und ebensowenig wird der Himmelsäquator beständig durch dieselben Sterne gehen, und die Durchschnittslinie der Ebene des Erdäquators mit der Ebene der Ekliptik, d. h. die Äquinoktiallinie, kann nicht dieselbe Richtung im Raume beibehalten, sondern mufs in gleicher Richtung mit der Erdachse, auf den Horizont bezogen, von Osten nach Westen in der Ebene der Ekliptik herumzuwandern scheinen!“ Diese Erscheinung führt den Namen Vorrücken der Nachtgleichen oder Präzession. Somit wandert der Frühlingspunkt durch alle Sternbilder des Tierkreises. Es nimmt diese Pilgerfahrt 25 800 Jahre in Anspruch und dieser Zeitraum selbst heifst das platonische Jahr. Der jährliche Wert der Präzession beträgt 50,2″. Dermalen liegt der Frühlingspunkt im Sternbild der Fische, vor etwa 2000 Jahren (denn $2000 \times 50{,}2'' = 27^0\, 53'\, 20''$) also zu Hipparchs Zeiten (130 v. Chr.) lag er in dem des Widders. So fiel damals Zeichen und Sternbild zusammen, jetzt ist es anders geworden, das Zeichen für den Frühlingspunkt behielt man bei, das Sternbild, mit dem er dermalen zusammentrifft, ist ein anderes.

Das Himmelsgewölbe und die himmlischen Kreise. Der Himmelsglobus. Die verschiedenen Sphären.

Der Himmel oder das Himmelsgewölbe ist die scheinbare Hohlkugel, in deren Mittelpunkt der Beobachter steht und auf deren innerer Seite er die Sterne erblickt. Figur 161 stellt uns das Himmelsgewölbe im Durchschnitt mit den wichtigsten himmlischen Kreisen, durch welche die Örter der Sterne bestimmt werden, vor. Durch die Horizontalebene *SWNO* wird die Kugel *SZNZ'* in

eine obere sichtbare und in eine untere unsichtbare Hälfte geteilt. Dieser Schnittkreis ist ein gröfster Kreis, sein Mittelpunkt fällt mit dem Weltmittelpunkt, dem Standort des Beobachters B zusammen (vgl. hiemit S. 75). Dessen Meridian geht durch den Süd- und Nordpunkt S und N, sowie durch sein Zenit Z und sein Nadir Z', durch den Nordpol P und durch den Südpol P'. Die Gerade PP', welche beide Pole verbindet, ist die Weltachse. Um sie dreht sich scheinbar der ganze gestirnte Himmel von Osten nach Westen, wobei wir wahrnehmen, dafs innerhalb 24 Stunden alle Gestirne kreisförmige Bahnen beschreiben. Senkrecht zur Achse steht die Äquatorebene AA'. Da auch ihr Schnittkreis ein Hauptkreis ist, so mufs dessen Zentrum mit dem Weltmittelpunkt zusammenfallen. Horizontal- und Äquatorialebene halbieren sich als gröfste Kreise gegenseitig, somit ist $SO = ON = AO = OA'$. Ist S der Süd- und N der Nordpunkt, so müssen O der Ost- und W der Westpunkt des Horizontes sein. Der Winkel ABS oder der Bogen SA heifst die Äquatorhöhe, der Winkel ABZ oder der Bogen AZ gibt am Ortsmeridian die Entfernung des Beobachters B vom Äquator oder seine geographische Breite an. Äquatorhöhe SA und die geographische Breite AZ ergänzen sich zu einem rechten Winkel, sie sind komplementär.

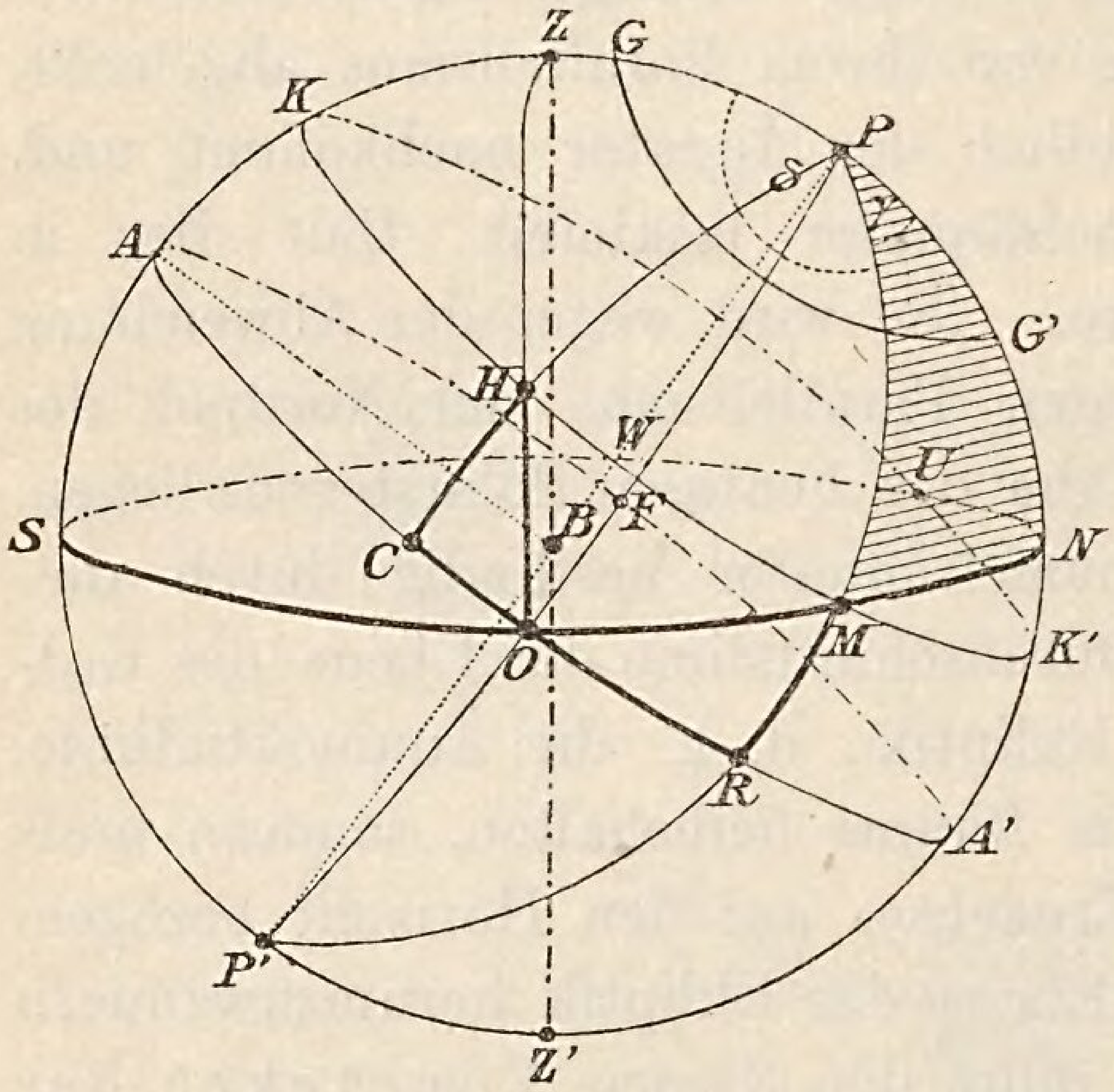


Fig. 161

Ein Gestirn, das im Äquator steht, ist für den Beobachter B zur Hälfte über seinem Horizont, zur Hälfte unter demselben. Bleibt die Bahn eines Sternes G beständig über dessen Horizont, so ist sie die eines Zirkumpolarsternes. Da sie parallel zum Äquator liegt, so ist sie ein Parallelkreis. Ihre Entfernung vom Äquator ist daher konstant und führt den Namen Deklination $AG = d$. Ihr Analogon ist die geographische Breite. Jeder Parallelkreis hat seinen höchsten Punkt G auf der vom Pol aus nach Süden liegenden Seite des Meridians und seinen tiefsten G' auf der entgegengesetzten Seite. Diese beiden Punkte heifsen Kulminationspunkte des Sternes G, sein Durchgang durch G seine obere, durch G' seine untere Kul-

mination. Deklination *A G* und Poldistanz *P G* sind komplementär. Die Sternbilder Krebs uud Steinbock sind 23° 27′ 30″ vom Äquator entfernt. Durch sie, da sie Solstitialpunkte sind, denkt man sich Parallelkreise gelegt und so auch durch die Punkte, welche von den beiden Polen 23° 27′ 30″ abstehen. Hierdurch erhält man vier besonders benannte Parallelkreise, nämlich den Wendekreis des Krebses und des Steinbocks und den nördlichen und südlichen Polarkreis. Man überträgt dieselben auch auf die Erdkugel (Fig. 162) und spricht bei ihr gleichfalls von Wende- und Polarkreisen. Alle gröſsten Kreise die durch die Pole gehen, Äquator und sämtliche Parallelkreise rechtwinklig schneiden, heiſsen, da an ihnen die Deklination eines Gestirns gemessen wird, D e k l i n a t i o n s k r e i s e. Als Anfangs- oder Nullpunkt am Äquator wird der Frühlingspunkt angenommen und man zählt von ihm aus von West über Süd nach Ost, also in der Richtung der j ä h r l i c h e n s c h e i n b a r e n B e w e g u n g der Sonne, 360° herum.

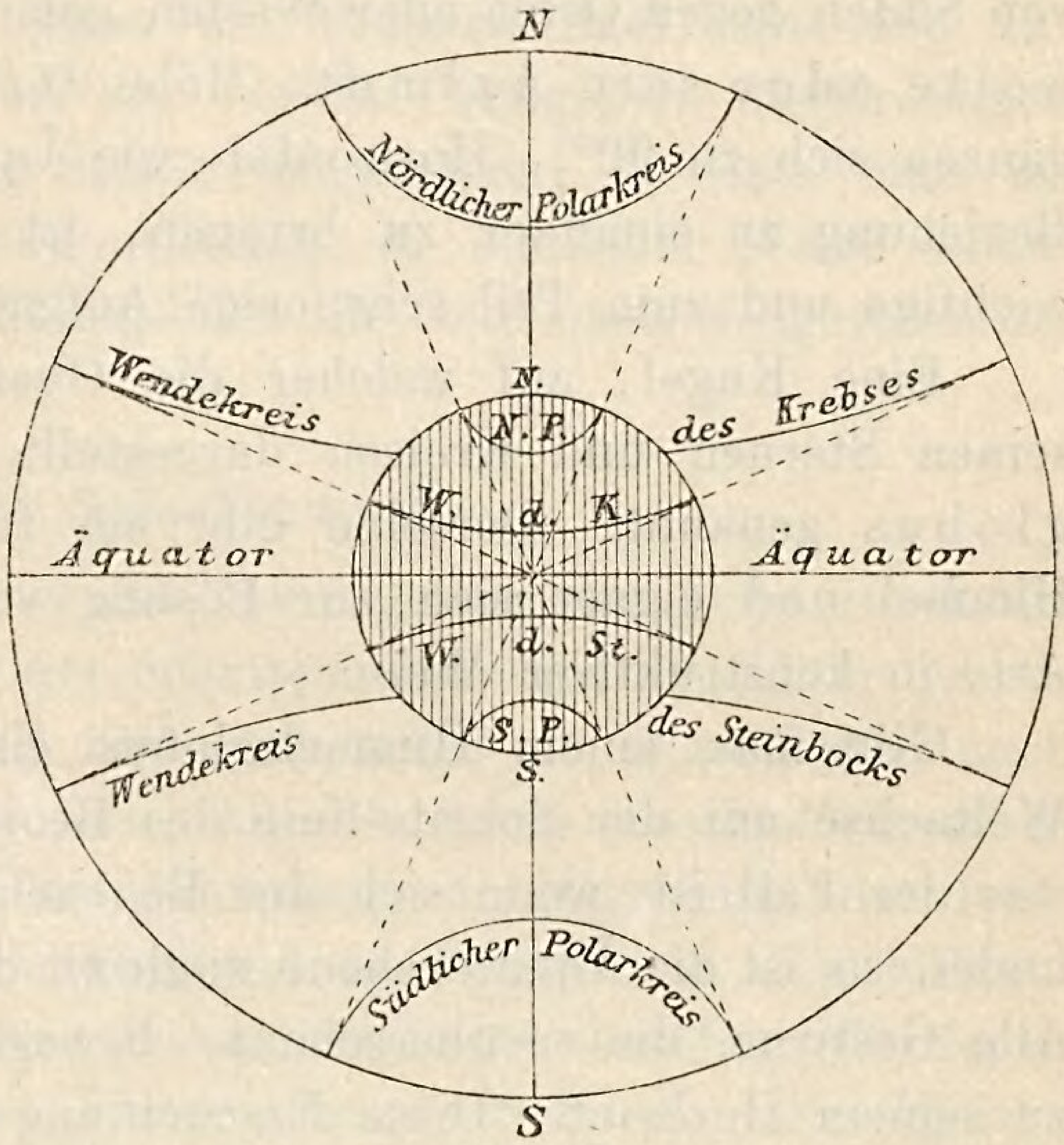


Fig. 162.

Wäre nun *F* (Fig. 161) der Frühlingspunkt und *H* der zu bestimmende Stern, so ist dessen Deklinationskreis *PHC*, seine Entfernung von *F* demnach *FAC*. Dieselbe gleicht der geographischen Länge und führt den Namen g e r a d e A u f s t e i g u n g oder R e k t a s z e n s i o n (*AR*). Den ersten Deklinationskreis *PP′* heiſst man K o l u r d e r N a c h t g l e i c h e n. Er ist, was auf der Erde der Meridian von Ferro oder Greenwich bedeutet. Da durch Deklination und Rektaszension die Stelle eines Sternes am Himmelsgewölbe vollständig bestimmt ist, so sind sie dessen s p h ä r i s c h e K o o r d i n a t e n. Zur Messung derselben bedient man sich des Universalinstrumentes. Die Rektaszension wird, da 360° = 24^h sind, gemeiniglich in Zeit ausgedrückt und der Winkel, welcher dem Bogen am Äquator zwischen Frühlingspunkt und dem Fuſspunkt des Deklinationskreises

des Gestirnes entspricht, heifst daher Stundenwinkel und der Deklinationskreis auch wohl Stundenkreis.

Zieht man durch H den Scheitel- oder Vertikalkreis OHZ, so kann H durch OH und den Bogen SO gemessen werden, wodurch H ebenfalls bestimmt sein dürfte. Diese Koordinaten sind nicht stabil, da sie sich mit dem Standort des Beobachters ändern. Die Koordinate OH heifst Höhe des Sternes und die andere von Süden gegen Osten oder Westen gemessen, hier OS, seine Südweite oder sein Azimut. Höhe OH und Zenitdistanz HZ ergänzen sich zu 90^0. Horizontal- wie Äquatorialkoordinaten in eine Beziehung zu einander zu bringen, ist eine für den Astronomen wichtige und zum Teil schwierige Aufgabe.

Eine Kugel, auf welcher die Oberfläche des Himmels samt seinen Sternen und Kreisen dargestellt ist, wird ein Himmelsglobus genannt. Derselbe gibt ein treues Bild vom gestirnten Himmel und eignet sich zur Lösung von Aufgaben verschiedener Art, in konstruktiver Weise.

Gibt man einem Himmelsglobus eine solche Lage, dafs die Weltachse mit der Scheitellinie des Beobachters B zusammentrifft, was der Fall ist, wenn sich der Beobachter in einem der Pole befindet, so ist die Äquatorebene zugleich die Ebene seines Horizontes. Alle Gestirne, die er überschaut, bewegen sich alsdann parallel zu seinem Horizont. Diese Erscheinung heifst man Sphaera parallela. Am 21. März umkreist die Sonne den Horizont dieser Sphäre. Ohne unterzugehen erhebt sie sich in Schraubengängen immer höher über den Horizont. Hat sie die Höhe von $23^0\,27'\,30''$ erreicht, so geht sie wieder abwärts und am 21. September umkreist sie wie vor sechs Monden den Horizont, um auf ein halbes Jahr Abschied zu nehmen.

Stellt man hingegen den Globus so, dafs das Zenit mit einem Äquatordurchmesser zusammenfällt, so läuft der Horizont durch den Nord- und Südpol. Die Sternbahnen stehen senkrecht auf ihm, so dafs dem Äquatorbewohner alle Gestirne senkrecht auf- und untergehen. Die Parallelkreise teilt der Horizont in gleiche Hälften, somit sind die Sterne 12 Stunden über und ebenso lange unter demselben. Tag und Nacht sind jahraus jahrein gleich lang. Diese Erscheinung heifst die Sphaera recta. Bringt man endlich den Globus in eine solche Lage, dafs das Zenit des Beobachters B weder mit einem Äquatordurchmesser noch mit der Weltachse zusammenfällt, so gewinnt man ein Bild, wie selbes bei Figur 161

vorgestellt ist. Der Horizont schneidet Äquator samt den Parallelkreisen in einem schiefen Winkel, weshalb die Gestirne in einem schiefen Winkel auf- und untergehen, die Sternbahnen ungleich halbiert sind, einige dabei immer über dem Horizont weilen und andere wiederum ihn nie erreichen. Der Beobachter *B* befindet sich in der Sphaera obliqua.

Weitere Orientierungsmittel bieten aufser dem Globus auch die Himmelskarten. Sie bilden die Himmelskugel samt den zur Einteilung dienenden Kreisen ab, wie die Planigloben die Erdkugel. In diese Kreise werden die Sterne eingetragen, so dafs man sie nach Parallel- und Deklinationskreisen in ähnlicher Weise aufzufinden weifs, wie auf den Planigloben die Orte nach geographischer Länge und Breite.

Der Schattenwurf.

Der periodische Wechsel der Beleuchtung der Erde durch die Sonne hat zur Folge, dafs der Schatten eines auf der Erde befindlichen Körpers nicht überall und auch nicht zu allen Zeiten nach ein und derselben Richtung fallen kann. Diesen Umstand hat schon Posidonius 135 v. Chr. zur Einteilung der Bewohner der Erde nach ihrem Schattenwurf benutzt und sie darnach in drei Klassen gebracht. Zu gewissen Zeiten haben die Tropenbewohner die Sonne im Zenit und werfen daher Mittags keinen Schatten. Sie heifsen deshalb Unschattige. Weil aber im Laufe des Jahres ihr Schatten auch nach entgegengesetzten Seiten fällt, so nennt man sie auch wohl Zwei- oder Gegenschattige. Steht nämlich die Sonne im Süden, so fällt der Schatten nach Norden und steht sie im Norden, alsdann nach Süden. Die Bewohner der gemäfsigten Zone werfen ihren Schatten mittags stets nach ein und derselben Richtung, in der nördlichen Erdhalbe nach Norden, in der südlichen nach Süden. Sie heifsen darob Einschattige. Innerhalb der Polarkreise dreht sich um einen freistehenden Körper der Schatten während eines Tages im Kreise herum; Bewohner dieser Zone heifsen Umschattige.

Gegenfüfsler, Gegenwohner, Nebenwohner.

Die Gegenfüfsler oder Antipoden wohnen auf zwei diametral entgegengesetzten Punkten der Erdoberfläche, so dafs sie sich gegenseitig die Füfse zukehren; sie haben gleiche, aber entgegengesetzte Breite und eine Längendifferenz von 180^0. Tages-

wie Jahreszeiten haben sie gleichfalls entgegengesetzt. Die Gegenwohner haben gleichen Meridian aber entgegengesetzten Parallel, deshalb gleiche Tageszeiten, aber entgegengesetzte Jahreszeiten. Die Nebenwohner wohnen an den Endpunkten der Durchmesser der Parallelkreise. Darnach haben sie gleiche Breiten, aber entgegengesetzten Meridian; gleiche Jahreszeiten, aber entgegengesetzte Tageszeiten. Die Nebenwohner des Äquators sind zugleich Gegenfüſsler.

Die Zeiteinteilung. Der Kalender.

Hat die Erde ihren Umlauf vollendet, d. h. steht die Sonne wieder in demselben Zeichen des Tierkreises, als am Beginn ihrer scheinbaren Wallfahrt, so nennt man die Zeitdauer, die sie hierzu beansprucht, ein tropisches Jahr. Dasselbe besteht aus nahezu 365 ¼ Achsenumdrehungen oder aus 365,24224 Tagen = $365^{d}\ 5^{h}\ 48^{min}\ 51^{s}$. Das Jahr für die bürgerliche Zeitrechnung muſs offenbar aus einer Anzahl von ganzen Tagen bestehen. Eben deshalb läſst man den Viertelstag unberücksichtigt und holt nach 4 Jahren ⁴/₄ oder einen ganzen Tag nach. Ein solches Jahr von 366 Tagen heiſst ein Schaltjahr. Julius Cäsar traf diese Anordnung, während vor ihm die alten Völker, wie die Ägypter den Viertelstag gar nicht in die Rechnung brachten. Nun ist klar, daſs $5^{h}\ 48^{min}\ 51^{s}$ noch immer keine 6 Stunden betragen, der Viertelstag war von Cäsar um 0,00776 Tage zu hoch genommen, ein Fehler der in 400 Jahren auf 3 Tage anwächst.

Auf dem Konzilium zu Nicäa 325 wurde die Bestimmung getroffen, daſs das Osterfest immer auf den ersten Sonntag falle, welcher dem ersten Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium folgt. Damals fiel dasselbe auf den 21. März; im Jahre 1582 auf den 11. März. Ganz selbstverständlich, denn in 1257 Jahren waren 10 Schalttage zu viel eingeschaltet worden. Gregor XIII. sah sich deshalb veranlaſst den Julianischen Kalender zu verbessern und ordnete an, daſs auf den 4. Oktober 1582 sogleich der 15. Oktober zu folgen habe. Hiermit war der Fehler wieder korrigiert.

Damit für alle Zukunft dieser Fehler in der Zeitrechnung ausgeschlossen bleibe, verfügte er ferner, daſs auf je 400 Jahre 3 Schalttage auszufallen haben, welche Bestimmung am bequemsten dadurch ausgeführt wird, daſs diejenigen Säkularjahre, die wohl durch 4 nicht aber durch 400 teilbar sind, nur als gemeine Jahre gerechnet werden. Nach dieser Anordnung ist das Jahr 1600 ein Schaltjahr, nicht aber 1700, 1800 und 1900, wohl aber wieder das Jahr 2000.

Der Gregorianische oder verbesserte Kalender wurde zunächst von den Völkern, die der römischen Kirche angehörten, eingeführt; doch auch bald, da man seine Vorzüge kennen lernte, von den Protestanten angenommen. Dem Julianischen Kalender blieben bis auf den heutigen Tag die Russen und Griechen treu. Da dieselben die Jahre 1700 und 1800 als Schaltjahr gerechnet haben, so ist dermalen zwischen dem Kalender alten Stils und dem neuen Stils ein Unterschied von 12 Tagen. Der 1. Januar des russischen Kalenders fällt auf den 13. Januar des verbesserten Kalenders.

Sterntag und Sonnentag.

Faſst man einen unbeweglichen Gegenstand ins Auge, und dreht man sich so lange um sich selbst bis man wieder gerade gegenüber von ihm sich befindet, so ist eine Umdrehung um sich selbst vorgenommen worden. Unveränderlich am Firmament sind die Fixsterne. Fassen wir demnach ein Sternbild z. B. bei seiner Kulmination ins Auge, und kommen wir nach einem bestimmten Zeitabschnitt ihm wieder in dieser Stellung gegenüber zu stehen, so muſs eine einmalige Umdrehung der Erde, die wir gleich einer Fliege auf einem Uhrzeiger mitgemacht haben, vollbracht sein. Eine solche nach einem Fixstern beobachtete Achsendrehung heiſst ein *Sterntag*. Sollen wir für Sterntag eine Definition erbringen, so sagen wir: *Der Sterntag entspricht der Achsendrehung unserer Erde*, d. i. *der Zeit, welche vergeht von einer Kulmination des Gestirnes zur andern.* Dann ist der Sonnentag weiter nichts, als die Zeit, welche vergeht von einer Kulmination der Sonne zur andern. Damit gewinnt es den Anschein, als sei Stern- und Sonnentag ein und dasselbe, denn die Sonne ist gleichfalls ein Fixstern. Das wohl; aber mit dem Unterschied, daſs die Erde bei ihrer Achsendrehung auch noch den Weg um die Sonne zu besorgen hat. Ist sie mit ihrer Achsendrehung fertig, so ist sie auf ihrer Bahn noch nicht weitergekommen, sie muſs somit einen Teil ihrer Achsendrehung zu ihrer Wanderschaft um die Sonne verwenden. Hierdurch verzögert sich die Kulmination der Sonne, oder was dasselbe sagt, die Kulmination der Gestirne geht der der Sonne voraus, oder: *der Sonnentag ist länger als ein Sterntag.* Teilen wir die Erdbahn in 360⁰, so muſs die Erde bei $365\frac{1}{4}$ Achsendrehungen auf ihrer Bahn täglich $59\frac{1}{7}$ Bogenminuten zurücklegen. Nehmen wir den Sterntag als eine volle Achsendrehung zu 360^0 an, so

trifft offenbar auf einen Sonnentag $360^0\, 59\,^1/_7\,'$. Da wir gewohnt sind, den bürgerlichen oder Sonnentag zu 24 Stunden zu rechnen, so ergibt die Projektion

$$360^0\, 59\,^1/_7\,' : 360^0 : 24 : x$$

für den Sterntag die Zeit

$$x = 23^h\, 56^{min}\, 4^s = 86164^s.$$

Durch die beschleunigtere Bewegung der Erde im Perihel als im Aphel sind die Sonnentage nicht von gleicher Dauer. Da man aber verschiedene Gröſsen der bürgerlichen Zeitrechnung nimmermehr zu Grunde legen konnte, so war man genötigt, einen mittleren Sonnentag als Maſseinheit einzuführen. Derselbe wird erhalten, wenn man die durchschnittliche Länge eines Tages berechnet von 365 aufeinanderfolgenden wahren Sonnentagen. Jede gut gehende Räderuhr gibt die mittlere, jede Sonnenuhr die wahre Sonnenzeit an. Der Unterschied zwischen dem Stande einer Sonnen- und dem einer Räderuhr heiſst die Zeitgleichung.

Der höchste oder mittägige Stand der Sonne über dem Horizont in den vier Jahreszeiten. Die Bestimmung der geographischen Breite. Die Tages- und Nachtlängen.

Von der Sonne ist die Erde 148,64 Mill.^{km} entfernt (siehe S. 231) und der Sonnenkörper so enorm groſs, daſs aus seinem Volumen 1,3 Millionen Erden könnten geformt werden (siehe S. 234). Bei der weiten Entfernung der Sonne und der Kleinheit der Erde können die Sonnenstrahlen parallel zu einander gedacht werden. Um die Insolationsverhältnisse, die Tages- und Nachtlängen, wie auch die Bestimmung der geographischen Breite nach dem mittägigen Stand der Sonne kennen zu lernen, suchen wir auf die Stellungen der Erde zur Sonne im Frühling und Herbst, im Sommer und Winter näher einzugehen.

1. Frühling und Herbst.

Im Zenit des Äquatorbewohners steht die Sonne (Fig. 163) also oz senkrecht über dem Horizont HZ. Würde einem Bewohner in b auf dem Parallel von der Breite φ die Sonne im Zenit erscheinen, so müſste er sie zu Mittag gerade über sich in der Verlängerung des Erdradius in cbZ' zu suchen haben. Der Sonnenstrahl kommt jedoch dem Bewohner b nicht von Z', sondern von S zu, denn die

Linie Sb läuft mit Zo parallel. Um den Winkel $Z'bS$ steht sie von seinem Zenit ab. Dieser Winkel ist ein korrespondierender Winkel zu dem Winkel bco und somit gleich der geographischen Breite φ. Über dem Horizont $H'Z'$ steht die Sonne $90 - \varphi = a$ Grade. Erforschen wir mittags den Stand der Sonne überm Horizont mittels eines Quadranten*), so können wir auch setzen $90 - a = \varphi$ und wir haben damit ein Mittel gefunden, in den Zeiten der Äquinoktien die geographische Breite eines Ortes zu bestimmen. An die Pole streifen die Sonnenstrahlen nur hin, sie tangieren hier die Erde.

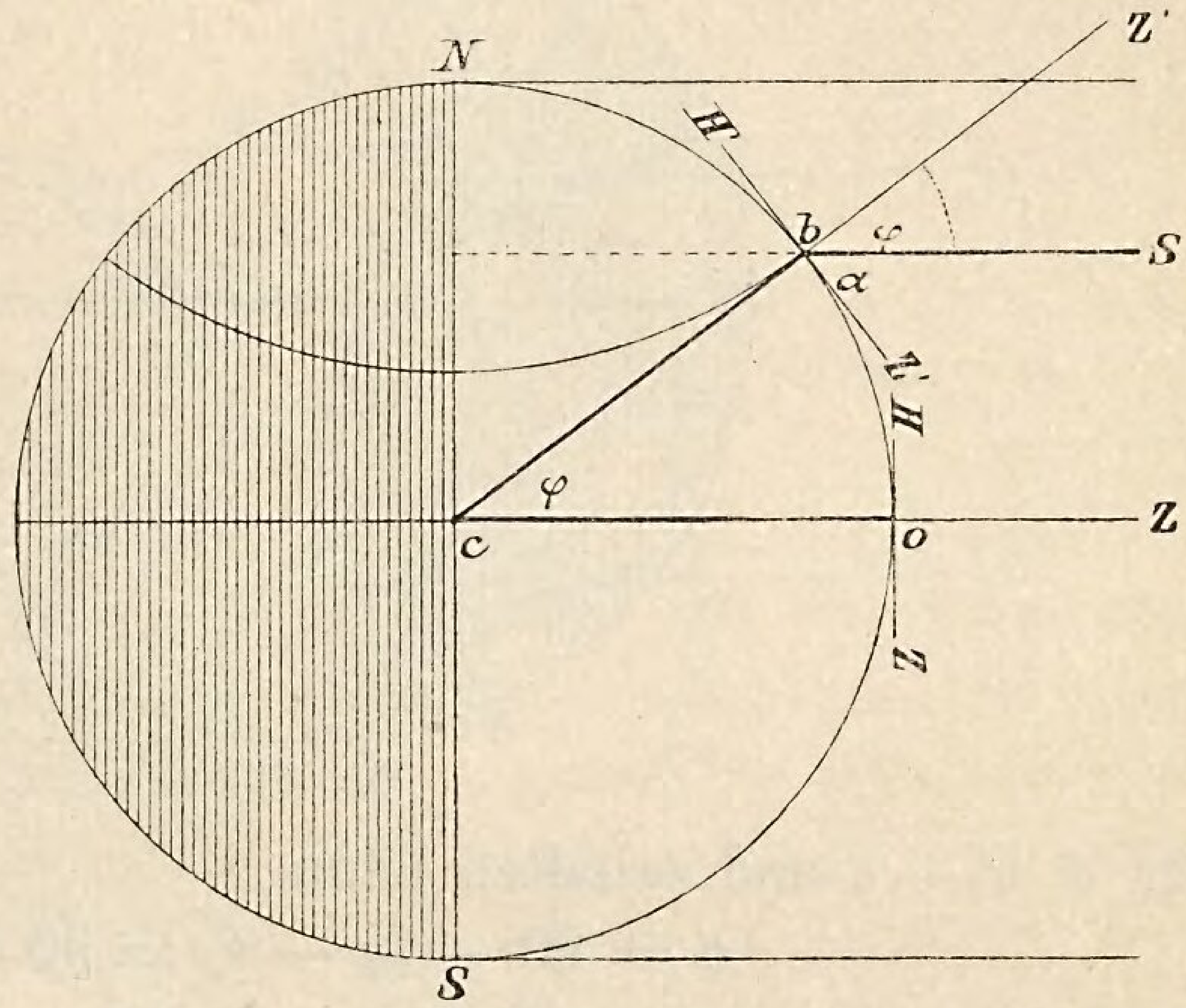


Fig. 163.

Verbinden wir diese Tangentialpunkte, so merken wir, daſs der Beleuchtungskreis durch die Pole geht und alle Parallelkreise halbiert. Die Tag- und Nachtbogen sind sich gleich, dann aber auch Tag und Nacht, jede solche Tageszeit dauert auf der ganzen Erdoberfläche 12 Stunden.

2. Das Sommersolstitium.

Am 21. Juni, wie uns bereits bekannt ist, haben die Orte, welche auf dem Wendekreis des Krebses liegen, die Sonne zu Mittag im Zenit, $23^0\ 27'\ 30''$ hat sie sich über dem Horizont eines jeden Ortes nördlich von diesem Wendekreis erhoben oder vielmehr der Ort b (Fig. 164) hat sich der Sonne um soviele Grade, die wir mit ε bezeichnen wollen, zugeneigt; es hat hierdurch der Winkel a um ε zu- und der Winkel φ um ε abgenommen. Bezeichnen wir $\varphi - \varepsilon$ mit d und den Stand der Sonne über dem Horizont wiederum mit a, so ist
$$a = 90 - d.$$

*) Unter Umständen genügt zur Ermittlung des mittägigen Standes der Sonne über dem Horizont ein Stab. Schatten und Stab lassen auf den Winkel α kommen, denn teilt man die Stablänge K_1 durch den Schatten K_2, so ist $\frac{K_1}{K_2} = \tan \alpha$. Instrumente, die genaue Werte liefern, sind: Theodolith und Meridianinstrument.

Wünschten wir aus dem Stand der Sonne im Sommersolstitium die geographische Breite eines Ortes abzuleiten, so substituieren wir

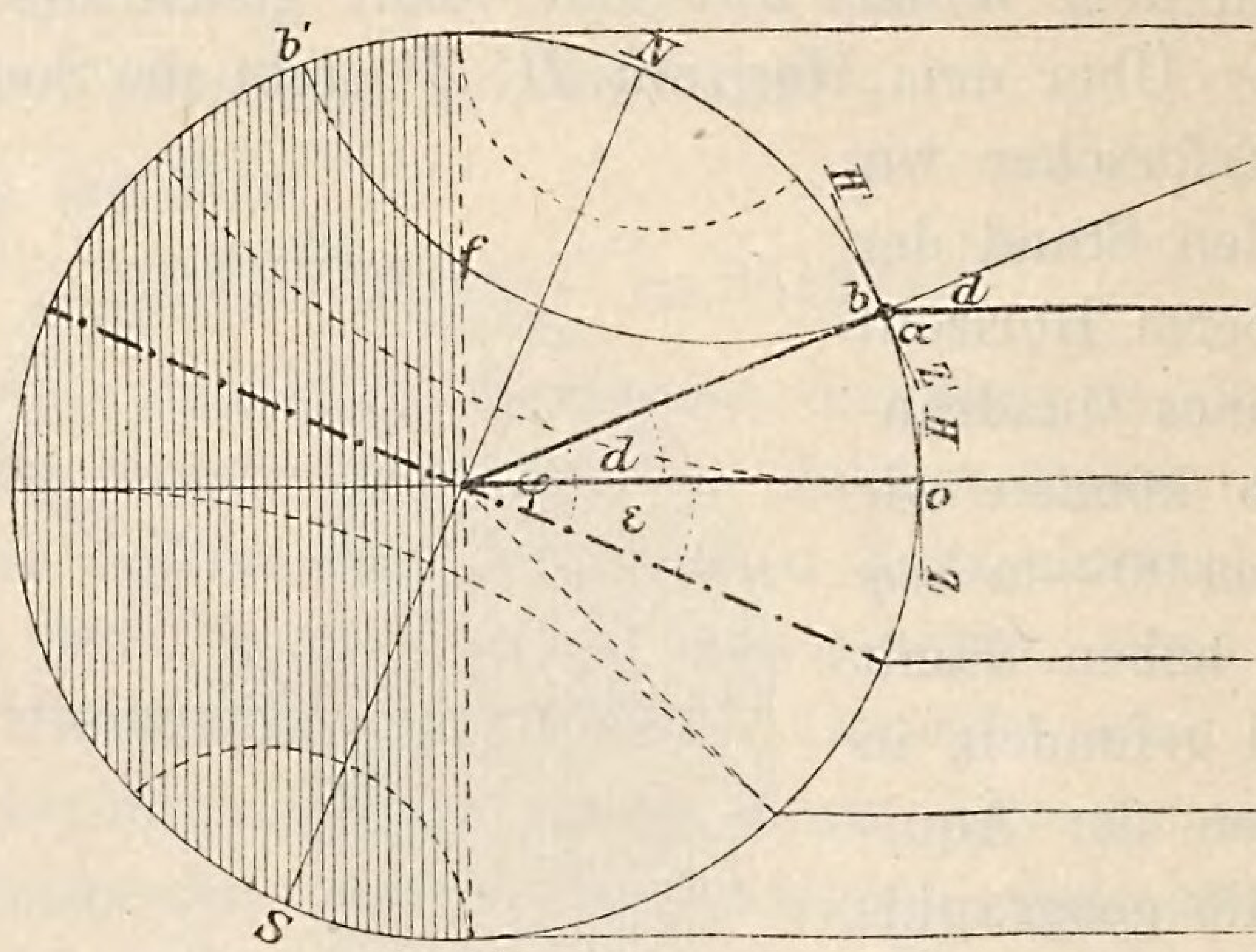


Fig. 164.

für d $\varphi - \varepsilon$ und erhalten dann

$$a = 90 - (\varphi - \varepsilon) = 90 + \varepsilon - \varphi$$

so dafs $\varphi = (90 + \varepsilon) - a$ ist.

Im höchsten Norden fällt der Sonnenstrahl als Tangente 23° 27′30″ über den Pol hinaus, die Sonne tangiert die Polarkreise. Beide Tangentialpunkte durch eine Linie verknüpft lassen uns den Beleuchtungskreis im Sommer erkennen. Derselbe teilt den Äquator in gleiche, die Parallelkreise in ungleiche Hälften, die Polarkreise gar nicht. Hieraus resultiert, dafs am Äquator auch in der Sommerzeit Tag und Nacht gleich sind, am Nordpol die Sonne nie unter- und am Südpol nie aufgeht. Die ungleiche Teilung der Breitenkreise erzeugt auf der nördlichen Halbkugel lange Tage und kurze Nächte, auf der südlichen dagegen lange Nächte und kurze Tage.

3. Das Wintersolstitium.

Da dasselbe das Gegenspiel vom Sommersolstitium ist, so können wir uns kurz fassen. Nach Figur 165 ist der Winkel $Z'bS = \varphi + \varepsilon$, also der Stand der Sonne zu Mittag über dem Horizont

$$a = 90 - (\varphi + \varepsilon) = (90 - \varepsilon) - \varphi.$$

Für die geographische Breite erhalten wir die Gleichung

$$\varphi = (90 - \varepsilon) - a.$$

In dieser Zeit ist die südliche Erdhälfte im Vorteil der Erleuchtung und Erwärmung; sie hat kurze Nächte und lange Tage. Am Äquator sind Tag und Nacht gleich; der Südpol hat immer Tag und der Nordpol ist in grause, eisige Nacht gehüllt.

Zur Bestimmung des mittägigen Sonnenstandes und der geographischen Breite in den Ländern innerhalb der Wendekreise,

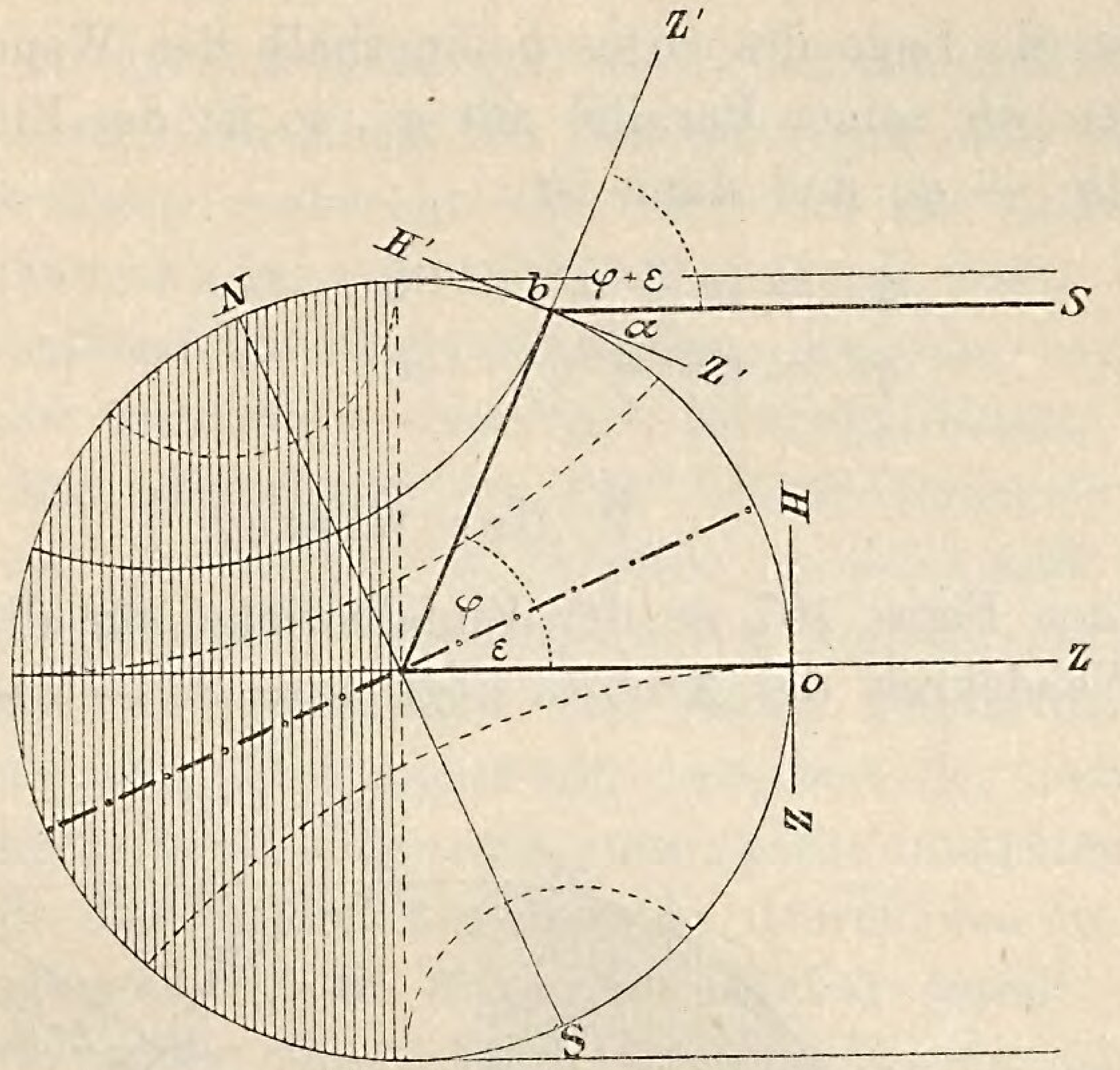


Fig. 165.

da die Sonne zweimal durch das Zenit der Bewohner geht, seien folgende Sätze noch beigefügt.

A. Der Sommer.

Nach Figur 166 steht über dem Parallel φ die Sonne im Zenit und der Ort b liegt auf dem Wendekreis und seine

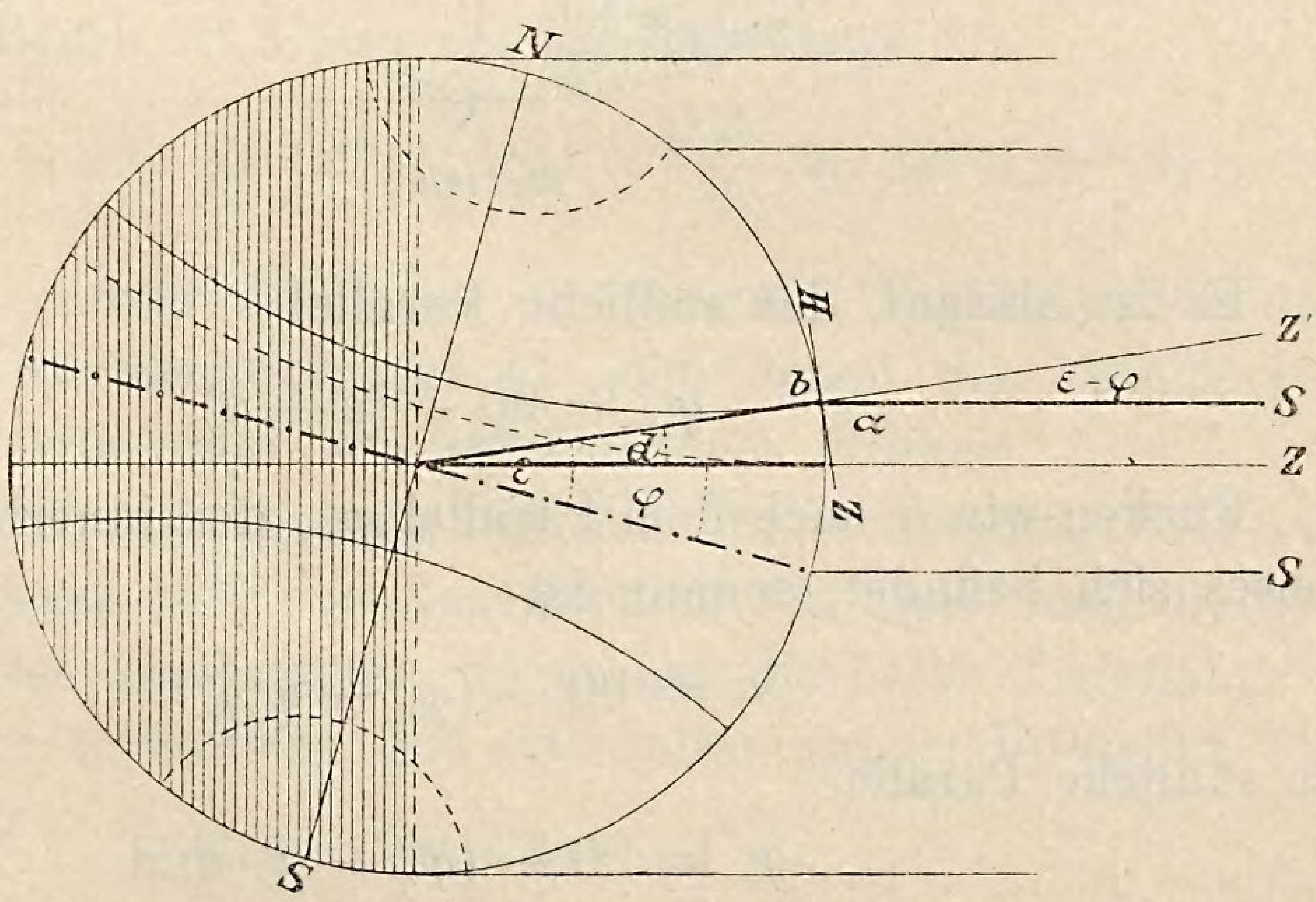


Fig. 166.

Breite ist ε. Der Einfallswinkel des Sonnenstrahles Sb ist

$$a = 90 - (\varepsilon - \varphi).$$

Darnach ist $\varphi = (a + \varepsilon) - 90$

$\varepsilon = (90 + \varphi) - a.$

Ist die Lage des Ortes b innerhalb des Wendekreises und bezeichnen wir seinen Parallel mit φ', so ist der Einfallwinkel a bei b $90 - (\varphi' - \varphi)$ und dann ist

$$\varphi = (a + \varphi') - 90$$

$$\varphi' = (90 + \varphi) - a.$$

B. Der Winter.

Nach Figur 167 ist der Einfallswinkel für den Ort b, der auf dem Wendekreis des Krebses liegt, $a = 90 - (\varepsilon + \varphi)$.

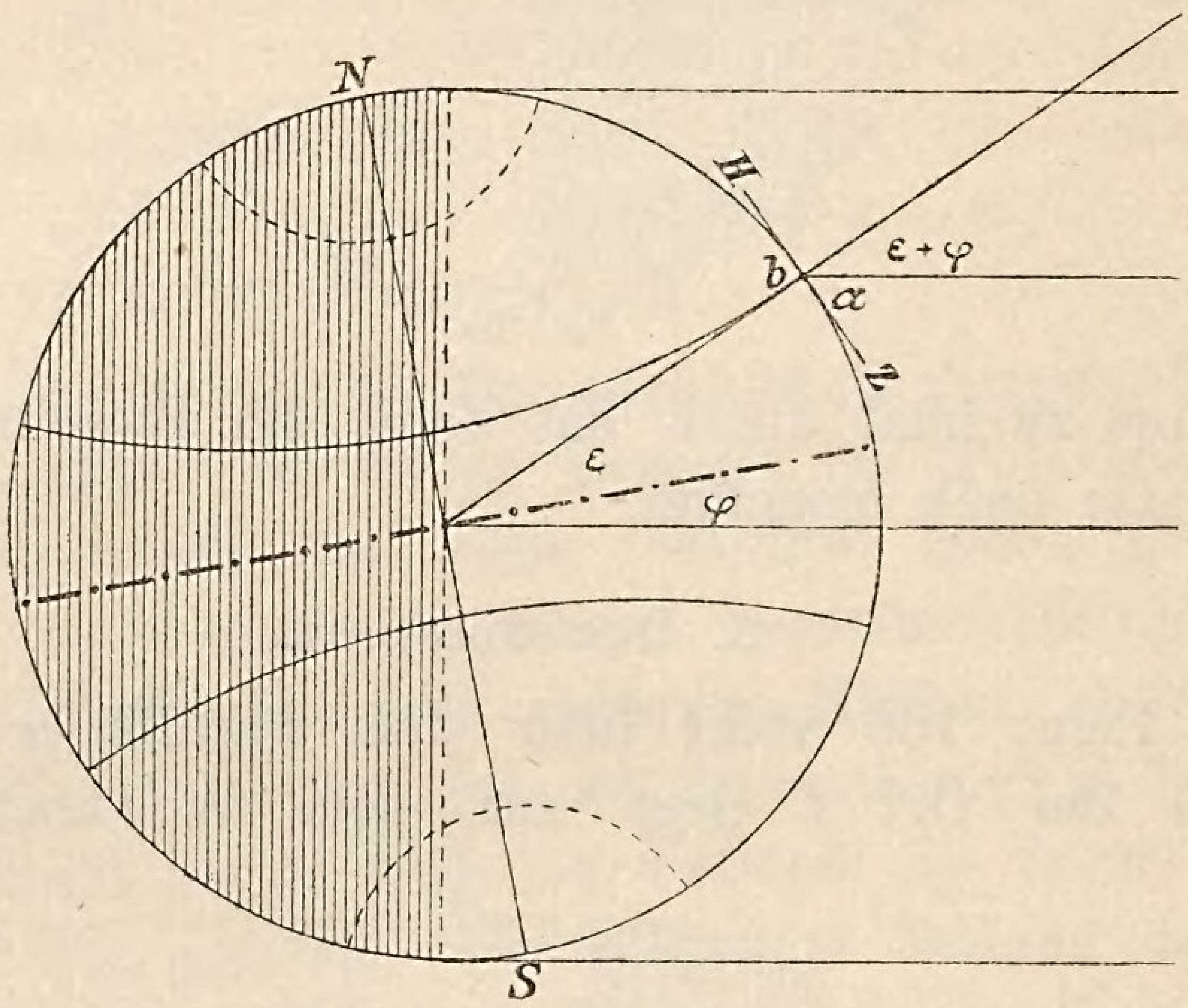


Fig. 167.

Es ist alsdann der südliche Parallel

$$\varphi_s = 90 - (\varepsilon + a).$$

Rücken wir b nach dem Parallel φ_n, der innerhalb des Wendekreises sich befindet, sodann ist

$$a = 90 - (\varphi_n + \varphi_s),$$

der südliche Parallel

$$\varphi_s = 90 - (\varphi_n + a) \text{ und}$$

der nördliche Parallel

$$\varphi_n = 90 - (\varphi_s + a).$$

Bestimmung des längsten Tages und der Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien durch Konstruktion. Die Refraktion oder Strahlenbrechung.

Am 21. Juni, da die Bewohner der nördlichen Hemisphäre den längsten Tag haben, steht die Ebene des Beleuchtungskreises auf der Ebene der Ekliptikschiefe senkrecht und bildet mit der Ebene des Äquators einen Neigungswinkel von $113\frac{1}{2}^0$ (Fig. 164 S. 204). Diese Beleuchtungslinie halbiert die Kugel dermafsen, dafs die arktische Zone aufserhalb, die antarktische innerhalb der Schattenseite liegt. Um den längsten Tag oder besser den 180^0 überschreitenden Tagbogen des Ortes b von der Breite φ zu erhalten, zeichnet man in ein Halbkugelbild, bei welchem die Längengrade am Äquator abzulesen sind, einesteils die Beleuchtungslinie von einem Polarkreis zum andern in der Weise ein, dafs aufserhalb derselben der arktische (nach Fig. 164) innerhalb derselben der antarktische Polarkreis sich befindet, andernteils den Parallel des Ortes b. Durch den Meridian NS wird der Tagbogen bf in ungleiche Hälften geteilt. Den Überschufs über 90^0 oder einen Viertelskreis erforscht man am Äquator durch den Meridian, der durch f läuft. Beträgt dieser Überschufs oder Zuwachs ζ^0, so umfafst der halbe Tagbogen auf dem Parallel φ $90 + \zeta^0$, der ganze Tagbogen $180 + 2\zeta^0$. Da nach S. 87 4^{min} Zeit einem Grad entsprechen, so verwandelt man das Bogenmafs in Zeitmafs, wenn man die Grade mit $4^{min} = \frac{0{,}2^h}{3}$ multipliziert. Liegt nun der Ort b auf dem 20. Parallel und ergibt sich für ζ^0 der Bogen $9^0\,3'$, so ist die Tageslänge

$$12^h + 18{,}1^0 \times 4^{min} = 12^h + 18{,}1 \times \frac{0{,}2^h}{3} = 13^h\,12^{min}\,24^s.$$

Tabelle XIX enthält die Dauer des längsten Tages a) nach den Ergebnissen der Konstruktion und b) nach denen der rechnenden Bestimmung für Orte unter den verschiedenen Breiten.

Weil nun die Tageslänge zwischen dem Sonnenaufgang (SA) und dem Sonnenuntergang (SU) zu liegen kommt, so findet man die Zeit des Sonnenauf- und Unterganges, wenn man die halbe Tageslänge T von Mittag 12 Uhr subtrahiert und das anderemal zu Mittag 12 Uhr hinzuaddiert, also

$$SA = 12 \text{ Uhr} - T$$
$$SU = 12 \text{ Uhr} + T = o + T.$$

Dabei darf nicht unbeachtet bleiben, dafs der Tag um zweier Ursachen willen eine Verlängerung erfährt. Denn einmal erscheint

die Sonne nicht als ein leuchtender Punkt, sondern als eine leuchtende Scheibe, deren oberer Rand den Horizont schon rötet, ehe ihr Mittelpunkt zum Vorschein kommt. Der Radius oder die Entfernung des Randes vom Zentrum beträgt bei der Sonne 16′. Die zweite Ursache, welche eine Verlängerung herbeiführt, liegt in der Strahlenbrechung oder Refraktion. Unter ihr versteht man die Ablenkuug von der geradlinigen Bahn, welche ein Lichtstrahl erleidet, wenn er aus einem Medium in ein anderes tritt. Da nun die Dunsthülle oder Atmosphäre, welche unsere Erde umgibt, in Bezug auf Dichte, Temperatur, Wasserdampfgehalt von Ort zu Ort wechselt, so wird ein Lichtstrahl bei seinem Weg durch diese verschiedenartigen Luftschichten nicht geradlinig bleiben können, er wird vielmehr in einem Bogen zu uns gelangen. Hierdurch mufs eine Vergröfserung der scheinbaren Höhe eines Gestirnes eintreten, wodurch sein Aufgang beschleunigt und sein Untergang verzögert wird. Vom Horizont aus gegen das Zenit hin, nimmt die Refraktion beständig ab, steht das Gestirn im Zenit, so wird sie zu Null. Die Gröfse der Refraktion unserer Sonne bei ihrem Auf- und Untergang beträgt 35′. Beide Resultate: Halbmesser der Sonnenscheibe und Refraktion der Sonne, addiert, ergeben, dafs unser Tagesgestirn seinen Tagesbogen morgens wie abends um 51′ scheinbar verlängert, welche Strecke am Äquator der Zeit von $3{,}4^{min}$ in unsern Breiten einer solchen von etwa 4^{min} entspricht. Eben deshalb hat man zur Tageslänge bei uns 8^{min} hinzuzuaddieren oder aber vom Sonnenaufgang 4^{min} zu subtrahieren und beim Sonnenuntergang noch 4^{min} hinzuzugeben. In polaren Gegenden, wo die Sonne jährlich nur einmal auf- und untergeht, erreicht die Refraktion die stattliche Gröfse von 53 Stunden. Durch sie wird die Polarnacht um 4 Tage 10 Stunden abgekürzt.

Das Halbdunkel oder die Helligkeit, welche morgens einige Zeit vor dem Aufgang und abends einige Zeit nach dem Untergang der Sonne eintritt, und hierdurch den allmählichen Übergang von der Finsternis zum Licht oder umgekehrt bildet, heifst die Dämmerung. Dieselbe findet in der Umhüllung unserer Erde durch eine Luft- und Wasserdampfatmosphäre und der Eigenschaft der einzelnen Atmosphärenteilchen, das Licht zu reflektieren, ihre Erklärung. Wie der Lampenschirm, ebenso wirkt im Grofsen die Luft. Ist die Sonne bereits untergegangen und kann sie uns die Lichtstrahlen nicht mehr direkt zuschicken, so treffen einige von ihnen noch die Luftschichten des westlichen Himmels und werden von diesen uns zugeworfen. Gewöhnlich rechnet man die Dauer der Abend-

dämmerung von Sonnenuntergang bis zu der Zeit, da man aus Mangel an Helligkeit die Arbeiten im Freien einstellen mufs, und die Morgendämmerung beginnt, sobald man die gewöhnlichen Hantierungen aufnehmen kann. Es ist dies der Fall, wenn die Sonne sich noch $6\frac{1}{2}^0$ unterm Horizont befindet. Von dieser Dämmerung, welche man die bürgerliche heifst, ist die astronomische der Dauer nach zu unterscheiden. Sobald morgens die kleinen Sterne anfangen unsichtbar zu werden, beginnt sie, was so ziemlich der Fall ist, wenn die Sonne noch 18^0 unter dem Horizont weilt. Somit hat jeder Ort zwischen dem Nacht- und Tagbogen einen Dämmerungsstreifen von 18^0 zu durchwandern. Figur 168 sei so aufzufassen, dafs die linke Hälfte Nacht, die rechte Seite Tag sei. Der Streifen zwischen den Geraden $S_4 N'$ und $S_3 P'$ hat den Dämmerungsgürtel vorzustellen. Ein flüchtiger Blick genügt, um herauszubringen, dafs für den gleichbreiten Dämmerungstreifen, die Parallelen, um ihn zu durchlaufen, ungleiche Wegstrecken aufzubieten haben. Der Paralell PP verbraucht ein Viertel seines Weges oder 90^0, der Parallel $P_1 P_1$ bedeutend weniger als 90^0, der Parallel $P_2 P_2$ wiederum weniger und so geht diese Abnahme fort bis zum Äquator, der ein gröfster Kreis unter den Parallelen ist und bei dem 18 Grade seines Umfanges ebensogrofs sind als die 18 Grade des Dämmerungsstreifens. Setzen wir für 18^0 Dämmerung D und für 18 Äquatorialgrade λ, so ist

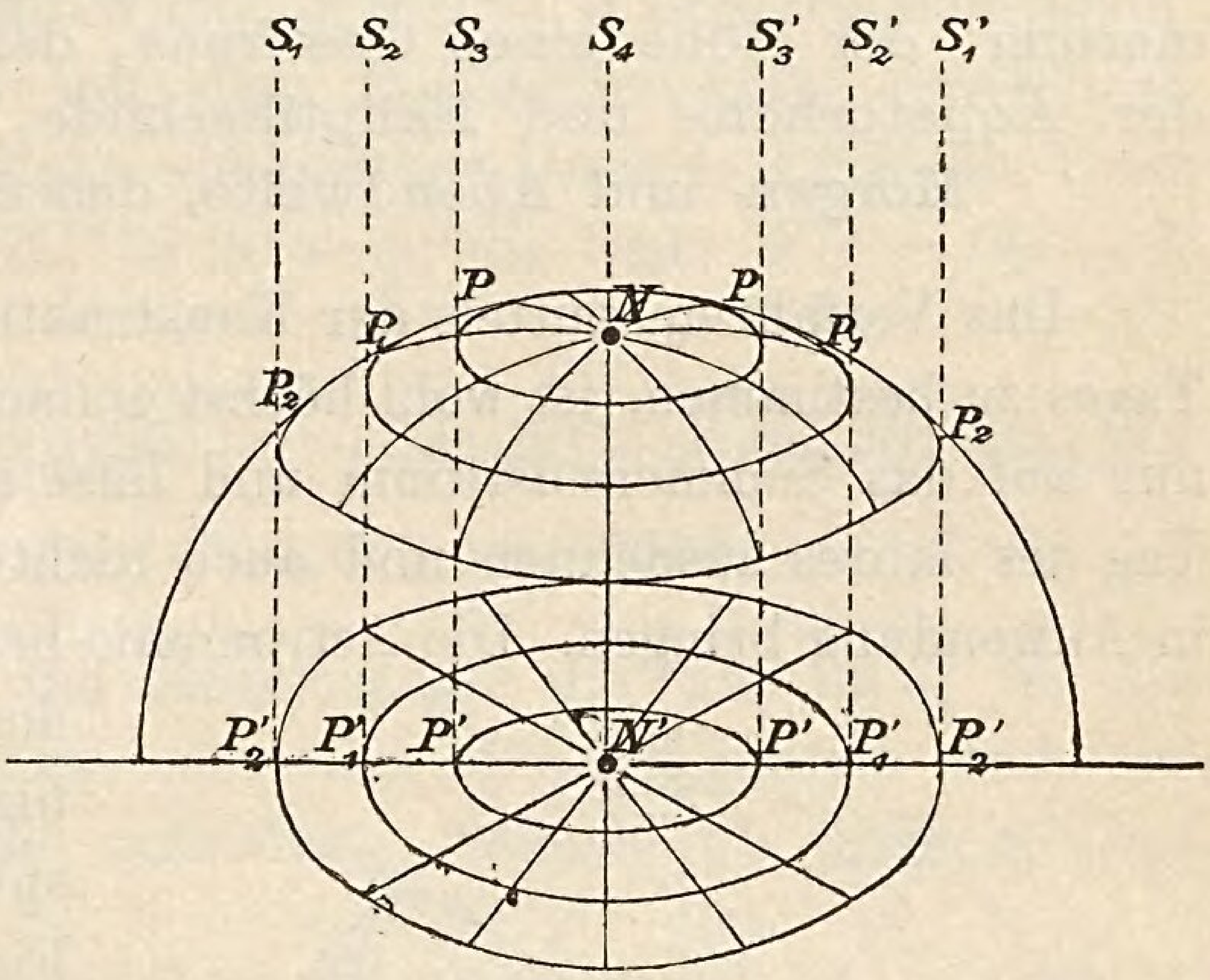


Fig. 168.

$$D = \lambda.$$

Nun ist nach S. 85 $\lambda = \lambda' \sec \varphi$,

also $D = \lambda' \sec \varphi$.

Nach dieser Gleichung erhält man die Wegstrecke eines Parallels φ, welche dem Dämmerungsgürtel zu entsprechen hat, wenn man die Anzahl der Dämmerungsgrade mit der Sekante der geo-

graphischen Breite multipliziert. Da aber 18 Äquatorgrade der Zeit von $1{,}2^h$ gleichkommen, so findet man die Durchgangszeit eines Parallels φ durch den Dämmerungsgürtel mittels der Gleichung

$$D = 1{,}2 \cdot \sec \varphi.$$

Beigefügt muſs werden, daſs bei den vorstehenden Erörterungen die Deklination der Sonne ausgeschlossen blieb.

Tabelle XX enthält die Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien und Solstitien für Orte unter verschiedenen Breiten.

Rechnende Bestimmung der Tageslänge, der Dauer der Dämmerung, der Höhe eines Gestirnes, der Deklination der Sonne, der Äquatorhöhe und Ekliptikschiefe, der Lichtklimate, der Morgen- und Abendweite, des Sonnenaufganges.

Das Verfahren, mittels der Konstruktion die Dauer des längsten Tages zu bestimmen, ist wohl höchst einfach, beschränkt sich jedoch nur auf das Sommersolstitium und läſst sich somit nicht auf jeden Tag des Jahres ausdehnen und auch nicht leicht für jede Örtlichkeit in Anwendung bringen. Die Astronomie bedient sich zur Bestimmung der Tageslänge eines ausgiebigeren Mittels, nämlich der sphärischen Trigonometrie. Fig. 169 bedeute das Himmelsgewölbe, in dessen Mittelpunkt der Beobachter B weilt. Sein Horizont ist $SONW$, sein Meridian $NPSP'$, sein Zenit Z und sein Nadir Z'. Die Polhöhe, welche der geographischen Breite seines Standortes gleich kommt, ist $NP = \varphi$. Ferner ist AA' der Himmelsäquator, SA die Höhe des Äquators über dem Horizont oder die Äquatorhöhe. Zur Zeit der Äquinoktien durchläuft scheinbar die Sonne den Himmelsäquator, genau im Osten geht sie auf, genau im Westen unter. Der Tagbogen ist dem Nachtbogengleich, weshalb auch Tag und Nacht gleich sind. Nach einem Vierteljahr hat sie sich scheinbar 23° 27′ 30″ über den Äquator erhoben, der Wendekreis

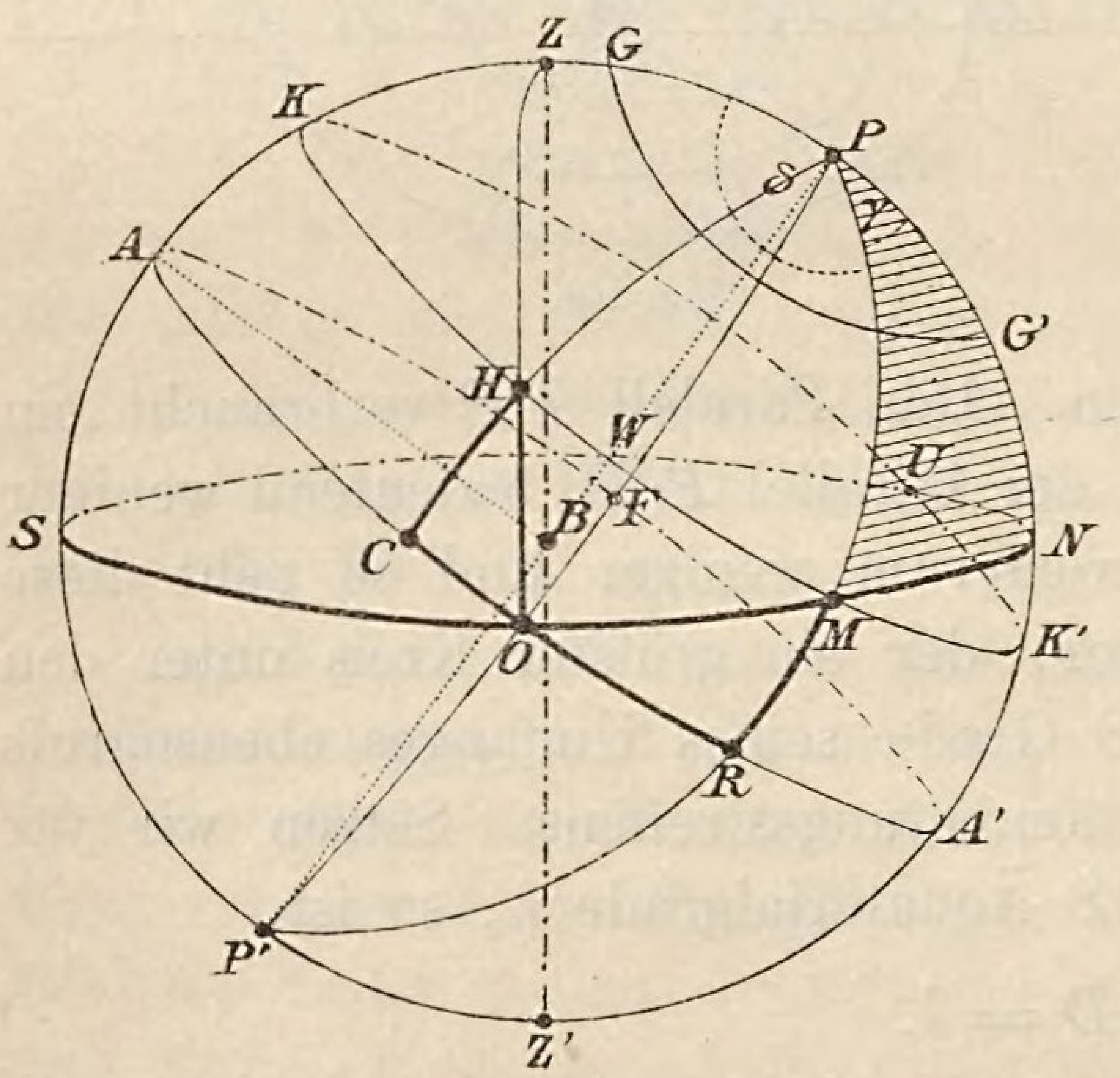


Fig. 169.

des Krebses KK' bildet dann ihren Rotationskreis. Für den Beobachter B kommt sie nicht mehr bei O, sondern bei M über seinen Horizont und taucht nicht bei W, sondern bei U unter denselben. Hierdurch wird die Sonnenbahn in zwei ungleiche Hälften geteilt, die gröfsere Hälfte weilt die Sonne über, die kleinere Hälfte unter dem Horizont. Zu dieser Zeit ist für den Beobachter B der längste Tag. Die Entfernung der Sonne vom Ost- und Westpunkt heifst ihre Morgen- und Abendweite. Hat die Sonne den Punkt H erreicht, und zieht man durch H die Quadranten PHC und ZHO, so hat man durch das Bogenstück $CH = AK = d$ die Deklination der Sonne, durch das andere Bogenstück $OH = h$ ihre Höhe über dem Horizont und durch den Winkel $ZPH = \delta$ den Stundenwinkel, welchen der Ortsmeridian mit dem Deklinationskreis einschliefst. Es ist aber im schiefwinkligen sphärischen Dreieck ZPH die Seite $ZH = 90 - h$, die Seite $ZP = 90 = \varphi$, die Seite $PH = 90 - d$. Alsdann ist nach S. 53

$$\cos(90-h) = \cos(90-\varphi)\cos(90-d) + \sin(90-\varphi)\sin(90-d)\cos\delta$$

oder

$$\sin h = \sin\varphi \sin d + \cos\varphi \cos d \cos\delta.$$

Hiermit wäre durch die Kosinusregel die Gleichung für die Höhe irgend eines Gestirnes, von dem die Deklination und der Stundenwinkel bekannt sind, gefunden. Nehmen wir folgende Ummodelung

$$\sin h - \sin\varphi \sin d = \cos\varphi \cos d \cos\delta$$

vor, so erhalten wir leicht für den Stundenwinkel eine brauchbare Formel. Dieselbe ist darnach

$$\cos\delta = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin d}{\cos\varphi \cdot \cos d}.$$

Beim Aufgang eines Gestirnes ist die Höhe Null und sein Deklinationskreis schliefst alsdann mit dem Ortsmeridian einen Winkel ein, welcher dem halben Tagbogen gleichkommt. Es fällt $\sin h$ weg und für die halbe Tageslänge ist zu setzen

$$\cos\delta = -\frac{\sin\varphi \sin d}{\cos\varphi \cos d} = -\tan\varphi \tan d.$$

Während der Dämmerung befindet sich die Sonne unterm Horizont, die Höhe unter demselben wird negativ genommen. Rechnen wir die Dämmerungszeit noch dem halben Tagbogen bei und bezeichnen

wir diesen halben Tagbogen mit δ', so ist

$$\cos\delta' = -\left(\tan\varphi \tan\delta + \frac{\sin h}{\cos\varphi \cos d}\right)^{*)} = -\frac{\sin h + \sin\varphi \sin d}{\cos\varphi \cos d}.$$

Da der negative Kosinus eines spitzen Winkels gleich ist dem Kosinus seines stumpfen Nebenwinkels, so ist der halbe Tagbogen

$$T = \cos(180 - \delta).$$

Die Dauer der Dämmerung wird erhalten, indem man vom halben Tagbogen $(180 - \delta')$ den halben Tagbogen $(180 - \delta)$ in Abzug bringt.

Es ist dann, wenn D die Dauer derselben bezeichnet,

$$D = (180 - \delta') - (180 - \delta) = 180 - \delta' - 180 + \delta = \delta - \delta'.$$

Unter δ und δ' sind zuletzt die Kosinuse der spitzen Winkel, die positiv sind, zu verstehen.

Im Winter ist die Deklination negativ zu nehmen; es ist dann der halbe Tagbogen

a) ohne Dämmerung

$$\cos\delta = -\tan\varphi \cdot -\tan d = \tan\varphi \cdot \tan d^{**)}$$

b) mit Dämmerung

$$\cos\delta' = \tan\varphi \cdot \tan d + \left(-\frac{\sin h}{\cos\varphi \cos d}\right)^{***)} = \frac{\sin\varphi \sin d - \sin h}{\cos\varphi \cos d}.$$

Ist $\sin h > \sin\varphi \sin d$, so wird der Kosinus negativ und der halbe Tagbogen mit der Dämmerung übersteigt sodann 90^0. Wenn der halbe

*) $-\sin h - \sin\varphi \sin d = -\sin h - \sin\varphi \sin d + o = o - (\sin h + \sin\varphi \sin d)$. Denn $-a - b + c = c - a - b = c - (a + b)$ d. h. zwei oder mehrere Zahlen werden von einer anderen Zahl subtrahiert, wenn man sie nacheinander subtrahiert oder ihre Summe von der Zahl subtrahiert.

**) $\cos\delta = -\tan\varphi \,.\, -\tan d = \tan\varphi \,.\, \tan d$, weil nach den Regeln der Arithmetik zwei negative Zahlen miteinander multipliziert ein positives Produkt geben. Denn $-a \,.\, -b = (o - a) \,.\, -b = [o \,.\, (-b)] - [a \,.\, (-b)] = [o \,.\, (o - b)] - [a(o - b)] = (o - o) - (ao - ab) = o - (o - ab) = o + ab - o = ab$. Bei diesem Nachweis wurde einesteils die Regel benutzt, dafs eine Differenz mit einer Zahl multipliziert wird, wenn man Minuenden und Subtrahenden mit dieser Zahl multipliziert, also $(a - b)c = ac - bc$, andernteils auch die, dafs eine Differenz $a - (b - c)$ subtrahiert wird, wenn man zu der Zahl a den Subtrahenden c addiert und von dieser Summe den Minuenden b subtrahiert; also $a - (b - c) = (a + c) - b$.

***) $-\frac{\sin h}{\cos\varphi \,.\, -\cos d}$ ist, da nach S. 43 der gleiche, entgegengesetzte Winkel gleichen positiven Kosinus hat, wiederum $-\frac{\sin h}{\cos\varphi \cos d}$.

Tagbogen $-\tan\varphi \cdot \tan d = 180 - \delta = t$ ist, so ist $\tan\varphi \cdot \tan d = 180 - t = \delta$. Die Dämmerung im Winter ist sonach

$$D = 180 - \delta' - \delta = 180 - (\delta + \delta')$$

oder, wenn wir für δ den Wert $(180 - t)$ einsetzen,

$$D = 180 - \delta' - (180 - t) = t - \delta'.$$

Haben wir $d = o$ zu nehmen, so ist der halbe Tagbogen

a) ohne Dämmerung

$$\cos\delta = -\tan\varphi \cdot \tan o = o$$

$\cos 90^0 = o$; der Tagbogen $2T$ ist 180^0 oder 12^h;

b) mit Dämmerung

$$\cos\delta' = o - \frac{\sin h}{\cos\varphi \cos o} = -\sin h \sec\varphi$$

$$D = 180 - \sin h \sec\varphi - 90 = 90 - \sin h \sec\varphi = 90 - \delta'.$$

Der Tagbogen $2T$ in Zeit ist nach S. 207

a) im Sommer $2T = \frac{0,4}{3}(180 - \delta)$

b) im Winter $2T = \frac{0,4}{3}\delta$;

und die Dauer der Dämmerung D in Zeit ist

a) im Frühling $D = \frac{0,2}{3}(90 - \delta')$

b) im Sommer $D = \frac{0,2}{3}(\delta - \delta')$

c) im Winter $D = \frac{0,2}{3}[180 - (\delta + \delta')] = \frac{0,2}{3}(t - \delta')$.

Tabelle XIX gibt die Dauer des längsten Tages a) nach den Ergebnissen der Konstruktion, b) nach denen der rechnenden Bestimmung für Orte unter den verschiedenen Breiten.

Tabelle XX enthält die Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien und Solstitien für Orte unter den verschiedenen Breiten.

Im Momente der Kulmination eines Sternes fällt dessen Stundenkreis mit dem Ortsmeridian zusammen, der Stundenwinkel wird zu Null. Da aber $\cos o = 1$ ist, so ist

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin d + \cos\varphi \cdot \cos d$$

oder nach S. 52

$$\sin h = \cos(\varphi - d) = \sin(90 - \varphi + d)$$

und wiederum
$$h = 90 + d - \varphi$$
$$\varphi = 90 + d - h,$$
welche Resultate ganz und gar mit denen durch Konstruktion gewonnenen Ergebnissen S. 204 übereinstimmen.

Setzen wir im Sommersolstitium $d = \varepsilon$ und im Wintersolstitium $d = -\varepsilon$, so ist, wenn wir die Höhe im Wintersolstitium mit h' bezeichnen
$$\sin h = \cos(\varphi - \varepsilon) = \sin(90 - \varphi + \varepsilon)$$
$$\sin h' = \cos(\varphi + \varepsilon) = \sin(90 - \varphi - \varepsilon)$$
also
$$h = 90 - \varphi + \varepsilon$$
$$h' = 90 - \varphi - \varepsilon.$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt
$$\tfrac{1}{2}(h + h') = 90 - \varphi = a$$
und die Subtraktion hingegen
$$\tfrac{1}{2}(h - h') = \varepsilon.$$

Daraus geht hervor, dafs man die Äquatorhöhe a und die Ekliptikschiefe ε durch die Beobachtung der Kulminationshöhen der Sonne im Sommer- und Wintersolstitium erhält. Die halbe Summe beider Beobachtungen gibt die Äquatorhöhe und die halbe Differenz derselben die Ekliptikschiefe.

Aus der Gleichung $h = 90 + d - \varphi$ wird durch Transformation erhalten
$$d = h + \varphi - 90.$$

Addiert man demnach zur beobachteten mittägigen Höhe eines Gestirnes die geographische Breite des Beobachtungsortes und bringt man von dieser Summe 90 Grade in Abzug, so hat man in dieser Differenz die Deklination des Gestirnes.

Tabelle XXI gibt die Deklination der Sonne für die einzelnen Tage des Jahres.

Setzen wir endlich $\varphi = o$ und $\varphi' = 90$, so haben wir für die Tageslänge am Äquator
$$\cos\delta = -\tan o \cdot \tan d = o$$
und für die am Pol
$$\cos\delta = -\tan 90 \cdot \tan d = \mp \infty.$$

Die eine Rechnung für die Tageslänge am Äquator bezeugt, dafs hier Tag und Nacht auch im Sommer gleich sind, da $\cos o$ sich auf einen halben Tagbogen von 90^0, der 6 Stunden gleich kommt, bezieht.

Das Zeichen $\mp\infty$ deutet darauf hin, dafs an dem Pol kein Auf- und Untergang stattfindet, die Sonne entweder immerwährend unter oder über dem Horizont bleibt. So hat der Pol, wie schon mehrfach erwähnt wurde, keinen Auf- und Untergang der Sonne, ihre veränderte Stellung rührt einzig und allein von ihrer Deklination her. Zufolge dessen ist sie am Pol ein halbes Jahr über und ebenso lang unter dem Horizont, was nichts anderes zu bedeuten hat, als dafs innerhalb der Polarkreise ein halbes Jahr Tag und ein halbes Jahr Nacht ist.

Am Äquator beträgt der halbe Tagbogen im Sommer 90^0, bei den Parallelen φ, φ', φ'' ... nach S. 207 dagegen $90+\zeta$, $90+2\zeta$, $90+3\zeta$... Diese Parallelkreise φ, φ', φ'' ... bezeichnen die Orte, welche gleichlange Tage haben. Sie dienen dazu, die Erde nach den Orten gleichlanger Tagbogen oder aber nach Lichtzonen, welche den Namen Lichtklimate führen, einzuteilen. Auf sie führt, wenn man $\delta = 90+\zeta$ nimmt, die letzte Gleichung der Seite 211. Denn nach derselben ist

$$\cos(90+\zeta) = -\tan\varphi \tan d$$

woraus folgt, dafs

$$\tan\varphi = -\cos(90+\zeta)\cdot\frac{1}{\tan d} = -\cos(90+\zeta)\cot d \quad \text{ist.}$$

Die vorstehende Gleichung für die Lichtklimate enthält den Kosinus einer Winkelsumme. Seine Behandlung bedarf einer Erklärung. Figur 170 ist uns dabei behilflich. Der Winkel had ist gleich der Summe der Winkel ead und hae, also $\sphericalangle had = \sphericalangle c + \sphericalangle x$. Fassen wir die Strecke ab als die Mafseinheit auf, so ist

$$af = ad - fd = \cos(c+x).$$

Da be ein Perpendikel auf ae ist, so ist

$$ae = \cos x \text{ und } be = \sin x.$$

Da $dg \perp ad$ steht, so ist $\sphericalangle beg = \sphericalangle c$ und in dem Parallelogramm $fdbg$ ist $bg = fd$. Schreiben wir

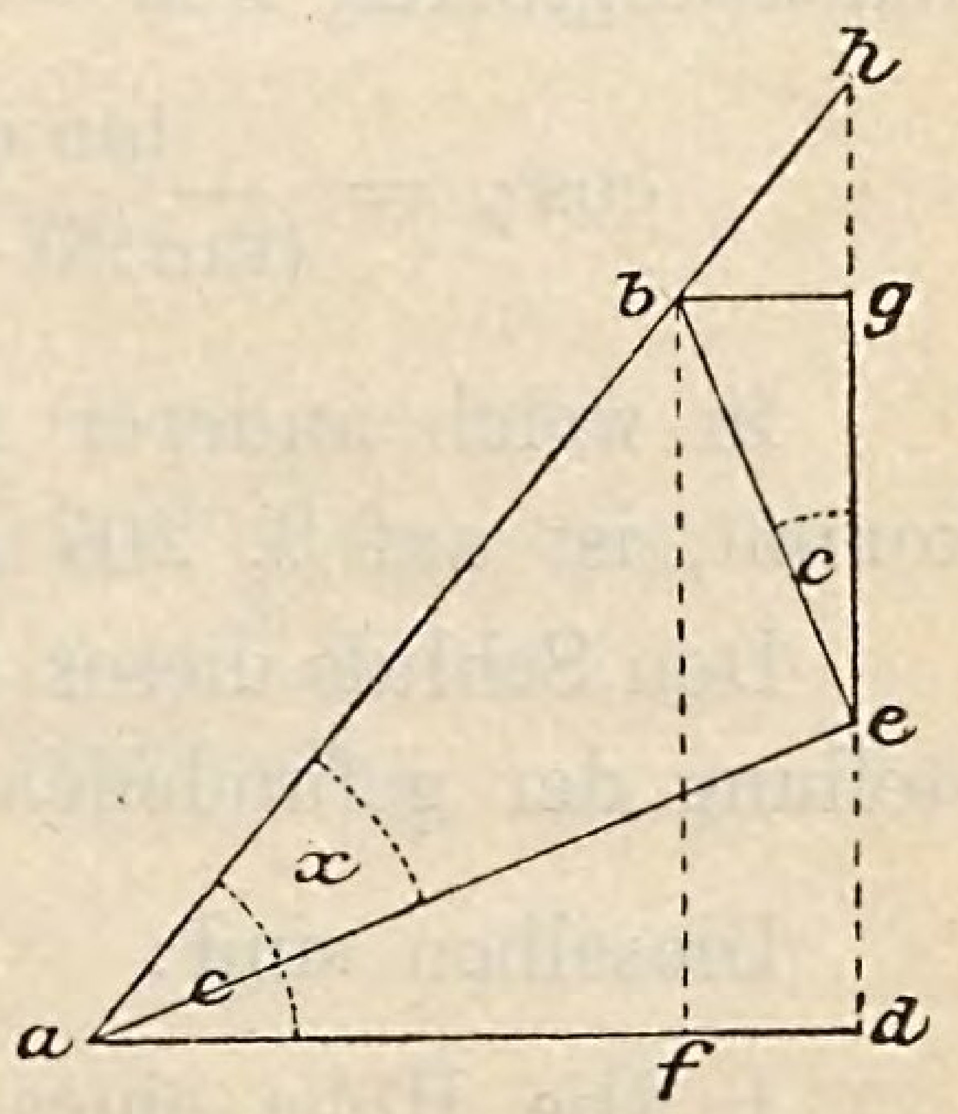


Fig. 143.

$$\cos(c+x) = ad - fd,$$

so können wir für ad, da ae gleich $\cos x$ ist, setzen $\cos x \cos c$ und für $df = bg$, da be mit $\sin x$ übereinstimmt, $\sin x \sin c$. Mithin ist

$$\cos(c+x) = \cos c \cos x - \sin c \sin x.$$

Nach S. 37 ist $\cos 90^0 = o$ und $\sin 90 = 1$; es ist dann

$$\cos(90 + \zeta) = o \cdot \cos\zeta - 1 \cdot \sin\zeta = o - \sin\zeta.$$

Die Gleichung

$$\tan\varphi = -\cos(90 + \zeta)\cot d$$

geht somit über in die Gleichung

$$\tan\varphi = -(o - \sin\zeta)\cdot\cot d = \sin\zeta\cot d.$$

Tabelle XXII enthält die Lichtklimate für einen Zuwachs von einer Stunde, welcher sich auf vormittag und nachmittag verteilt; $\zeta = {}^1\!/_2{}^{\text{h}} = 7\,{}^1\!/_2{}^0$.

So mannigfache Anwendung die Kosinusregel in diesem Kapitel gefunden hat, für die Bestimmung der Morgen- und Abendweite ist sie nicht tauglich. Beide gewinnen wir aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ORM (Fig. 169), wie auch für den Aufgang der Sonne ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, nämlich MNP, verwendbar ist. Im Dreieck ORM ist OM die Morgenweite w, der Bogen $MR = AK = d$, der Winkel $MOR = \sphericalangle SOA = 90 - \varphi$ entspricht der Äquatorhöhe. Alsdann ist nach S. 50 oder 51

$$\sin w = \frac{\sin d}{\sin(90 - \varphi)} = \frac{\sin d}{\cos\varphi} = \sin d \sec\varphi.$$

Das rechtwinklige sphärische Dreieck PNM enthält den Stundenwinkel γ, welcher die Zeit, die von Mitternacht bis Sonnenaufgang vergeht, angibt. NP ist gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes, $PM = PR - MR = 90 - d$. Dann ist nach S. 50

$$\cos\gamma = \frac{\tan\varphi}{(\tan 90 - d)} = \tan\varphi\cdot\frac{1}{\cot d} = \tan\varphi\tan d.$$

In welch anderer Art man gleichfalls auf den Sonnenaufgang kommt, ist auf S. 207 erwähnt.

Den Schluſs dieses umfangreichen Kapitels möge die Zusammenstellung der gefundenen Resultate bilden.

Dieselben sind:

1. Die Höhe eines Gestirnes

$$\sin h = \sin\varphi\sin d + \cos\varphi\cos d\cos\delta;$$

2. Stundenwinkel

$$\cos\delta = \frac{\sin h - \sin\varphi\sin d}{\cos\varphi\cos d}.$$

3. Tageslänge ohne Dämmerung

a) im Sommer

$$\cos\delta = -\tan\varphi\tan d$$

b) im Winter

$$\cos\delta = \tan\varphi\tan d.$$

4. Tageslänge mit Dämmerung

a) in den Äquinoktien

$$\cos\delta' = -\sin h\sec\varphi$$

b) im Sommer

$$\cos\delta' = -\frac{\sin\varphi\sin d + \sin h}{\cos\varphi\cos d}$$

c) im Winter

$$\cos\delta' = \frac{\sin\varphi\sin d - \sin h}{\cos\varphi\cos d}.$$

5. Die Länge des Tages in Zeit

a) im Sommer

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3}(180 - \delta)$$

b) im Winter

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3}\,\delta.$$

6. Die Dauer der Dämmerung in Zeit

a) in den Äquinoktien

$$D = \frac{0{,}2}{3}(90 - \delta')$$

b) im Sommer

$$D = \frac{0{,}2}{3}(\delta - \delta')$$

c) im Winter

$$D = \frac{0{,}2}{3}[180 - (\delta + \delta')] = \frac{0{,}2}{3}(t - \delta').$$

7. Höhe der oberen Kulmination eines Gestirnes

$$h = 90 + d - \varphi.$$

8. Geographische Breite eines Ortes

$$\varphi = 90 + d - h.$$

9. Äquatorhöhe $a = \frac{1}{2}(h + h').$

10. Ekliptikschiefe $\varepsilon = \frac{1}{2}(h - h').$

11. Deklination eines Gestirnes

$$d = h + \varphi - 90.$$

12. Gleichung für die Bestimmung der Lichtklimate

$$\tan \varphi = \sin \zeta \cot d.$$

13. Abend- oder Morgenweite

$$\sin w = \sin d \sec \varphi.$$

14. Sonnenaufgang

a) im Sommer $\cos \gamma = \tan \varphi \tan d$

b) im Winter $\cos \gamma = - \tan \varphi \tan d.$

Angewandte Beispiele zu den im vorigen Kapitel dargelegten Gleichungen.

Der Beobachtungsort sei München. Dessen geographische Breite ist $48^0\, 8'\, 20''$.

1. Aufgabe.

Wie grofs ist die Höhe der Sonne am 21. Juni um 11 ½ Uhr vormittags oder 12 ½ Uhr nachmittags, da der Stundenwinkel $\frac{1}{2}^h = 7\frac{1}{2}^0$ und die Deklination der Sonne $23^0\, 27'\, 30''$ beträgt?

$$\text{a) } \sin h = \underbrace{\sin 48^0\, 8'\, 20'' \sin 23^0\, 27'\, 30''}_{x} +$$

$$\underbrace{\cos 48^0\, 8'\, 20'' \cos 23^0\, 27'\, 30'' \cos 7^0\, 30'}_{y}$$

Der numerische Wert von x ist 0,29648 und der von y ist 0,60695, also

$$\sin h = x + y = 0{,}90343 = 64^0\, 36'\, 40''.$$

Die mittägige Höhe an diesem Tage ist

$$\text{b) } h = 90 + d - \varphi = 113^0 27' 30'' - 48^0 8' 20'' = 65^0 19' 10''.$$

2. Aufgabe.

Welchen Winkel schliefst der Deklinationskreis mit dem Ortsmeridian an diesem Tage ein, sobald die Sonne 40 Grade über dem Horizont von München steht?

$$\cos \delta = \frac{\sin 40^0 - \sin 48^0\, 8'\, 20'' \cdot \sin 23^0\, 27'\, 30''}{\cos 48^0\, 8'\, 20' \cos 23^0\, 27'\, 30''}$$

$$= \frac{0{,}64279 - 0{,}29648}{0{,}61218} = 55^0\, 33'.$$

Der Stundenwinkel beträgt in Zeit $3^h\, 42^{min}$, so dafs die Sonne diese Höhe eine Viertelstunde über 8 Uhr vormittags oder nachmittags eine Viertelstunde vor 4 Uhr inne hat.

3. Aufgabe.

Die Tageslänge und die Dauer der Dämmerung seien für die Tage 21. Juni und 21. Dezember, 21. März und 22. September, ferner für den 21. Mai und den 18. Oktober zu bestimmen?

A. Tageslänge und Dauer der Dämmerung am 21. Juni.

a) $\cos\delta = -\tan 48^0\,8'\,20'' \cdot \tan 23^0\,27'\,30'' = -61^0\,2'$

b) $\cos\delta' = -\dfrac{\sin 18^0 + \sin 48^0\,8'\,20''\,\sin 23^0\,27'\,30''}{\cos 48^0\,8'\,20''\,\cos 23^0\,27'\,30''}$

$= -\dfrac{0{,}30902 + 0{,}29648}{0{,}61218} = -8^0\,28'.$

Nach S. 217 ist

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3} \cdot (180 - 61{,}03) = 15^h\,51^{min}\,45^s\,{}^{*)}.$$

Sonnenaufgang 4 Uhr; Sonnenuntergang 8 Uhr.

$$D = \frac{0{,}2}{3}\,(61{,}03 - 8{,}467) = 3^h\,30^{min}.$$

B. Tageslänge und Dauer der Dämmerung am 21. Dezember.

a) $\cos\delta = \tan 48^0\,8'\,20'' \cdot \tan 23^0\,27'\,30'' = 61^0\,2'$

b) $\cos\delta' = \dfrac{0{,}29648 - 0{,}30902}{0{,}61218} = -88^0\,49'\,34''$

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3} \cdot 61{,}03 = 8^h\,8^{min}\,14^s.$$

Sonnenaufgang $7^h\;52^{min}$; Sonnenuntergang $4^h\;8^{min}$

$$D = \frac{0{,}2}{3}\,[180 - (88{,}825 + 61{,}033)] = 2^h\,0^{min}\,34^s.$$

C. Tageslänge und Dauer der Dämmerung am 21. März und 22. September; $d = o$.

a) $\cos\delta = \pm\,o;\quad \delta = 90^0$

b) $\cos\delta' = -\sin 18^0 \cdot \sec 48^0\,8'\,20'' = -62^0\,25'$

$\delta' = 117^0\,35'$

$$2\,T = 90 \cdot \frac{0{,}4}{3} = 12^h.$$

Sonnenaufgang $5^h\,56^{min}$; Sonnenuntergang $6^h\,4^{min}$

$$D = \frac{0{,}2}{3}\,(90 - 62{,}4167) = 1^h\,50^{min}\,20^s.$$

*) Nach Seite 208 sind der Tageslänge 8^{min} hinzuzuaddieren.

D. Tageslänge und Dauer der Dämmerung am 21. Mai; $d = 20^0$.

$$\text{a) } \cos\delta = -\tan 48^0\,8'\,20'' \cdot \tan 20^0 = -66^0\,2'$$

$$\text{b) } \cos\delta' = -\frac{0{,}30902 + 0{,}25473}{0{,}6271} = -25^0\,58'\,20''$$

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3} \cdot (180 - 66{,}03) = 15^{\text{h}}\,11^{\text{min}}\,45^{\text{s}}.$$

Sonnenaufgang $4^{\text{h}}\,20^{\text{min}}\,8^{\text{s}}$; Sonnenuntergang $7^{\text{h}}\,39^{\text{min}}\,52^{\text{s}}$

$$D = \frac{0{,}2}{3}\,(66{,}03 - 25{,}972) = 2^{\text{h}}\,40^{\text{min}}\,14^{\text{s}}.$$

E. Tageslänge und Dauer der Dämmerung am 18. Oktober; $d = -9^0$.

$$\text{a) } \cos\delta = \tan 48^0\,8'\,20'' \cdot \tan 9 = 79^0\,49'\,20''$$

$$\text{b) } \cos\delta' = \frac{0{,}1165 - 0{,}30902}{0{,}65912} = -73^0\,1'$$

$$2\,T = \frac{0{,}4}{3} \cdot 79{,}822 = 10^{\text{h}}\,38^{\text{min}}\,34^{\text{s}}.$$

Sonnenaufgang $6^{\text{h}}\,36^{\text{min}}\,43^{\text{s}}$; Sonnenuntergang $5^{\text{h}}\,23^{\text{min}}\,17^{\text{s}}$

$$D = \frac{0{,}2}{3} \cdot [180 - (79{,}822 + 73{,}001)] = 1^{\text{h}}\,48^{\text{min}}\,42^{\text{s}}$$

4. Aufgabe.

Es ist die Morgen- und Abendweite für den 21. Juni zu berechnen! Nach der Gleichung

$$\sin w = \sin 23^0\,27'\,30'' \cdot \sec 48^0\,8'\,20'' = 36^0\,37'\,20''$$

ergibt sich für die Morgenweite wie auch für die Abendweite der Bogen von $36^0\,37'\,20''$.

5. Aufgabe.

Wann geht am 21. Juni die Sonne auf?

$$\cos\gamma = \tan 48^0\,8'\,20'' \cdot \tan 23^0\,27'\,30'' = 61^0\,2'$$

$$T = \frac{0{,}2}{3} \cdot 61{,}03 = 4^{\text{h}}\,4^{\text{min}}.$$

Somit findet der Sonnenaufgang (12 Uhr nachts $+ 4^{\text{h}}$) = morgens 4 Uhr statt. Denn von $4^{\text{h}}\,4^{\text{min}}$ kommen nach S. 208 4^{min} in Abzug.

6. Aufgabe.

Unter welchem Parallel nimmt der halbe Tag im Sommersolstitium um $1^h\,30^{min} = 22^0\,30'$ im Bogen zu?

Die Gleichung

$$\tan\varphi = \sin 22^0\,30' \cot 23^0\,27'\,30'' = 41^0\,24'\,30''$$

verweist auf den Parallel von

$$41^0\,24'\,30''.$$

Die Wärmezonen der Erde. Das mathematische Klima.

Durch die Wende- und Polarkreise wird die Erde in fünf Gürtel geteilt.

Die heifse Zone ist der Erdgürtel, welcher zwischen den beiden Wendekreisen liegt und dessen Mitte der Äquator bildet. An allen zwischen den Wendekreisen befindlichen Orten geht die Sonne zweimal durch das Zenit.

Die nördliche gemäfsigte Zone ist der Raum zwischen dem Wendekreis des Krebses und dem nördlichen oder arktischen Polarkreis, die südliche gemäfsigte Zone liegt zwischen dem Wendekreis des Steinbocks und dem südlichen oder antarktischen Polarkreis.

Die nördliche und südliche kalte Zone sind die von den Polarkreisen umschlossenen Flächenräume, deren sphärische Mittelpunkte die Pole sind.

Aufserhalb der Wendekreise erreicht die Sonne nie mehr das Zenit der aufsertropischen Bewohner, ihre Strahlen fallen zum Horizont nur in einem schiefen Winkel auf, der um so schiefer oder spitziger wird, je mehr man sich den Polen nähert. In der heifsen Zone, da die Strahlen senkrecht oder nahezu senkrecht auffallen, wird die höchste Wärme erzeugt, in den Polargegenden, da die Bestrahlung in sehr spitzen Winkeln erfolgt, ist die Wärmeentwicklung kaum spürbar, der Winter führt dortselbst ungestört das härteste Regiment.

So hängen die Temperaturverhältnisse von der Entfernung eines Ortes vom Äquator auf der Erde ab. Da dieselben mathematisch fixierbar sind, so gibt man ihnen die Benennung mathematisches Klima.

Nach Figur 171 ist HZ der Horizont von O und $H'Z' = HZ$ der von b. Für O steht die mittägige Sonne in Z, für b in S, aber

nicht in Z'. Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen ist bei b nicht 90^0, sondern $90^0 - \varphi^0$. Der Strahlenbündel $Z_1 Z_2$, welchen der Horizont von O erhält, ist breiter als $S_1 S_2$, der des Horizontes von b. Errichtet man auf $H' S_1$ die Senkrechte $h Z'$, so verkürzt sich die schiefe

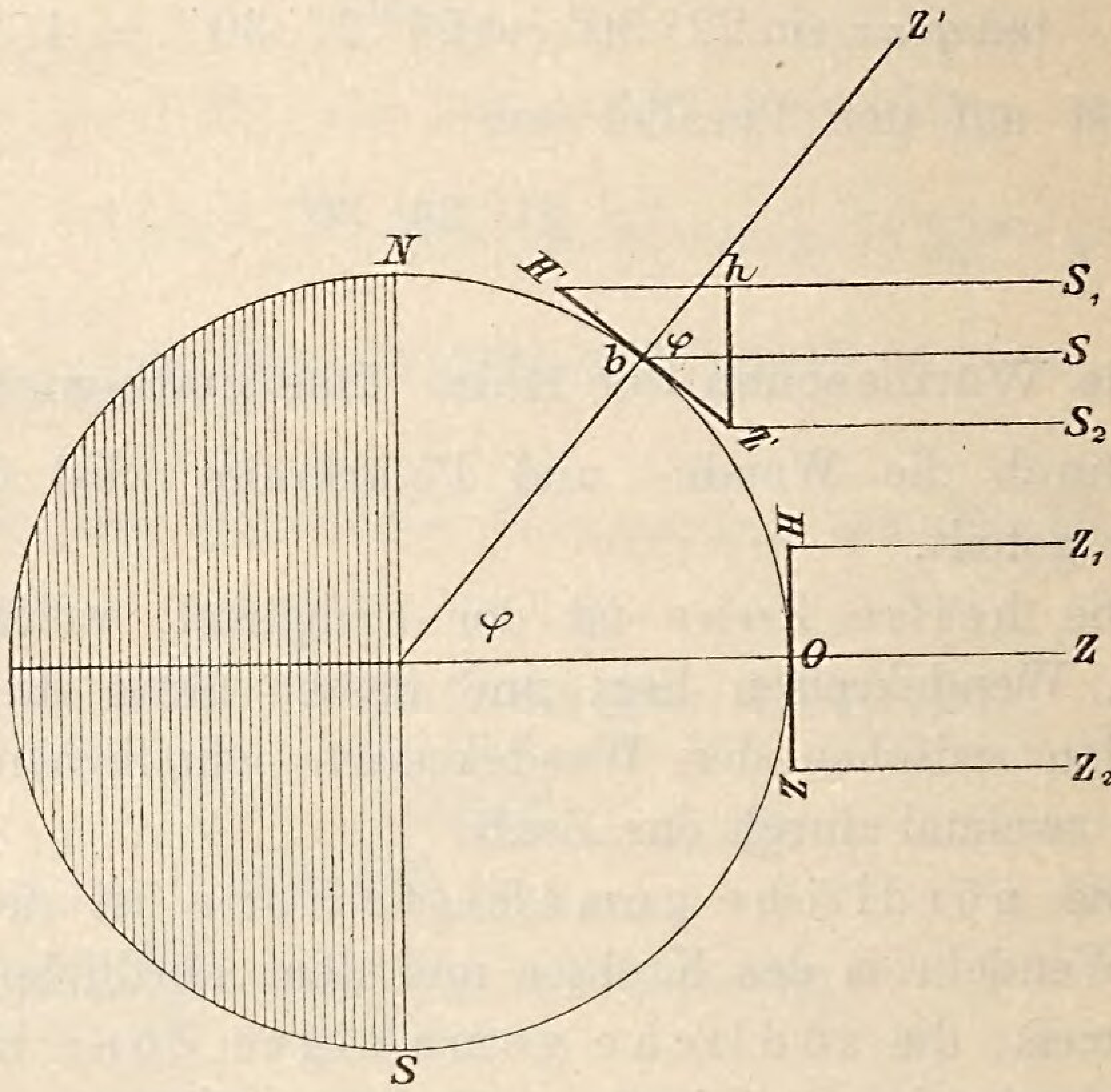


Fig. 171.

Erwärmungsfläche $H' Z'$ in die Senkrechte $h Z'$, die nimmermehr die selbige Anzahl von Sonnenstrahlen in sich aufnehmen kann als die senkrechte Fläche HZ. In dem Dreieck $H'Z'h$ ist der Winkel $H'Z'h$, da $hZ' \perp Sb$ und $H'Z' \perp Z'b$, gleich φ, d. i. der geographischen Breite des Ortes b. Dann ist

$$hZ' = H'Z' \cdot \cos\varphi.$$

Da aber $H'Z' = HZ$ ist und die senkrechte Erwärmungsfläche als Einheit aufgefafst werden kann, so ist

$$hZ' = \cos\varphi,$$

woraus hervorgeht, dafs das mathematische Klima sich im Frühling und Herbst nach dem Verhältnis $1 : \cos\varphi$; im Sommer nach dem $1 : \cos(\varphi - \varepsilon)$ und im Winter nach dem $1 : \cos(\varphi + \varepsilon)$ bestimmen läfst. Nach diesen Verhältnissen ist die Tabelle XXIII zusammengestellt.

Dabei ist zu bemerken, dafs das örtliche Klima nicht immer dem mathematischen entspricht, indem dasselbe nicht nur von der geographischen Breite abhängig ist, sondern auch von der Seehöhe, den vorherrschenden Winden, von der Menge und der Verteilung

der feuchten Niederschläge, von der Lage eines Ortes im Binnenlande oder am Meer, an der Ost- oder Westküste eines Kontinentes. So hat New-York in gleicher Breite wie Neapel einen Sommer wie Rom und einen Winter wie Kopenhagen, zu Quebeck (50^0) ist ein Pariser Sommer und ein Petersburger Winter und in Peking (40^0) wird der Sommer heifser als in Kairo (30^0) und der Winter strenger als in Upsala (60^0). Die Isothermen oder die Linien gleicher mittlerer Jahreswärme weichen darum von den Parallelkreisen, zumal in der nördlich gemäfsigten Zone, bedeutend ab.

Der Mond.

Auf ihrem Weg um die Sonne wird die Erde von dem Monde — ihrem Trabanten oder Satelliten — begleitet. Derselbe ist, da keine Brechung der Sonnenstrahlen, die einen Dunstkreis voraussetzen, sich auf seiner Oberfläche wahrnehmen läfst, luft-, laut- und wasserlos. Ringgebirge, Berge, Thäler und Ebenen (Meere) geben ihm, dem ausgetrockneten Himmelskörper, ein eigenartiges Aussehen. An und für sich ist er dunkel und erhält wie die Erde sein Licht von der Sonne. Der Mond ist nach S. 234 13⅓ mal kleiner als die Erde, aber nicht 13⅓, sondern erst 79⅔ Mondkugeln halten der Erde das Gleichgewicht, so ist seine Masse nur $\frac{1}{79,66} = 0,012$ der Erdmasse gleich. Demnach besitzt der Mond eine geringere Dichtigkeit als die Erde, nämlich nur 0,563 derselben. Je nach der Stellung zur Erde und der Sonne während seines Umlaufes zeigt er sich in verschiedenen Lichtgestalten oder Phasen. Nehmen wir zur Erklärung derselben vorläufig seine Bahn als kreisförmig an. Nach Figur 172 bedeutet *S* die Sonne, *E* die vom Mond umkreiste Erde, der Kreis die Mondbahn und *NM*, *EV*, *VM*, *LV* die Hauptstationen derselben. Beginnt der Mond seinen Weg von *NM* aus, so steht er in diesem Moment gerade zwischen der Sonne und der Erde oder er befindet sich, astronomisch gesprochen, in der Konjunktion (☌). Die erleuchtete Seite kehrt er von uns ab. Es ist Neumond. Derselbe tritt mit der Sonne zu gleicher Zeit in unsern Horizont. Nach 7 Tagen hat der Mond ein Viertel seiner Bahn durchlaufen, 90^0 ist er von der Sonne abseits, wenn sie bereits im Mittag steht, taucht er erst über den Horizont herauf. Dabei läfst er in Form einer Sichel einen Teil seiner erleuchteten Seite sehen; er ist im Lichte zunehmend, in *EV* erreicht er sein erstes Viertel. In 14 Tagen nach Beginn

seiner Wanderschaft steht er der Erde und Sonne wieder gegenüber, doch so, dafs nicht er, sondern die Erde die Ehre hat in der Mitte der drei Himmelskörper zu verweilen. Und wenn die Sonne uns

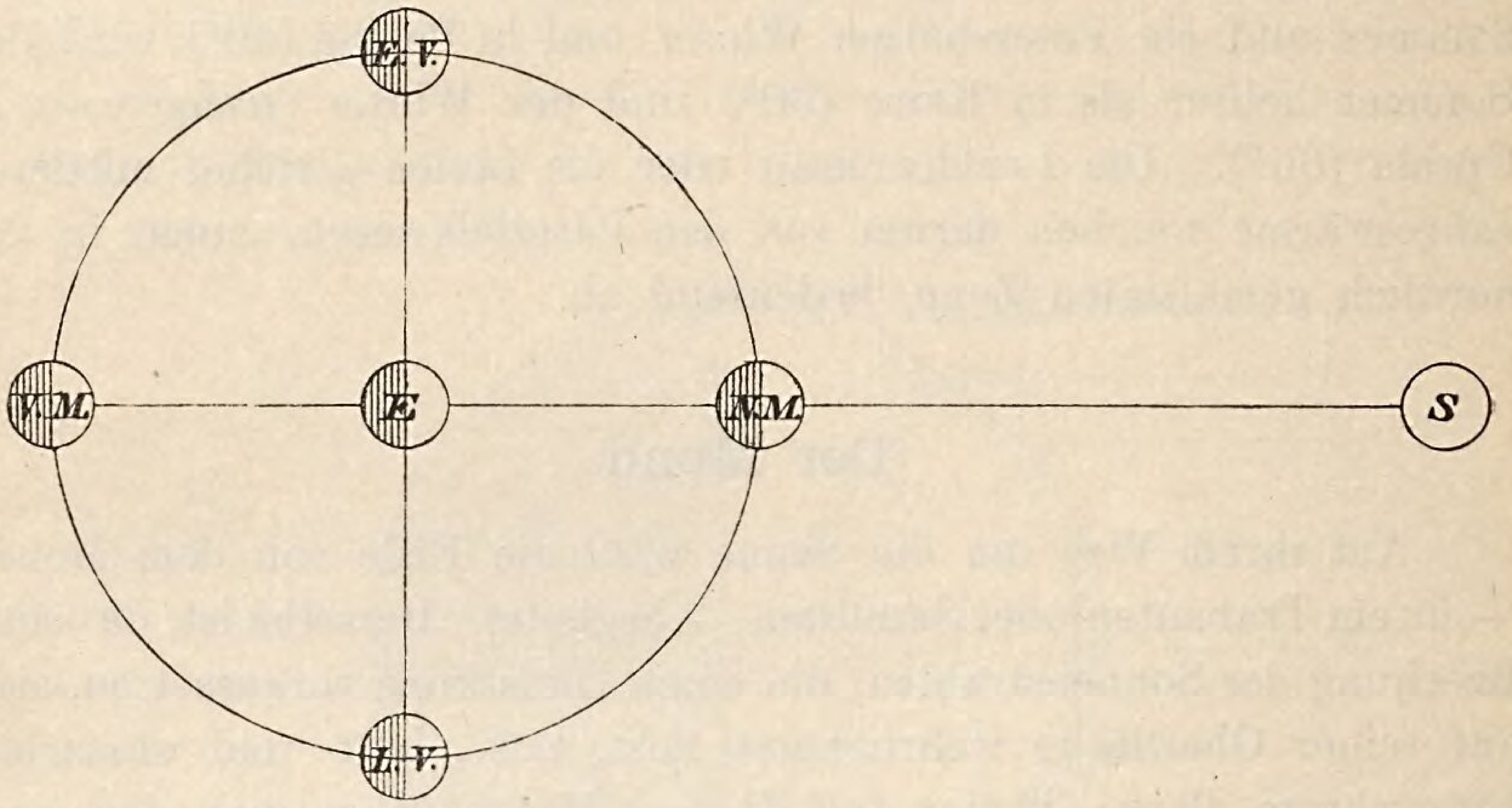


Fig. 172.

verläfst, steigt im Osten die silberhelle Mondscheibe herauf, um die Nacht mit ihrem mild schimmernden Lichte zu erhellen. Das ist die Stellung in der Opposition (☍). Aber schon nach 7 Tagen hat der Mond dieselbe aufgegeben, erst um Mitternacht, wenn alles schläft, kommt er am Himmel empor, nicht mehr als volle runde Scheibe, sondern als Sichel, deren Hörner nach Westen gerichtet sind, und sein Abnehmen andeuten, er befindet sich im letzten Viertel *LV.* Nach einem Weg von $27^{d}\ 7^{h}\ 43^{min}\ 11{,}5^{s}$ hat er den Glanz seines Lichtes beinahe verloren und den Umlauf um die Erde vollendet. Aber noch hat er die Konjunktion nicht erreicht. Denn während seiner Wanderschaft hat auch scheinbar die Sonne ihren Platz geändert, so dafs sich der Mond über einen vollen Winkel oder 360^{0} weiter fortzubewegen hat, um die Sonne einzuholen und um mit ihr und der Erde in eine gerade Verbindung oder wieder in Konjunktion zu treten. Hierzu bedarf er $29^{d}\ 12^{h}\ 44^{min}\ 2{,}9^{s}$. Die erste Umlaufszeit des Mondes führt den Namen siderischer Monat und die zweite desselben synodischer Monat. Das Mittel beträgt annähernd $28^{d}\ 10{,}5^{h}$. Die beiden Stellungen, Opposition und Konjunktion, begreift man in das eine Wort: Syzygien und die Stellungen erstes und letztes Viertel in das Wort: Quadraturen, da bei denselben der Mond zu der Erde und Sonne in einem rechten Winkel sich befindet.

Die Achsendrehung des Mondes.

Das Märchen vom Mann im Mond ist allbekannt. Diese Figur bleibt und weicht nicht. Und wenn uns auch die Astronomen dieselbe in Berge und Thäler, in Ringgebirge und Ebenen durch ihre Fernrohre aufzulösen im Stande sind, so bleiben doch dieselben Umrisse und damit die gleiche Gestalt. Hieraus müssen wir entnehmen, dafs uns der Mond immer ein und dieselbe Seite zukehrt. Anderes hat die Astronomie auch noch nicht herausgefunden; aber dennoch lehrt sie, dafs der Mond während seiner Revolution auch rotiert. Wie geht dies zu; ein und dieselbe Seite immer und immer nur sehen zu können und dennoch ist eine Drehung um sich selbst mit inbegriffen. Die Zeichnung wird uns das Verständnis eröffnen helfen. Nach Figur 173 deute *m* diesen märchenhaften Mann im Mond an. In der Stellung *0* befindet sich *m* im Mittelpunkt der halben Mondoberfläche, welche der Erde gegenübersteht. In Stellung *I* angelangt, sieht man *m* gleichfalls in dem Zentrum dieser Mondfläche. Wäre keine Bewegung um die Achse erfolgt, so müfste *m* sich an der Stelle von Null befinden, nicht bei *m*. So aber *m* der Erde auch hier gegenübersteht, mufs sich *m* um den Winkel, der dem Bogen *om* entspricht, gedreht haben. In den übrigen Stellungen ist selbstverständlich das gleiche anzunehmen, so dafs in der *VI.* Stellung eine volle Umdrehung oder eine Achsendrehung stattgefunden hat. Schreitet der Mond nach dem Dargelegten einen Grad auf seiner Bahn vorwärts, so bewirkt er eine $^1/_{360}$ Drehung, bei seiner Revolution sohin eine volle Umdrehung. Einen sinnlichen Beweis hierfür zu erbringen, ist nicht schwer. Man stelle auf einen Tisch, der umgangen werden kann, irgend einen Gegenstand. Ihm wende man die rechte Schulter zu. Parallel zu sich selbst, schreite

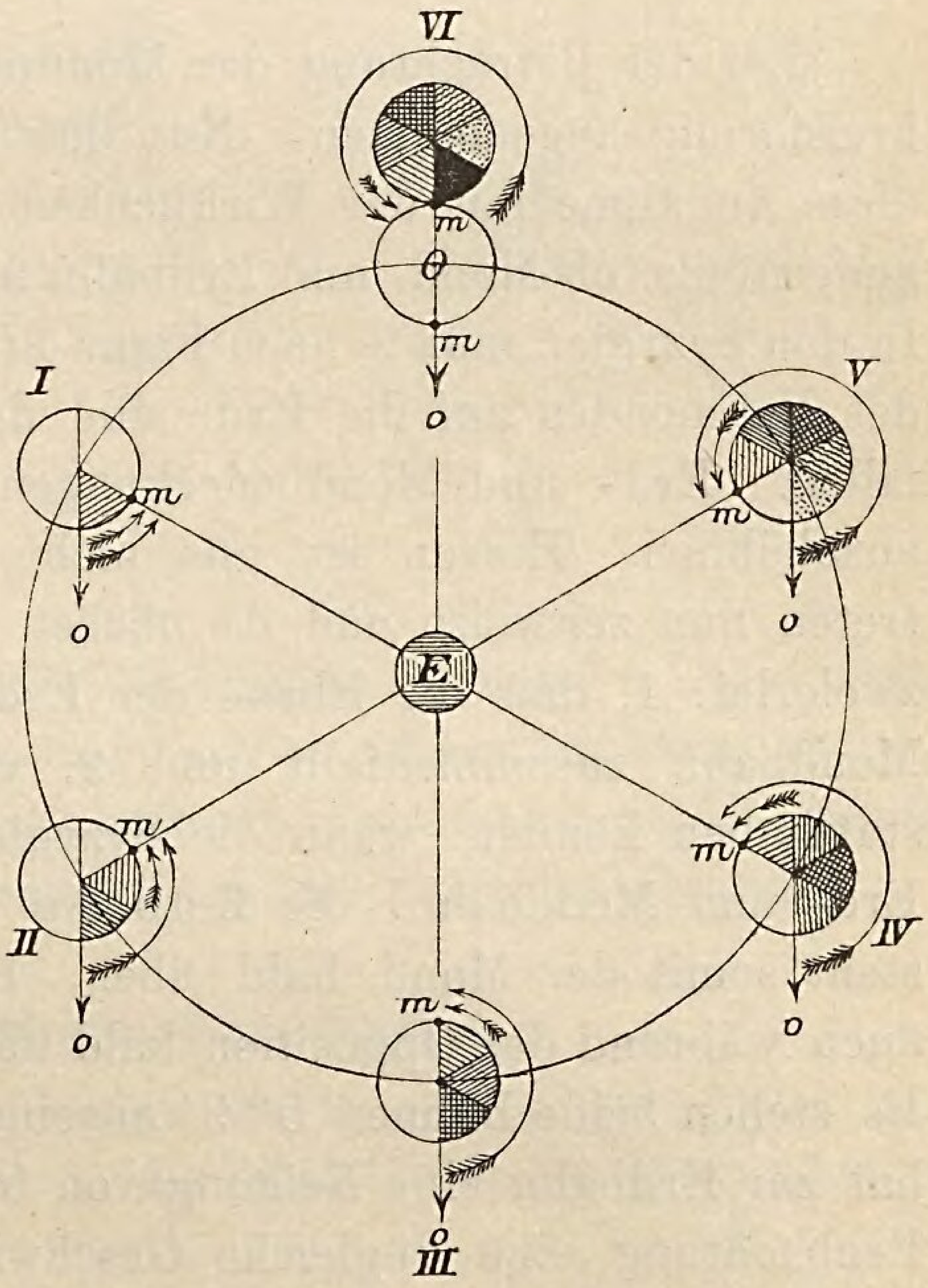


Fig. 173.

man, indem man den Gegenstand als Mittelpunkt seiner Kreisbewegung im Auge behält, vorwärts. Alsbald wird man gewahren, dafs die rechte Schulter dem Gegenstand ab- und nicht mehr zugekehrt ist. Es mufs somit eine Schwenkung eintreten, wenn die direkte Linie zwischen dem Mittelpunkt des im Auge zu behaltenden Gegenstandes und der rechten Schulter erhalten bleiben soll. Diese Schwenkung nimmt fortwährend zu und wird schliefslich, wie Figur 173 in der *VI.* Stellung andeutet, zu einer vollen oder Achsenumdrehung. Was daher die Erde in einem Tag leistet, hiezu bedarf der Mond 28 Tage.

Die Bahn des Mondes.

Bei der Betrachtung der Mondphasen wurde die Mondbahn als kreisförmig angenommen. Nun handelt sich's einerseits darum, ob diese Annahme mit der Wirklichkeit in Einklang zu bringen ist und andernteils, ob Mond- und Erdbahn in eine Ebene zu liegen kommen. In den Syzygien müfste nach Figur 172 S. 224 jederzeit der Schatten des Neumondes auf die Erde und der der Erde auf den Vollmond fallen. Erd- und Mondbedeckungen wären Monat für Monat unausbleiblich. Hievon ist uns nichts bekannt, die Verfinsterungen treten nur zeitweise und da höchst selten ein. Hieraus resultiert zweierlei: 1. dafs die Ebene der Erdbahn nicht mit der Ebene der Mondbahn zusammenfällt und 2. die Verfinsterungen nur dann statthaben können, wenn die Syzygien mit den Schnittpunkten der Erd- und Mondbahn, die K n o t e n heifsen, zusammentreffen. Es steht somit der Mond bald über, bald unter der Erdbahn, also auch während der Opposition bald über bald unter dem Erdschatten. Es stehen beide Bahnen $5^0\,9'$ auseinander oder aber, die Mondbahn hat zur Erdbahn eine Neigung von $5^0\,9'$. Indem ferner die genaue Beobachtung eine ungleiche Geschwindigkeit für den Mondumlauf herausgefunden hat, so kann dieser Umlauf nicht kreisförmig, sondern mufs wie die Erdbahn elliptisch sein. Das ist nun auch der Fall und so hat der Mond seine Erdnähe und Erdferne oder sein P e r i g ä u m und A p o g ä u m, wie die Erde ihre Sonnennähe und Sonnenferne. Von der Sonne aus gesehen löst sich die Ellipse in eine an die Erdbahn flach anschmiegende Schlangenlinie auf. Durch die Anziehung, welche der Mond von der Erde und Sonne in den verschiedenen Stellungen, namentlich in der Erdferne und Erdnähe, in der Konjunktion und Opposition, zu erfahren hat, erleidet der

regelmäſsige Gang des Mondes mancherlei Störungen, die den astronomischen Berechnungen groſse Schwierigkeiten bereiten.

Figur 174 gibt die Mond- und Erdbahn für die Zeit eines Monats und Figur 175 stellt die Achsendrehung während einer

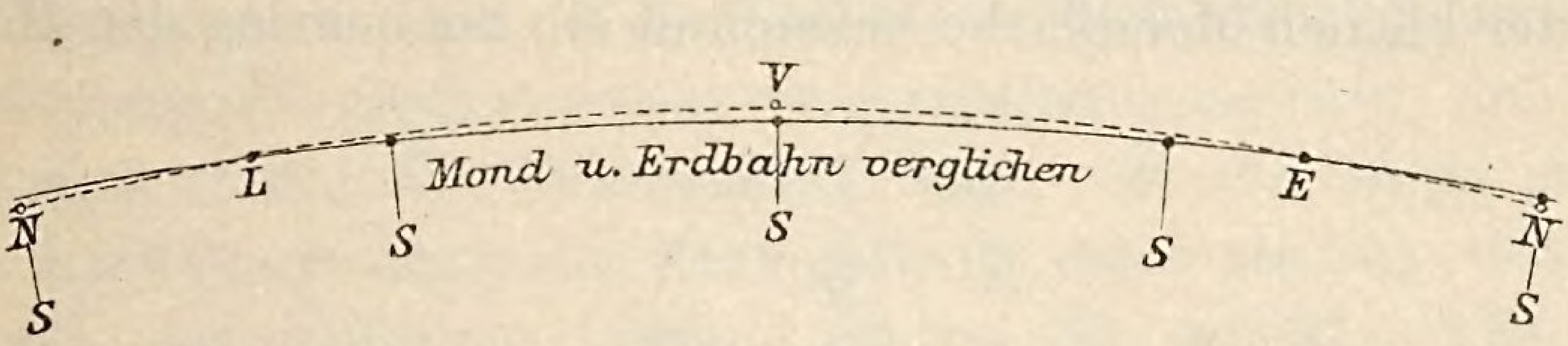


Fig. 174.

solchen Strecke in Bezug auf die rotierende Erde vor. Die Geraden deuten auf den Stand der Sonne hin. Indem aber die von

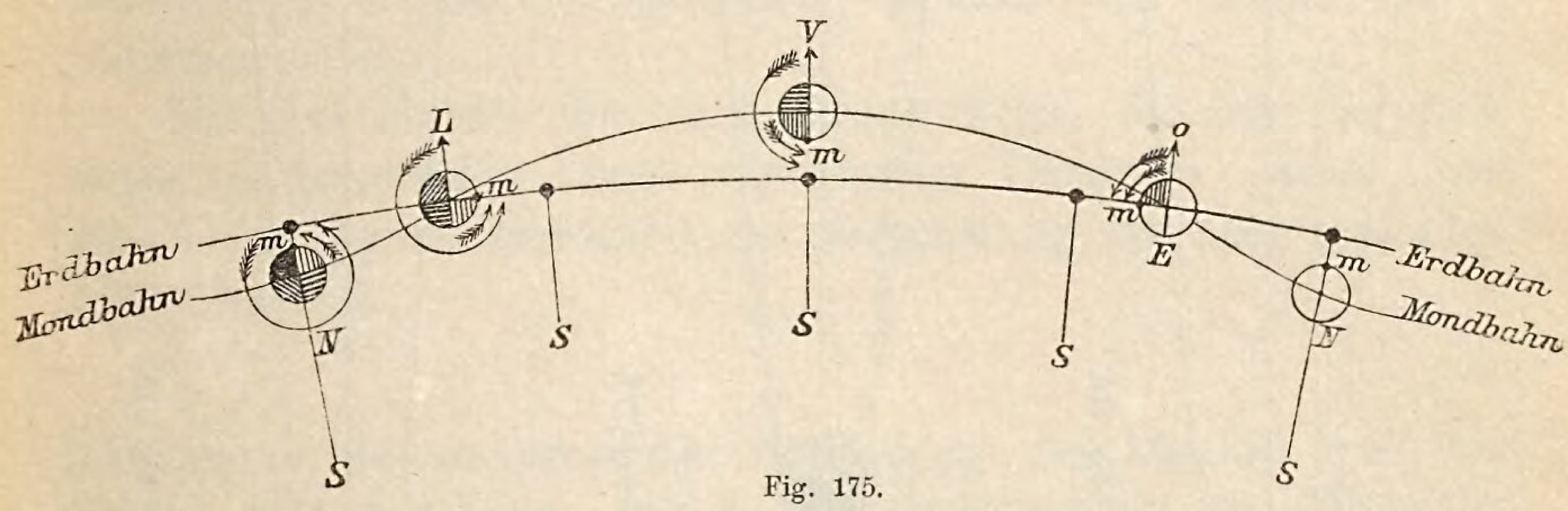


Fig. 175.

der Erde zum Mond gehenden Gesichtslinien während eines Monats ihre Richtung um volle 360^0 ändern, müssen alle scheinbaren Mondsörter am Himmel in einem gröſsten Kreise liegen und die Mondbahn muſs sich am Himmel notwendigerweise als Kreis projizieren.

Sonnen- und Mondfinsternisse.

Die Verfinsterungen können sich also nur in den Syzygien und auch da erst, wenn der Mond in die Nähe eines Knotens oder in ihm selbst weilt, ereignen.

Die Gröſse der Sonne bewirkt bei der Erde wie bei dem Monde einen fächerartigen Halb- und innerhalb desselben einen kegelförmigen Kernschatten.

Tritt zur Zeit der Konjuktion die Bedingung der Knotennähe ein, so steht der Neumond uns gerade vor der Sonne, so daſs er uns dieselbe teilweise verdeckt und unsere Erde, falls sein Schatten dieselbe erreicht, beschattet. Darnach unterscheidet man eine totale Sonnenfinsternis für die Orte zwischen ε und ζ (Fig. 176), auf welche der Kernschatten fällt, und eine partiale oder teil-

weise für Orte wie $\varkappa$, welche nur in den Halbschatten eingetaucht werden und von der Sonne noch das Stück βi sehen. Ringförmig wird die Sonnenfinsternis für die Orte, welche hinter dem Kegel des Schattens, ohne von ihm erreicht zu werden, liegen (Fig. 177). Über der kleinen Mondfläche beleuchtet ein Sonnenring den Horizont.

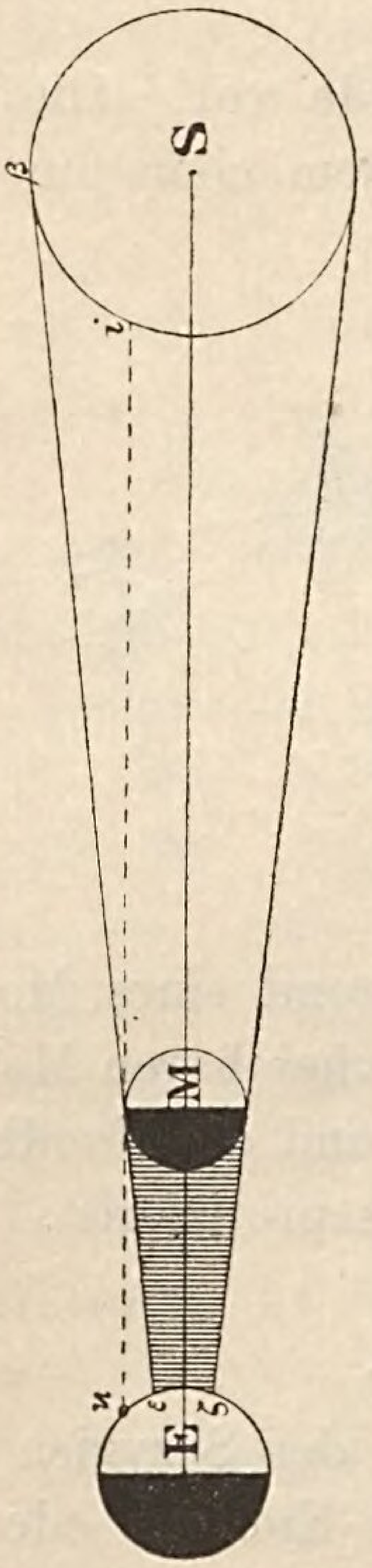


Fig. 176.

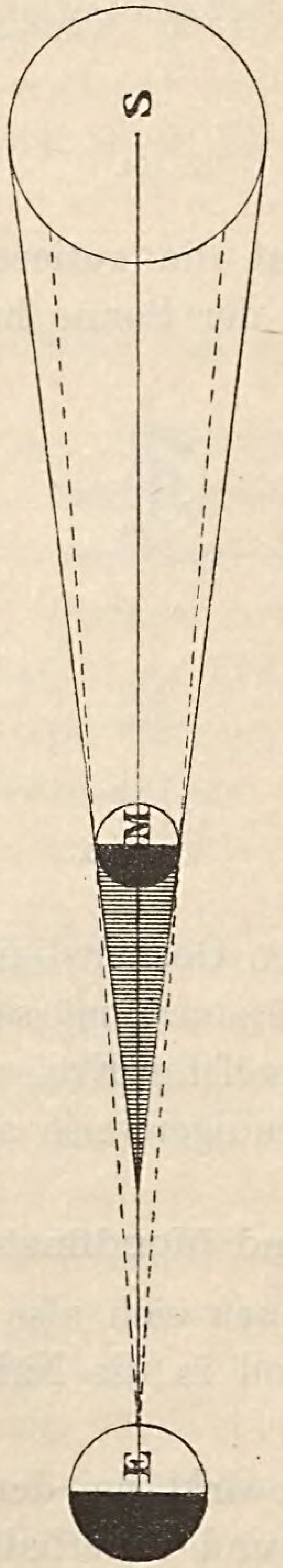


Fig. 177.

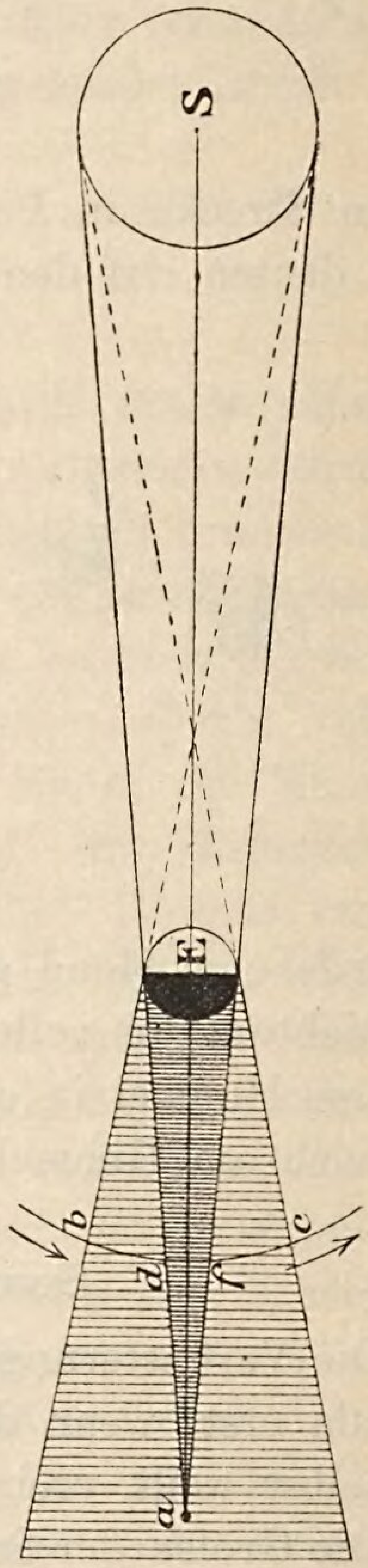


Fig. 178.

Zentralringförmig gestaltet sich eine Sonnenfinsternis, wenn der Mond die Mitte der Sonnenscheibe für einen Ort, der in der Schattenachse liegt, bedeckt und ein gleichmäfsig breiter Ring um den Mond leuchtend bleibt. Wegen der Kleinheit des Mondes sind die Schatten nicht grofs genug, dafs sie sich über die ganze Erde erstrecken können. Ebendeshalb ist eine Sonnenfinsternis nicht überall auf der Erde sichtbar.

Taucht hingegen der Vollmond zur Zeit der Knotennähe in den Erdschatten ein, so entsteht eine Mondfinsternis. Da aber die Erde gröſser als der Mond ist, so gibt es nur eine totale oder partiale Verfinsterung. Zuerst tritt der Mond (Fig. 178) in den Halbschatten *bd* ein, er hat partiale Verfinsterung; durchgeht er die Strecke *df*, alsdann totale und zugleich zentrale, auf welche wieder eine partiale Verfinsterung folgt. Ist der Mond nicht in seinem Knoten, so kann die Verfinsterung nicht zentral, wohl aber total sein, bei gröſserem Abstand ist sie nur partial. Allen Erdbewohnern, die zu selber Zeit den Mond über ihrem Horizont haben, ist die Mondfinsternis sichtbar. Der verfinsterte Mond zeigt sich graurot, der total verfinsterte rot; mannigfache Abänderung in der Erscheinung werden je nach dem Zustande der Erdatmosphäre wahrgenommen.

Mit dem Eintritt der Verfinsterung haben die Orte verschiedener geographischer Länge verschiedene Uhrzeiten, daher wird die Mondfinsternis gleichfalls zur Bestimmung der geographischen Länge benutzt.

Rechnende Bestimmung der Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde, ferner der Entfernungen der Fixsterne von der Sonne.

Nicht nur die Erde, sondern auch der Himmel soll gemessen werden, und daſs dies geschehen kann wurde schon auf S. 9 bei der Ähnlichkeit der Dreiecke angedeutet. Die Proportionalität der Dreiecksseiten bietet das Mittel in das weite, hohe Himmelsgewölbe hineinzumessen, und Strecken von uns zum Mond, zur Sonne und andern Himmelskörpern in Kilometern auszudrücken, wie Wegstrecken auf der Erde. Ja nicht genug, wir vermögen auch ihren Durchmesser und darnach ihre Oberfläche und ihren Körperinhalt anzugeben als wie von unserer Erde selbst. Wie geht dies zu? Also:

Es sei (Fig. 179) M solch ein entfernter Gegenstand. In C erblickt man ihn im Zenit z an seiner wahren Stelle. Von A, welcher Ort ebenso weit von C entfernt sein soll als B, in s und von B in s_1. So ist M von seinem wahren Ort z bald nach s bald nach s_1 verschoben worden und der Winkel sMs_1, welcher mittels eines Fernrohres an dem Bogen ss_1 gemessen werden kann, heiſst der Verschiebungs- oder parallaktische Winkel oder kurzweg die Parallaxe von M. Dieselbe bezeichnet sohin die Veränderung, welche

der scheinbare Ort eines Gegenstandes erleidet, wenn letzterer von zwei verschiedenen Beobachtungspunkten aus betrachtet wird.

Wenn z der wahre Ort ist, so bezeichnet s wie s_1 die scheinbaren Örter von M. Fällen wir von dem Zenitpunkt z eine Senkrechte auf AB, so gewinnen wir hierdurch zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke von welch jedem der rechte Winkel $ACM = BCM$ und der Winkel an der Spitze $AMC = BMC = \pi = {}^1\!/_2\,\sigma$, wie auch durch direkte Messung die Standlinien $AC = BC = \varkappa$ bekannt sind. Dann folgt nach der Sinusregel

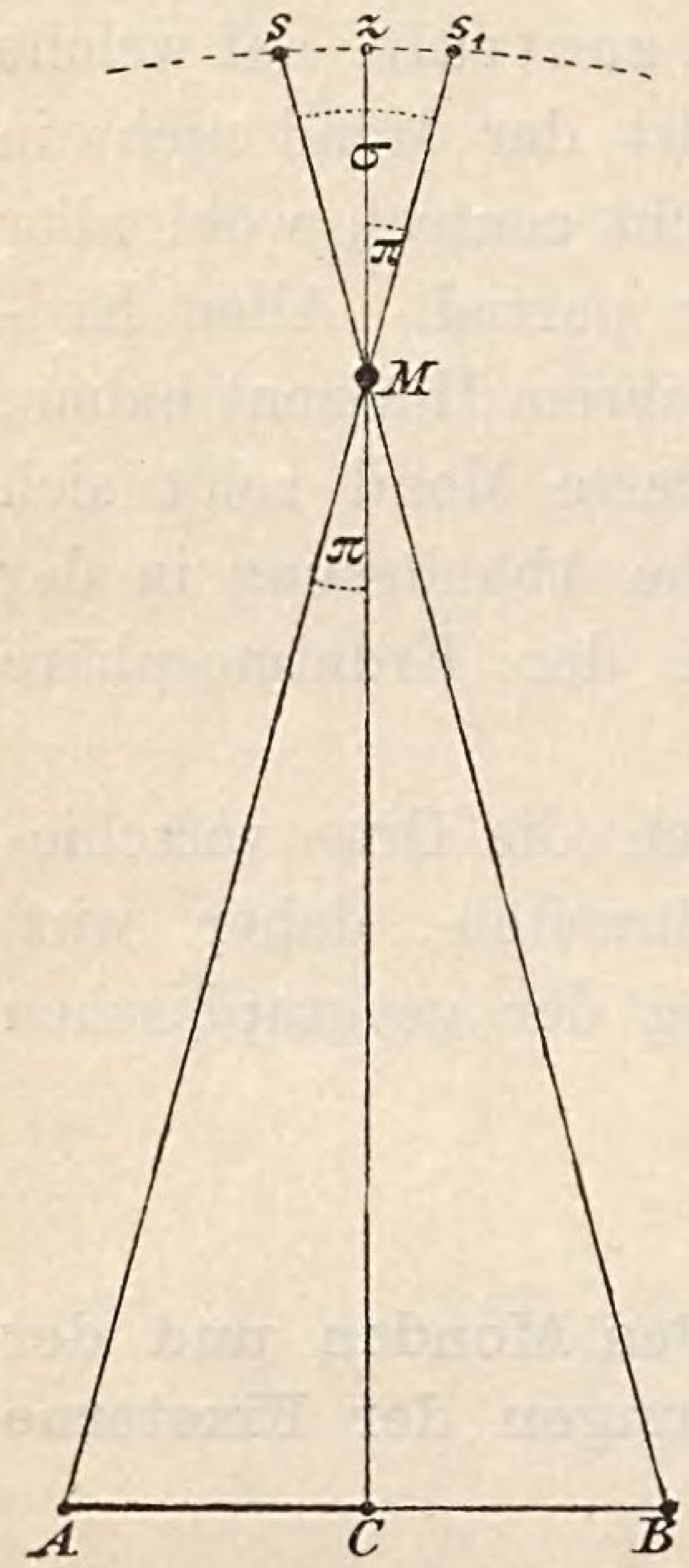


Fig. 179.

$$AM : \varkappa = \sin 90^0 : \sin \pi$$

oder, da $\sin 90^0 = 1$ ist

$$AM : \varkappa = 1 : \sin \pi,$$

woraus resultiert, dafs

$$AM = BM = \frac{\varkappa}{\sin \pi} \text{ ist.}$$

Die Methode, auch in den Himmel hinein zu messen, wäre hiermit gefunden, wenden wir sie zur Erforschung der Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde an.

Der Forscher B (Fig. 180) erblickt den Mond M in C, also in seinem Horizont, von E, dem Mittelpunkt der Erde, sucht man M in seinem Zenit, nämlich in m, dann ist C der scheinbare und m der wahre Ort des Mondes am Himmel, und Winkel mMC seine Parallaxe. Die Sehlinie BM berührt die Erdkugel und als Tangente mufs sie rechtwinklig auf dem Kugelradius stehen. Der auf diese Weise erhaltene parallaktische Winkel führt speziell den Namen Horizontalparallaxe.

So ist das Dreieck MBE rechtwinklig, der Winkel an der Spitze dieses Dreiecks $BME = CMm = \pi$ und die Standlinie ist der Erdradius $= r$.

Dann ist die Entfernung des Mondes

$$E : r = 1 : \sin \pi$$

$$E = \frac{r}{\sin \pi}.$$

Für die Sonne gilt das nämliche Verfahren, so dafs die vorstehende Gleichung auch für die Entfernungsbestimmung der Sonne von der Erde angewendet wird. Die Parallaxe zu bestimmen, bereitet den Astronomen grofse Schwierigkeiten, da, wie die Figur 180 für S an dem Winkel sSC erkennen läfst, mit der Entfernung des Gestirnes die Parallaxe sich vermindert, was ihre Erforschung aufserordentlich erschwert; jeder Sekundenfehler aber einen Fehler von Tausenden von Kilometern zur Folge hat. Zur Bestimmung der Sonnenparallaxe benutzt man auch die Venusdurchgänge, so dafs dem Astronomen Vorgänge am Himmel von höchster Bedeutung sind, die dem Laien geringfügig erscheinen oder ihn auch gar nicht tangieren.

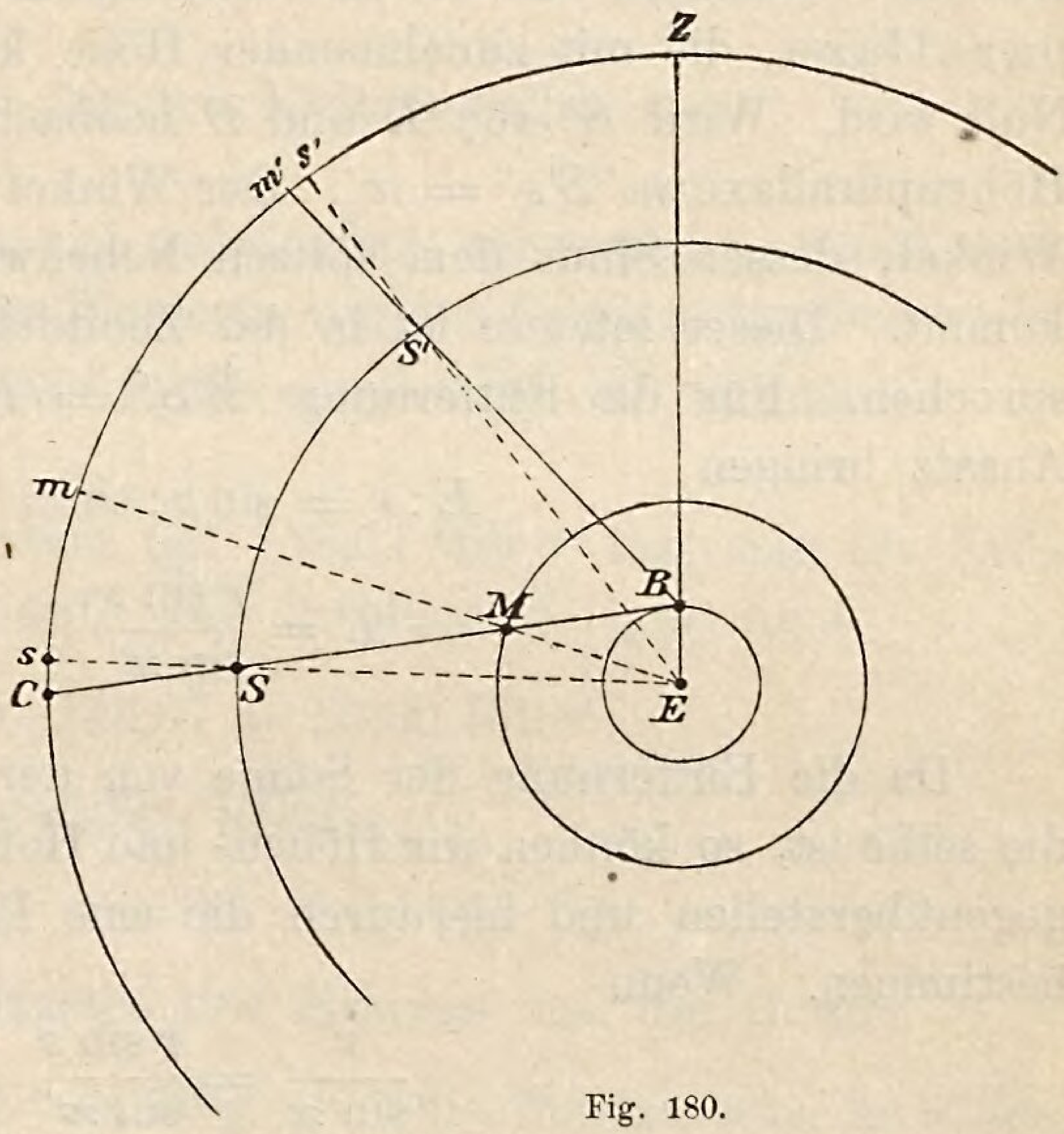


Fig. 180.

Von den Astronomen wissen wir, dafs die Horizontalparallaxe des Mondes 57′ 2,06″ und die der Sonne 8,848″ beträgt. So ist

a) die Entfernung des Mondes

$$E = \frac{6371^{\text{km}}}{\sin 57{,}034'} = 384\,250^{\text{km}}$$

b) die Entfernung der Sonne

$$E = \frac{6371^{\text{km}}}{\sin 8{,}848''} = 148{,}67 \text{ Mill.}^{\text{km}}.$$

Nach den erhaltenen Zahlen ist uns der Mond ungefähr 400 mal näher als die Sonne. Suchen wir für die Entfernungen beider Himmelskörper ein lineares Verhältnis und setzen wir für die Sonnenferne 1^{m}, so trifft auf die Entfernung des Mondes nur $2{,}5^{\text{mm}}$. Wie nah ist uns derselbe in Bezug auf die grofse in weite Ferne gerückte Sonne. Die Entfernung der Erde von der Sonne ist zugleich der Radius ihrer Bahn. Dieselbe beträgt sonach $2\,r\,\pi = 148{,}67 \cdot 2\,\pi =$ 934 Mill.$^{\text{km}}$.

Durch die Kenntnis der Entfernung der Erde von der Sonne sind wir in den Stand gesetzt mittels des dritten Kepler'schen Gesetzes S. 189 auch die Entfernungen der anderen Planeten von der Sonne zu berechnen.

Mit der Erhebung des Gestirnes über dem Horizont ändert sich die Parallaxe, aus der Horizontalparallaxe wird eine Höhenparallaxe, die mit zunehmender Höhe kleiner und im Zenit zu Null wird. Wird S' von E und B beobachtet, so gewinnt man die Höhenparallaxe $m'S's' = \pi'$. Der Winkel $S'BE$ ist ein stumpfer Winkel, dessen Sinus dem spitzen Nebenwinkel nach S. 42 gleichkommt. Dieser letztere ist in der Zenitdistanz $ZBm' = z$ ausgesprochen. Für die Entfernung $ES' = E$ können wir darum in Ansatz bringen

$$E : r = \sin z : \sin \pi'$$

$$E = \frac{r \sin z}{\sin \pi'}.$$

Da die Entfernung der Sonne von der Erde bei S wie bei S' die selbe ist, so können wir Höhen- und Horizontalparallaxe einander gegenüberstellen und hierdurch die eine Parallaxe aus der andern bestimmen. Wenn

$$\frac{r}{\sin \pi} = \frac{r \sin z}{\sin \pi'} \quad \text{ist,}$$

so folgt, daſs

1. die Horizontalparallaxe

$$\sin \pi = \frac{\sin \pi'}{\sin z},$$

2. die Höhenparallaxe

$$\sin \pi' = \sin \pi \cdot \sin z \quad \text{ist.}$$

Die Grundlage zum trigonometrischen Messen der Himmelsstrecken zwischen Erde, Mond, Sonne und Planeten bildet der Radius der Erde selbst, er ist die Standlinie der Dreiecksberechnung oder astronomisch gesprochen die tägliche Parallaxe der Gestirne. Eine weitere, uns gleichfalls bekannte Standlinie bildet der Halbmesser der Erdbahn oder aber ihre Entfernung von der Sonne, die der Astronom die jährliche Parallaxe der Gestirne zu benennen pflegt.

Betrachten wir in Figur 180 den Erdradius als den Erdbahnradius und M als einen Fixstern, so gilt für die Bestimmung seiner

Entfernung von der Sonne, die inmitten der Erdbahn, wie das Zentrum in der Erde, sich befindet, dieselbe Regel sowohl für die Horizontal- als auch Höhenparallaxe. Um nun einen bequemen Ausdruck für so weite Fernen zu erhalten, nehmen wir den Erdbahnradius als die Einheit und die Parallaxe zu 1″, alsdann ist nach der Horizontalparallaxe

$$E = \frac{1}{\sin 1''} = 206\,265 \text{ Erdbahnhalbmesser.}$$

Dieses Resultat läſst sich tabellarisch verwerten, so daſs man rasch die Entfernungen der Fixsterne von der Sonne anzugeben weiſs.

Tabelle XXIV gibt die Entfernungen für die Parallaxen von 1″ bis 0,1″.

Durch die Multiplikation mit 148,67 Mill.km löst man die Erdhalbmesser in Kilometer auf. Die Parallaxe 1″ gibt dann

$$206\,265 \cdot 148{,}67 = 30{,}65 \text{ Bill.}^{\text{km}},$$

welche Ferne eine Sternweite heiſst.

Die Gröſsenverhältnisse des Mondes und der Sonne.

Erblicken wir von E aus (Fig. 181) die Mondscheibe, so bilden die Sehlinien Et und Et' den Sehwinkel $tEt' = \omega$. Halbieren wir denselben, und führen wir von E zum Mondmittelpunkt z die Zentrale Ez, so gewahren wir, wenn wir t mit z verbinden, daſs die Sehlinie die Tangente ist, welche auf dem Mondradius tz rechtwinklig ruht. Die Entfernung des Mondes von der Erde, also die Standlinie Ez ist bekannt, sowie der Winkel $o = \frac{1}{2}\,\omega$. Dann folgt für den Mondradius

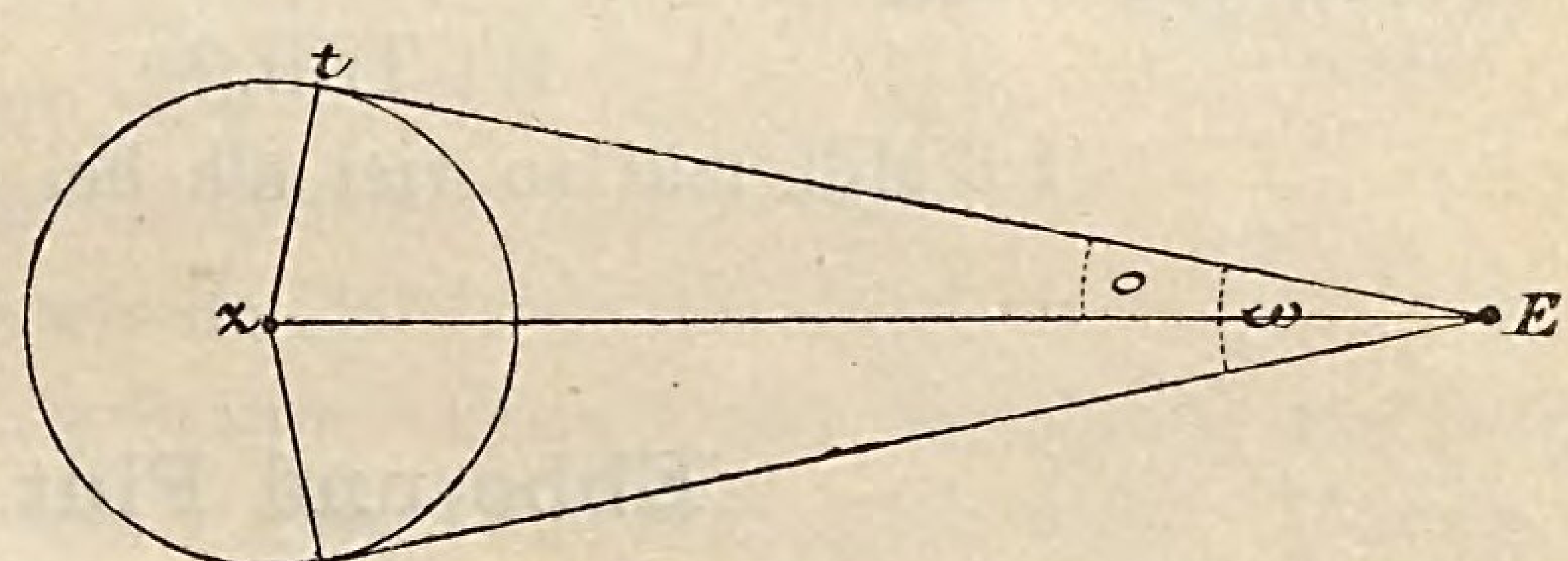


Fig. 181.

$$R : E = \sin o : 1$$

$$R = E \cdot \sin o$$

oder in Worten:

Der Radius eines Gestirnes wird gefunden, wenn man seine Entfernung mit dem Sinus des halben Sehwinkels, unter dem es erscheint, multipliziert.

Die Gröſsenverhältnisse des Mondes, dessen halber Sehwinkel 15′ 32,25″ beträgt, sind:

1. Der Radius

$$384\,250^{\mathrm{km}} \cdot \sin 15' \, 32{,}25'' = 1736^{\mathrm{km}}$$

($^1/_4$ der Erde),

2. der Umfang

$10\,900^{\mathrm{km}}$,

3. die Oberfläche

37,9 Mill.$^{\mathrm{qkm}}$

($^3/_{40}$ der Erde),

4. das Volumen

21 918 Mill.$^{\mathrm{ckm}}$

($^1/_{50}$ der Erde).

Die Gröſsenverhältnisse der Sonne, deren halber Sehwinkel 16′ 1,8″ ausmacht, sind:

1. Der Radius

$$148{,}67 \text{ Mill.}^{\mathrm{km}} \cdot \sin 16' \, 1{,}8'' = 693\,250^{\mathrm{km}}$$

(108 $^1/_2$ Erdhalbmesser),

2. der Umfang

$4\,356\,000^{\mathrm{km}}$,

3. die Oberfläche

6,04 Bill.$^{\mathrm{qkm}}$

(11 750 mal so viel als bei der Erde),

4. das Volumen

1,4 Trill.$^{\mathrm{ckm}}$

(1,3 Mill. mal so viel als bei der Erde).

Ebbe und Flut.

Den Küstenbewohnern muſste die rhythmische Bewegung des Meeres, die wir Ebbe und Flut oder die Gezeiten heiſsen, ein Gegenstand ernster Betrachtung sein und das um so mehr, als dieselbe für die Schiffahrt von immenser Bedeutung ist. So viel man nach Lösung suchte, so wenig lieſs sich eine genügende Deutung dieses rätselhaften Spieles finden. Erst nachdem Newton auf das Gravitationsgesetz gekommen, und nachdem die vielfach angestellten Beobachtungen darauf hinwiesen, daſs das Steigen und Fallen der See mit dem Zeitraum übereinstimmte, innerhalb dessen die doppelte Oszillation vor sich geht, gerade die Zeit ist, welche zwischen

zwei aufeinander folgenden Kulminationen des Mondes verstreicht, so kam man darauf, dafs die Anziehungskraft des uns so nahen Mondes und sonst nichts anderes ein Ebben und Fluten des Meeres hervorruft.

Denken wir uns die Erde rings vom Wasser umflossen und den Mond *M* (Fig. 182) im Meridian von *a*, also an der Stelle, da er kulminiert. Dieser Punkt wird mächtiger als der Erdmittelpunkt *z* und dieser wiederum stärker als der Antipodenpunkt von *a*, nämlich *b*, angezogen. Folglich wird *a* mit gröfserer Beschleunigung gegen *M* gravitieren und *b* bedeutend zurückbleiben, was zur Folge haben mufs, dafs sich beide Punkte vom Zentrum nach *a'* und *b'* entfernen und auf beiden Seiten ein Fluten anhebt, auf der beleuchteten Seite findet eine Zenit- und auf der unbeleuchteten Seite eine Nadirflut statt. An der Schattengrenze, am Mondaufgange für *d* und dem Monduntergang von *e* ist Ebbe. Nach 6 Stunden, eigentlich nach 6 Stunden 12½ Minuten steht der Mond im Meridian von *d*. Hier wie in *e* wird Flut, in *a* und *b* Ebbe sein. Somit ist hinreichend nachgewiesen, dafs zwischen zwei nächsten Kulminationen, also in 24 Stunden 50 Minuten, die Gezeiten sich zweimal ereignen. Da nun die Sonne eine viel gröfsere Anziehungskraft besitzt als der Mond, so kann sie nicht unbeteiligt bei dieser Meeresbewegung gedacht werden. Und in der That sind in den Zeiten der Syzygien die Fluten stärker als in denen der Quadraturen. Neu- und Vollmond, wie Figur 172 S. 224 zeigt, befinden sich mit der Sonne in einer Ebene, die Anziehung geschieht mit vereinten Kräften, deren Folge Sturmfluten sind. Während beim ersten und letzten Viertel der Mond eine Flut erzeugt, bewirkt die Sonne an eben derselben Stelle eine Ebbe, beide Himmelskörper arbeiten einander entgegen und bringen es nur zu Nippfluten. Bei alle dem müssen wir zugeben, dafs der kleine aber nahe Mond zu dem Phänomen der Gezeiten vielmehr beiträgt als die ungeheuer grofse aber unendlich ferne Sonne. Denn hier kommt es weniger auf die Anziehung im grofsen und ganzen als wie auf den Unterschied der Anziehung für bestimmte Erdstellen an. Bei der Sonne wird jeder Punkt der Erde beinahe gleich stark angezogen, so dafs von einer merklichen Veränderung der gegenseitigen Lage der Örter

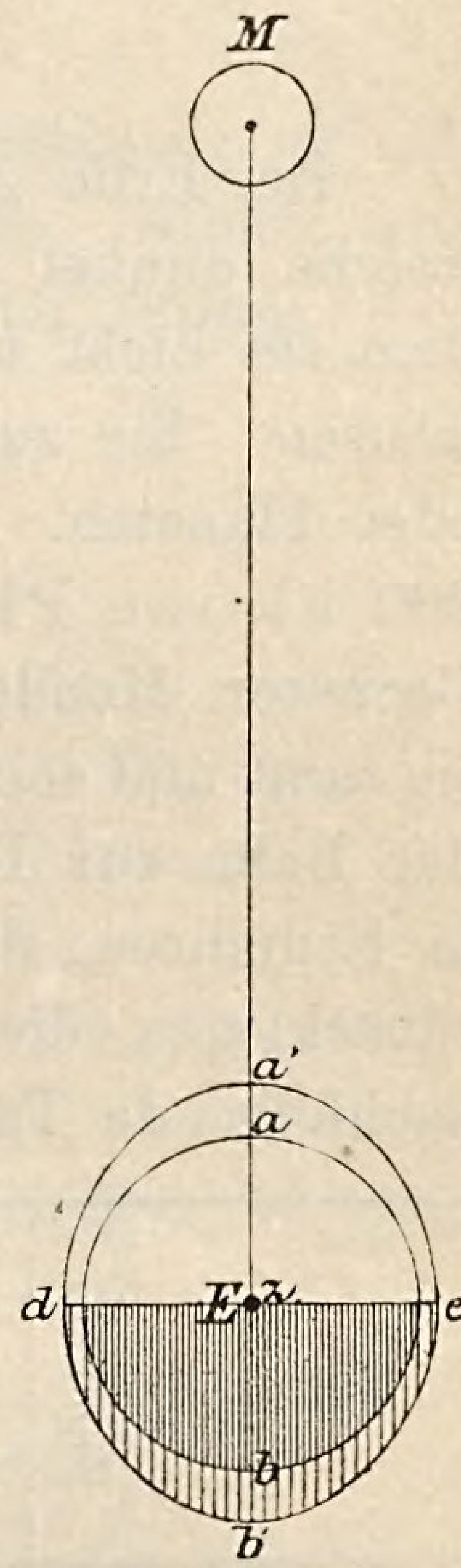


Fig. 182.

kaum die Rede sein kann; beim Mond dagegen findet ein Unterschied in der Anziehung statt und dieser ist die alleinige Ursache der Verschiebung der gegenseitigen Lage der Erdstellen, die sich nicht auf der festen Erdkruste, wohl aber im Meere durch Ebbe und Flut bemerklich macht.

Kurven, welche alle die Orte verbinden, die zu gleicher Zeit Flut haben, führen den Namen Isorachien.

Das Planetensystem.

Der Erde gleich gibt es noch eine Anzahl von Himmelskörpern, welche dunkel sind und die Sonne als ihren Zentralkörper, von dem sie Licht und Wärme empfangen, in elliptischen Bahnen umkreisen. Sie zusammen bilden ein System von wandelnden Sternen oder Planeten. Man unterscheidet 8 grofse Planeten und über 200 kleine Planeten oder Planetoiden. In Bezug auf ihre Begleiter, Monde, Trabanten, Satelliten oder Nebenplaneten, heifsen sie samt und sonders Hauptplaneten. Über Namen, Zeichen, Neigung der Bahn zur Ekliptik, Durchmesser, mittlere Entfernung, Umlauf in Erdjahren, den Bogen, den die einzelnen Planeten in 88 Tagen zurücklegen, die Dichte und die Monde der einzelnen Planeten gibt nachfolgende Tabelle hinreichenden Aufschlufs.

Namen	Zeichen	Neigung der Bahn	Durchmesser Erddurchm. = 1	Mittlerer Sonnenabstand in Kilometern	Umlauf in Erdjahren	Bogen Merkurbahn = 1	Masse	Dichte	Monde
Merkur	☿	7° 00′	0,387	57,6 Mill.	0,24	360° 00′	0,043	0,780	—
Venus	♀	3 24	0,945	107,5 „	0,62	140 56	0,787	0,905	—
Erde	♁	—	1,000	148,7 „	1,00	86 42	1,000	1,000	1
Mars	♂	1 51	0,540	226,5 „	1,88	46 06	0,109	0,730	2
Planetoiden*	⊖	20 00	—	450,0 „	4,68	11 04	—	—	—
Jupiter	♃	1 19	11,160	779,2 „	11,68	7 19	309,5	0,236	4
Saturn	♄	2 30	9,527	1418,0 „	29,46	2 57	91,9	0,112	8
Uranus	♅	0 46	4,221	2851,8 „	84,02	1 02	15,5	0,153	4
Neptun	♆	1 47	4,407	4470,0 „	164,59	0 31	16,5	0,216	1
Sonne	☉	—	108,556	—	—	—	324480	0,253	—

* Die Werte für die Planetoiden sind im Durchschnitt gegeben.

Figur 183 gibt in anschaulicher Weise das Verhältnis der Entfernung der Planeten (mit Ausschlufs des Neptun) und das der

Umlaufszeiten in Bogen. Ihr Gröſsenverhältnis zu einander und zur Sonne ersieht man aus der nach H. Berghaus gezeichneten Figur 184. Es möchte sich lohnen, die Planeten in gröſserem

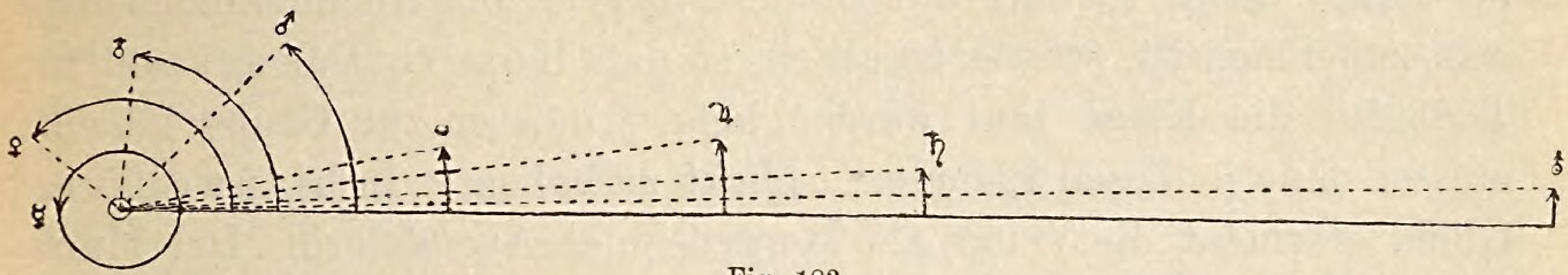


Fig. 183.

Maſsverhältnis als es hier der Raum gestattete anzulegen; es tritt der Unterschied unter ihnen viel eklatanter hervor. Nimmt man z. Ex. den Erdradius zu 4^{mm}, so dehnt er sich beim Jupiter, dem gröſsten Planeten, schon auf $44{,}64^{mm}$ aus.

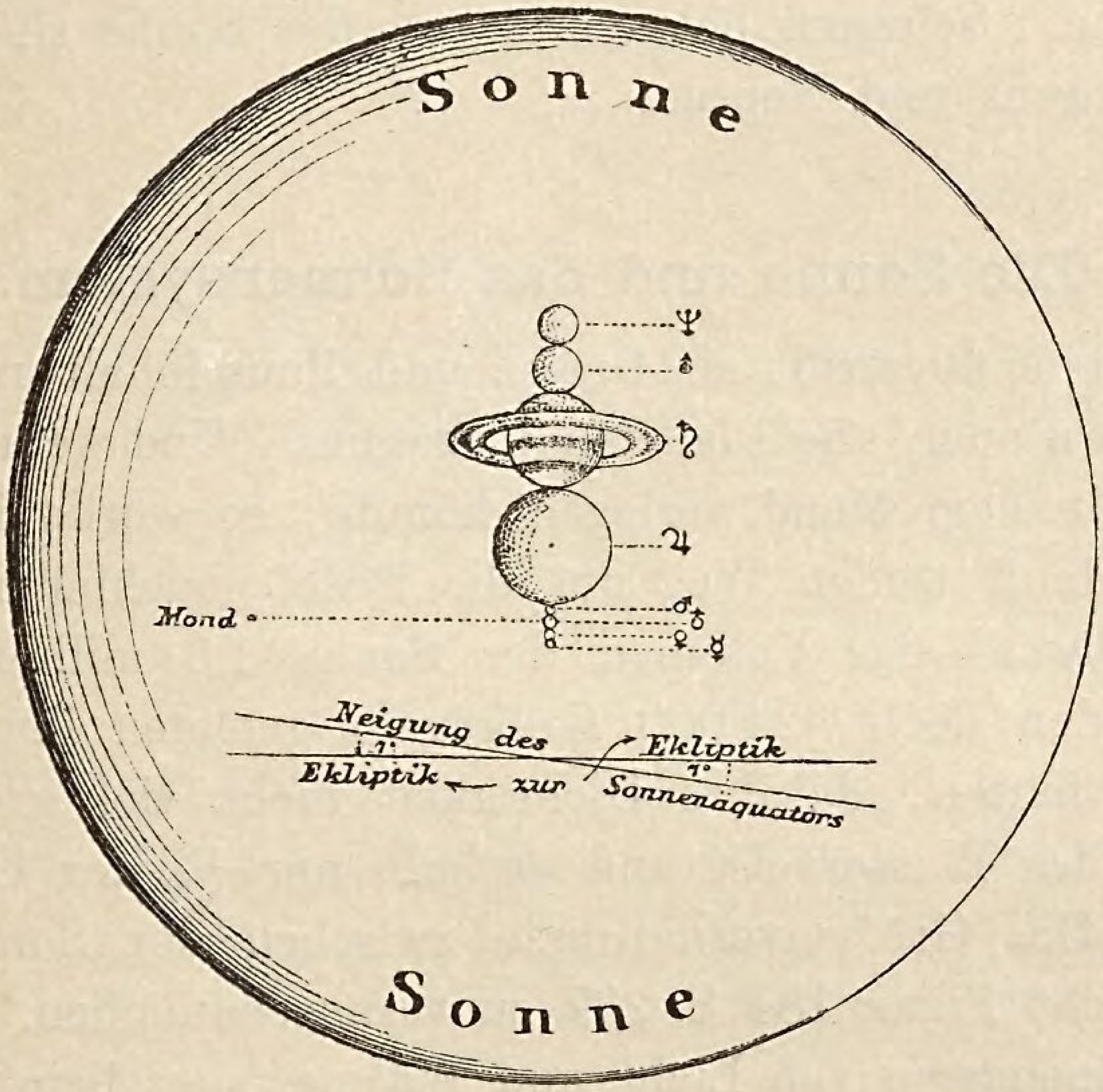


Fig. 184.

Den Alten waren Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, die mit unbewaffnetem Auge zu sehen sind, bekannt. Uranus wurde 1781 vom älteren Herschel und Neptun erst 1846 von Galle und Leverrier aufgefunden. Auf die Planetoiden kam in der Neujahrsnacht von 1800 auf 1801 Piazzi, der erste Planetoid ist Ceres. Ihre Zahl übersteigt 200. Durch sie teilt man die Planeten in innere und äuſsere ein. Die letzten sind weit maſsiger, doch weniger dicht, von beträchtlicher Gröſse, schnell rotierend, stark abgeplattet und sehr mondreich. Die innern Planeten dagegen sind

von mäſsiger Gröſse, dichter, unbedeutend abgeplattet und ziemlich mondarm.

Trotz des weiſsen intensiven Lichtes ist der Merkur, da er nie bei voller Nacht, sondern nur in der Morgen- und Abenddämmerung wahrzunehmen ist, schwer zu sehen, so daſs Kopernikus auf seinem Todbette die Klage laut werden lieſs, „daſs er zur Grube fahren müsse, ohne je diesen Planeten erblickt zu haben". In blauweiſsem Glanz erscheint die Venus als Morgen- und Abendstern. Der Mars läſst sich in rötlichem Lichte sehen, als gelblich heller Stern schimmert der Jupiter und matt weiſs glänzend zeigt sich der gehenkelte Saturn. Denn ihm kommt noch die besondere Eigentümlichkeit zu, daſs er nicht nur von 8 Monden, sondern auch noch von einem System von Ringen (siehe Fig. 184) umgeben ist. Dasselbe ist ein flaches in mehrere Ringe geteiltes Band in der verlängerten Äquatorebene. Schwach beleuchtet von der Sonne sind die fernen Planeten Uranus und Neptun.

Die Sonne und das Sonnensystem.

Die Sonne übertrifft an Gröſse und Rauminhalt nicht nur die Erde, sondern auch alle Planeten insgesamt. Und wenn man in sie die Erde mit dem Mond verlegen könnte, so würde in der Hohlkugel der Mond seinen Weg um die Erde ungehindert ausführen können. Obwohl das Volumen der Sonne 1,3 millionmal gröſser ist, so würden doch 324 000 Erdkugeln genügen ihr das Gleichgewicht zu halten, da ihre Dichtigkeit nicht viel gröſser als die Dichtigkeit des Wassers ist und deshalb nur $^1/_4$ der Erddichtigkeit ausmacht. Die Gröſsenverhältnisse zwischen der Sonne und den Planeten sucht Figur 184 S. 237 zu veranschaulichen. Für uns ist die Sonne Spenderin von Licht und Wärme, sie scheint uns als eine hellleuchtende Feuerkugel, von deren Dunsthülle Zöllner eine Temperatur von 28000° C. und von deren Innerem er eine solche von 68400° C. berechnet hat. Ihr Antlitz entstellen jedoch Flecken, die aus einem schwarzen Kern, der Umbra und dem Halbschatten, einer grauen Einfassnng, der Penumbra, bestehen. Sie deutet man auf eine Verdichtung glutflüssiger Massen, die eine Krustenbildung, ähnlich wie sie bei der Erdbildung vor sich gegangen, einzuleiten scheinen*).

*) Johann Karl Friedrich Zöllner sagt: „Die Sonne ist ein glühendflüssiger Körper, umgeben von einer glühenden Atmosphäre; in der letzteren

In der Nähe solcher Flecken zeigen sich häufig Stellen, welche heller sind als der übrige Teil der Sonnenscheibe und welche man Sonnenfackeln nennt. Da diese Flecken regelmäfsig an dem einen Sonnenrand verschwinden und am andern wieder zum Vorschein kommen, so schlofs man daraus, dafs die Sonne eine Achsendrehung, die sie innerhalb 25 Tagen vollzieht, besitzt. Obwohl die Sonne den Planeten gegenüber in Ruhe verharrend erscheint, so ist dies keineswegs in Beziehung zu den Fixsternen anzunehmen, vielmehr bewegt sie sich unter diesen vorwärts. Ihr Äquator fällt nicht mit der Ekliptikebene zusammen, sondern weicht von ihr ca. 7° ab (Fig. 184). Die Umhüllungen des Sonnenkörpers von aufsen nach innen bilden die Sonnenatmosphäre, welche aus durchsichtigen, gasförmigen Massen besteht und bei totalen Sonnen-

schwebt eine fortwährend sich erneuernde Decke von leuchtenden, cumulusartigen Wolkengebilden in einem gewissen Abstande über der feurigen Oberfläche. An solchen Stellen, wo die Wolkendecke sich vermindert oder auflöst, entstehen durch kräftige Ausstrahlung auf der glühend flüssigen Oberfläche schlackenartige Abkühlungsprodukte. Dieselben liegen folglich tiefer als das allgemeine Niveau der leuchtenden Wolkendecke und bilden die Kerne der Sonnenflecke. Über diesen abgekühlten Stellen entstehen absteigende Luftströme, welche um die Küsten der Schlackeninseln eine Zirkulation der Atmosphäre einleiten, der die Penumbra ihren Ursprung verdankt. Die innerhalb dieses Zirkulationsgebietes gebildeten wolkenartigen Abkühlungsprodukte werden hinsichtlich ihrer Gestalt und Temperatur durch die Natur der strömenden Bewegung bestimmt; sie müssen uns daher infolge ihrer Temperaturerniedrigung weniger leuchten, als die übrige Wolkendecke der Sonnenoberfläche und trichterartig vertieft durch ihre absteigenden Bewegungen über dem Flecke erscheinen.“ Oskar Peschel sagt hierüber in seiner physischen Erdkunde, herausgegeben von Gustav Leipoldt, folgendes: „Da die Flecken in zwei Zonen zu beiden Seiten des Äquators auftreten und diesem parallel ziehen, so entstehen dermaleinst kettenartige Verknüpfungen von Flecken und somit Fleckenringe. Sie vermögen sich zwar zunächst nicht zu behaupten; sie werden vielmehr durch neue Wärmezuleitung periodisch wieder aufgelöst; doch kehren sie stets rascher und mächtiger wieder, bis sie schliefslich das gewonnene Terrain nicht wieder verlassen. Sterne mit periodischem Lichtwechsel dürften vielleicht bereits in dieses Stadium eingetreten sein. Endlich kommt für solche leuchtende Körper einmal die Zeit, wo ihre ganze Oberfläche erstarret und lichtlos ist. Jedenfalls geht die Sonne aus einem Stadium reichster Fülle von Wärmekräften allmählich über in ein solches mit anfänglich periodischer, dann konstanter Fleckenringbildung, endlich aber in einen Zustand gänzlicher Erstarrung ihrer Oberfläche. In diesen Vorgängen erblicken wir ein ziemlich getreues Abbild der verschiedenen Entwicklungsperioden unseres Erdkörpers in früheren geologischen Zeitaltern; gleichzeitig aber sehen wir in ihnen das einstmalige Schicksal der Erdbewohner besiegelt.“

finsternissen als Korona, als glänzender gleich einem Glorienschein sich zeigender Ring, sichtbar wird. Unter ihr befindet sich die Chromosphäre mit lebhaft rotem Lichte ausgestattet. Über dem uns verschlossenen Sonnenkörper lagert endlich die Photosphäre oder Lichthülle, die wir mit bloſsem Auge in lebhaft weiſsem Strahlenlichte erglänzen sehen. Eigentümliche Prozesse im Sonnenkörper geben zu Ausbrüchen von glühenden Wasserstoffmassen Veranlassung, welche zu bedeutender Höhe emporgeschleudert werden und die Protuberanzen erzeugen. Dieselben mögen mit den Sonnenflecken in engem Zusammenhang stehen, so daſs sie auch für identisch mit den Sonnenfackeln gehalten werden und somit für nichts anderes als für am Sonnenrande erscheinende Fackeln anzusehen wären. Durch die Spektralanalyse ist dargethan, daſs bei der Sonne und den Planeten die gleichen chemischen Stoffe wie auf der Erde sich vorfinden, wenn sie auch noch nicht alle nachgewiesen sind.

Diese Sonne ist von den Planeten samt ihren Trabanten umkreist. Sie führt hierbei ein strenges Regiment, Ordnung und Gesetz herrscht in ihrem Reich, keiner der Wandelsterne verkürzt seinen Weg oder verläſst seine ihm angewiesene Bahn. Dennoch konnte sie sich gewisser Eindringlinge, als da sind Kometen und Asteroiden, nicht erwehren. Aus andern Gebieten drangen sie ein und verblieben teils in ihrem Reich, teils verloren sie sich wieder. Ihnen allen, welche bei ihr weilen, ist sie der Zentralkörper und mit ihnen bildet sie eine eigene Ordnung von zusammengehörigen Weltkörpern, nämlich das Sonnensystem.

Kometen und Asteroiden. Zodiakallicht. Arten der Sterne.

Die Kometen oder Schweifsterne fallen durch ihren langgestreckten Schweif, den sie in der Regel mit sich führen, auf. Sie sind unserm Sonnensystem fremd, weshalb sie plötzlich und unvermutet am Himmel gesehen werden. Man unterscheidet an ihnen einen Kopf oder Kern und eine Dunsthülle oder einen Schweif, der aber von der Sonne stets abgewendet ist (Fig. 185). Da durch Schweif und Kopf hindurch Sterne gesehen werden können, so folgert man mit Recht, daſs beide aus

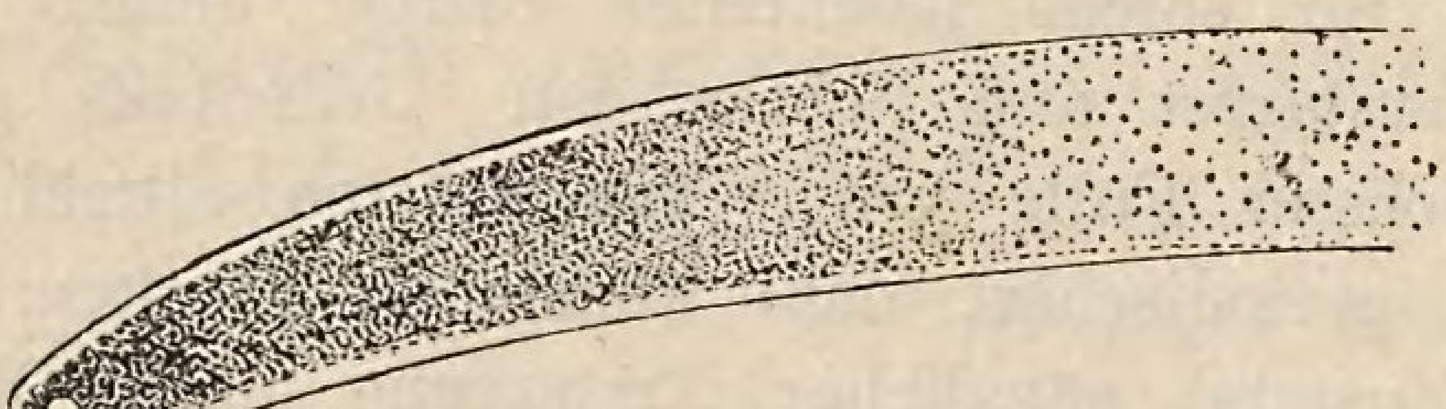


Fig. 185.

einer sehr dünnen Masse, die dem Sternlichte den Durchgang gestattet, bestehen. Professor Dr. Zech sagt deshalb auch: „Wie eine fallende Flaumfeder dem leichtesten Windhauch preisgegeben ist, jeden Augenblick ihre Bahn ändert, an starre Körper stofsend abgelenkt wird, ohne selbst einen merklichen Einflufs auszuüben, so hat man sich die Kometen als luftige Wesen zu denken, die dem geringsten Widerstande nachgeben.“ Trotzdem würde ein Zusammenstofs der Erde mit einem Kometen ob seiner grofsen Masse seine üblen Folgen haben können*). Da aber zu keiner Zeit ein Zusammentreffen stattfand, so wird auch die Zukunft ein solches nicht zu befürchten haben, so dafs wir sie als harmlose Geschöpfe betrachten können, die weder als Verkünder des Weltunterganges, noch als Vorboten von Krieg und Pestilenz zu fürchten sind.

Ihre Bahn kann eine Hyperbel, eine Parabel oder auch eine äufserst langgestreckte Ellipse sein. Nur bei einer elliptischen

*) Die Ansichten hierüber gehen auseinander. In der physischen Erdkunde von Oskar Peschel S. 125 lesen wir: „Obwohl die Kometen aus einer in so hohem Grade verdünnten Materie bestehen, dafs sie der berühmte Physiker Babinet scherzweise, aber bezeichnend ‚sichtbare Nichtse‘ nennen konnte, so dürfen wir doch nicht glauben, dafs ein Zusammenstofs derselben mit der Erde keine weiteren Folgen haben würde. Wäre z. B. der Kern des Donati’schen Kometen, dessen Gewicht Faye mit demjenigen einer $^1/_2$ Mill.^{qkm} grofsen und 100^m tiefen See vergleicht, mit der Erde zusammengestofsen, d. h. mit einer 25600 Bill.^{kg} wiegenden Masse bei einer Geschwindigkeit von 74^{km} per Sekunde so würden sich nach Faye’s Berechnung augenblicklich auf derjenigen Hemisphäre, welche den Stofs erlitten hätte, 51 Mill. Kalorien Wärme per Quadratmeter entwickelt haben, Wärmemengen, welche hinreichen würden, einen Teil der festen Erdkruste aufzulösen und in Dampfform zu verwandeln. Kein organisches Wesen auf der betreffenden Hemisphäre könnte eine derartige Katastrophe überdauern. Glücklicherweise ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammenstofses äufserst gering; auch tragen selbst die entferntesten geologischen Zeitalter keine Spuren eines ähnlichen Ereignisses. Wir dürfen demnach die Kometen immerhin als harmlose Himmelskörper betrachten, die nicht im Stande sind, den Frieden der Welt zu stören.“ Falb dagegen sagt in dem Buch ‚Von den Umwälzungen im Weltall‘ S. 71. „Wenn ein so grofser Himmelskörper eine so geringe Masse besitzt, so folgt daraus, dafs der Stoff, aus welchen er besteht, aufserordentlich locker sein mufs. Beim Zusammentreffen mit einem Kometen kann daher von einem Stofse, also auch von einer Zertrümmerung keine Rede sein.“ S. 75 wie folgt: „Durch Rechnung ist erwiesen, dafs Kometen wiederholt mit der Erde zusammengetroffen sind. So z. B. ging die Erde im Jahre 1819 durch den Schweif eines Kometen. Im Jahre 1823 fand das gleiche statt. Und erst in jüngster Zeit, am 20. Juli 1873, sind wir hart an den damals sichtbaren Kometen geraten.“

Kurve ist die Wiederkehr eines Kometen möglich, folgt er einer hyperbolischen oder parabolischen Linie, so gelangt er aus unendlicher Ferne herein in unser Sonnensystem um nach kurzem Aufenthalt für immer aus demselben und damit aus unserem Gesichtskreis zu entschwinden. Die Zahl der bisher gesehenen beträgt 600—700, von 65 (des von Encke, Vico, Brorsen, d'Arrest, Biela, Faye, Halley u. a.) ist die Umlaufszeit und von 277 sind die Bahnen berechnet.

Nicht minder fremd in unserem Sonnensystem sind die Asteroiden, welche nicht, wie man früher annahm, schwefelige in Brand geratene Massen, sondern himmlische Körper sind, die in die Atmosphäre dringend infolge ihrer bedeutenden Geschwindigkeit durch den Widerstand der Luft bis zum Glühen erhitzt werden und als Sternschnuppen oder Feuerkugeln erscheinen oder auch bis zur Oberfläche gelangen und als Meteorsteine, Meteorite oder Aërolithe niederfallen.

Da sie aus denselben Elementen wie die Erde zusammengesetzt gefunden worden sind, darf man zu der Annahme, die auch durch die spektroskopischen Untersuchungen des Fixstern- und Planetenlichtes im allgemeinen bestätigt wird, berechtigt sein, dafs die gesamte Körperwelt aus gleichem Stoffe bestehe, wie die Erde.

Auffallend ist, dafs Kometen und Asteroiden sich in gleichen Bahnen bewegen und dafs letztere zeitenweise in Schwärmen herniedergehen. Zech sagt über deren Ursprung sowie über den der Kometen folgendes: „Kometen und Asteroiden haben wahrscheinlich gleichen Ursprung: aus der Zertrümmerung eines gröfseren Körpers bildeten sich starre Trümmer, die als Asteroiden, und flüssige, die als Kometen auf nahe gleicher Bahn, wenn sie von demselben Körper herrühren, fortwandeln. Ihr geringer Zusammenhang in Verbindung mit ihrer Anziehung durch die Planeten und die Sonne wird schliefslich die einzelnen Teile zerstreuen: wie die Erde eine Anzahl Meteorsteine gewinnt, so werden auch die andern Planeten einzelne sich einverleiben und am meisten offenbar wird der gröfste der Planeten, noch unverhältnismäfsig mehr die an Masse alle Planeten so bedeutend überwiegende Sonne erhalten."

Innerhalb der Erdbahn oder des Tierkreises gewahrt man in mondscheinfreien Nächten im Frühlinge bald nach Sonnenuntergang, im Herbste vor Sonnenaufgang einen mild schimmernden Lichtschein von elliptischer pyramidaler Form. Weit glänzender als bei uns gestaltet sich diese Erscheinung, welche den Namen Tierkreis-

oder Zodiakallicht führt, in den Tropengegenden. Über die Natur der Erscheinung ist man noch nicht im Klaren. Nach der Ansicht von Heis wäre das Tierkreislicht ein nebelartiger Ring, der die Erde umgibt.

Die Himmelskörper, die bisher in Betracht gezogen wurden, waren teils Fixsterne, teils Planeten, teils Kometen. Andere besonders auffällige Arten von Sternen sind aber bis auf den heutigen Tag noch nicht erkannt worden und so können wir auf diese Thatsache hin die Behauptung aussprechen: es gibt im allgemeinen nur drei Arten von Sternen, nämlich Fixsterne, Planeten und Kometen.

Das Weltall.

Weltall, Weltgebäude, Kosmos, Universum sind Worte, die den Inbegriff alles dessen in sich fassen, was den weiten Himmelsraum erfüllt, als ein geordnetes Ganzes, bewegt und belebt durch innere Kräfte.

Den Griechen war das Himmelsgewölbe eine bewegliche krystallene Schale mit festgenagelten, funkelnden Sternen. Dieselbe hatte sich um die Erde, den Weltmittelpunkt, Tag für Tag zu drehen, ein Stern däuchte ihnen so ferne als der andere. Erst mit dem kopernikanischen System verlor der Himmel seine Enge, der Sterne Entfernung wuchs, man maſs nicht mehr mit Mondabständen, sondern man lernte mit Sonnenfernen und Sternenweiten zu messen. Die Sonne ergab mit den Planeten und Kometen ein System, das wieder nur ein Glied der Systeme höherer Ordnung bilden soll. Und was wir auſserhalb unseres Sonnensystems gewahren, sind lauter Fixsterne, die uns wegen ihrer unermeſslich weiten Entfernung unbeweglich erscheinen, in der That es aber nicht sind. Nach Glanz und Gröſse unterscheidet man Sterne 1. 2. 3. Gröſse u. s. f. Vergleiche haben ergeben, daſs in der Regel die hellsten Fixsterne auch die nächsten sind. Unser nächster Fixstern auſserhalb unseres Sonnensystems ist der Stern α im Sternbilde des Centaur. Seine Entfernung beträgt 222000 Sonnenfernen oder 33 Bill.^{km}, so daſs sein Licht, das nach S. 186 in einer Sekunde 300000^{km} zurücklegt, bis es unsere Erde erreichte, nahezu 3 ½ Jahre bedurfte. Von manchen Fixsternen kam das Licht erst in 10 oder auch wohl erst in 120 Jahren zu uns und von den äuſsersten Fixsternen nimmt man an, daſs ihr Licht 2 Mill. Jahre nötig hatte, um den Weg von ihnen zu uns zurückzulegen. An 6800 Fixsterne soll man mit dem bloſsen

Auge und an 140 Millionen mittels der Teleskope erblicken können. Wundern wir uns nicht, besteht doch der mild schimmernde Streifen am Himmel, die Milchstrafse, allein aus Millionen von Fixsternen. Welche Schar von Sternen, ihre Zahl ist Legion. Ein Schauen in das unermefsliche, harmonisch geordnete Weltall ist wahrlich ein unendliches, herrliches Schauen, das den Menschen ob seiner Kleinheit und Hinfälligkeit mit Schauer, ob seines erkennenden Geistes mit Dank gegen den erfüllen mufs, der ihm den Geist des Erkennens einhauchte. Und wer ist der? Gott, der Schöpfer Himmels und der Erde, der da spricht durch seinen eingebornen Sohn, unsern Herrn und Heiland: Himmel und Erde werden vergehen; aber meine Worte werden nicht vergehen (Matth. 24, 35). Sein Wort ist ewig, wie er selbst; die Welt, die aus seinem freien Willen hervorgegangen*), ist vergänglich, hinfällig gleich wie wir, aber auch sie soll zu neuem Leben wie wir erwachen. Denn die Himmel „werden alle veralten wie ein Gewand und verwandelt wie ein Kleid" (Ps. 102, 27). Hernachmals aber „wird des Mondes Schein sein wie der Sonne Schein, und der Sonne Schein wird siebenmal heller sein, denn jetzt" (Jes. 30, 26). Darum können wir Petro getrost nachsprechen: „Wir warten eines neuen Himmels und einer neuen Erde nach seiner Verheifsung, in welchen Gerechtigkeit wohnet" (2. Petr. 3, 13). So hat der Schöpfer, „der allein Unsterblichkeit hat, der da wohnet in einem Licht da niemand zukommen kann" (1. Tim. 6, 16), nach seiner Weisheit der Welt Schranken gesetzt, sowohl räumlich als zeitlich. Hat sich auch der Horizont des Erkennens von Jahrhundert zu Jahrhundert erweitert, so dafs man zu der Meinung kam, das Universum ist unermefslich nach Zeit und Raum, so hat die moderne Wissenschaft vielfach eingelenkt und nach ihren Ergebnissen mufs sie ein räumliches wie zeitliches Ende proklamieren. „Die Körperwelt", sagt Peschel in seiner Abhandlung über die räumliche Begrenzung der Körperwelt, „reicht vielleicht nicht weiter hinaus als bis zu den äufsersten Sternen der Milchstrafse, so dafs wir sagen dürften: Alles, was Lichtreize auf unsere Sehnerven ausübt, sei es, dafs dies mit oder ohne optische Vorrichtungen geschieht, das ist die Körperwelt, und die dunklen Lücken am gestirnten Himmel sind Öffnungen in den körperlosen Weltraum". Ferner: „Hätte die Sternenwelt keine räumlichen Grenzen, wäre sie unendlich

*) Über den Anfang aller Dinge siehe: Geschichte und Geographie der Urzeit von der Erschaffung der Welt bis auf Mose von Wilhelm Pressel; dann auch die Anmerkung auf S. 246.

und würde in jeder Richtung des Auges ein Milchstrafsensystem liegen, dann müfste der ganze Sternenhimmel mit nahezu gleichmäfsiger Lichtglut auf uns herableuchten. Die Vorstellung, dafs die Körperwelt von den kleinsten Systemen zu immer gröfseren geordnet sei, dafs, wie Monde zu den Planeten, Planeten zu dem Sonnensystem gehören, sich auch Sonnensysteme zu Milchstrafsensystemen, Milchstrafsenschwärme wiederum zu Milchstrafsengalaxien vereinigen und so fort bis ins Unendliche — diese Vorstellung ist als eine rein willkürliche nicht mehr haltbar. . . . Bei dem heutigen Stand der Wissenschaft ist die Annahme völlig gerechtfertigt, dafs die sternen- und nebelfreien Öffnungen am Himmel Blicke in den leeren Raum verstatten, und dafs der letzte, schwächste Schimmer des Milchstrafsensystems uns zugleich die Grenze der Körperwelt bezeichnet."

Mit der räumlichen Begrenzung geht, wenn auch in unendlich weite Zeitperioden gerückt, die zeitliche Begrenzung Hand in Hand. Der Mond ist wasserlos und damit tot, er ist eine Leiche, ausgedörrt wie eine Mumie. Der Erde Jugend ist vorüber, ihre Kruste wird immer dicker und ist sie einstmals bis aufs Mark erstarrt, so wird das Wasser der Ozeane, dem Zuge der Schwere folgend, bis in die gröfsten Tiefen hinabsteigen und somit von der Erdoberfläche gänzlich verschwinden*). Auch die Sonne altert schon,

*) Falb, die Umwälzungen im Weltall S. 78: „Das Meer ist im Verschwinden begriffen, die Menge des Wassers war auf der Erdoberfläche einstens viel bedeutender als gegenwärtig. Auf den höchsten Spitzen der Berge, wie in den Tiefen der Thäler sehen wir die Spuren desselben, sehen wir die Überreste von Wassertieren, selbst im Innern der Kontinente, weit von allen Meeresküsten entfernt. Und überall finden wir im Boden, zwischen den Gesteinsschichten unter unsern Füfsen Wasser, welches einst, als die Temperatur der Erdoberfläche noch sehr hoch war, als Dampf in der Atmosphäre vorhanden gewesen sein und später nach der Kondensation dieses Dampfes, als Meer die ganze Erdoberfläche bedeckt haben mufste. In dem Mafse, als die heifsflüssigen Massen der Erde erstarrten, drang das Wasser in die Tiefe uud findet sich als Grundwasser allenthalben, wo wir tief genug zu bohren vermögen.

Dieser Prozefs setzt sich ununterbrochen fort. Tiefer und tiefer rückt die Erstarrung der innern Schichten und gierig verbinden sich die kalten Gesteine mit dem durch seine Schwere nachrückenden Wasser. Sie verbinden sich nicht nur mechanisch, sondern auch chemisch. Und diese letzte Verbindung ist eine dauernde. Daher kommt nur ein kleiner Teil des Wassers, welches als Regen in den Boden dringt, als Quelle wieder an die Oberfläche. Der gröfste Teil ist bleibend im Innern gebunden. Der Mond hat keinen Tropfen Wasser mehr; er hat alles wie ein Schwamm in sich eingesaugt. Im Monde sehen wir, wie in einem Spiegel, auch unsere Zukunft."

ihre Flecken sind bedenkliche Anzeichen ihrer einstigen Erstarrung. Dazu kommt noch, „dafs aller Kraftvorrat in Wärme übergehen und alle Wärme in das Gleichgewicht der Temperatur kommen wird. Dann ist jede Möglichkeit einer weiteren Veränderung erschöpft, dann mufs vollständiger Stillstand aller Naturprozesse von jeder nur möglichen Art eintreten.“ „Wenn aber das Leben des Weltalls das Verwandeln der verschiedenartigsten Bewegungen in einander ist, so ist Stillstand aller Naturprozesse der Tod des Weltalls. So nimmt alles ein Ende, die Welt, wie sie ist, hat kein ewiges Bestehen*).“ Schrecklich wäre der Gedanke an das Ende der gesamten Schöpfung, wenn nicht die Worte der Verheifsung, dafs ein neuer Himmel und eine neue Erde werden solle, uns reichen Trost gewähren könnten. Im Hinblick auf jene letzten Tage sagt der unvergefsliche Peschel: „Wer einer materialistischen Weltanschauung huldigt, der mag vielleicht den Kopf schütteln über solch eine Welt, die unaufhaltsam ihrem Ende entgegeneilt und mit Mephistopheles im Faust ausrufen:

Alles, was entsteht,
ist wert, dafs es zu Grunde geht;
drum besser wär's, dafs nichts entstünde.

Wer jedoch an eine Welt des Geistes glaubt, die sich auf Erden wohl in den Schranken des Körperlichen bewegt, aber durchaus nicht mit demselben steht und fällt, dem wird die Lösung

*) Falb, die Umwälzungen im Weltall S. 83: Wenn aber das wissenschaftlich gefundene Resultat vom endlichen Ersterben des Weltprozesses unangreifbar und richtig ist, so gibt es auf die Frage: warum ist dieses Ende nicht längst schon eingetreten, da wir doch eine Ewigkeit der Entwicklungszeit vor uns haben? nur eine einzige Antwort und diese lautet: „Wir haben eben keine Ewigkeit vor uns, die Welt ist in der That, wie es die Bibel lehrt, in der Zeit entstanden.“ Die höhere Mathematik und die neueste Physik würden also die Weltschöpfung in der Zeit, und dann natürlich aus nichts, durch den Kalkul haarscharf beweisen. Und keiner von allen, die die Wissenschaft achten, dürfte sich gegen solchen Beweis sträuben. Denn sobald die Wissenschaft den Schöpfungsakt entdeckt, mufs sie denselben anerkennen, wenn sie Gott findet, mufs sie ihn proklamieren! Und Adolf Fick sagt: „Entweder sind bei den höchsten allgemeinsten und fundamentalsten Abstraktionen der Naturwissenschaft wesentliche Punkte übersehen oder — wenn diese Abstraktionen vollkommen streng und allgemein gültig sind — dann kann die Welt nicht von Ewigkeit her da sein, sondern sie mufs in einem von heute nicht unendlich entfernten Zeitpunkt durch ein in der Kette des natürlichen Kausalnexus nicht begriffenes Ereignis, d. h. durch einen Schöpfungsakt entstanden sein.“ A. Fick, die Naturkräfte in ihrer Wechselbeziehung. 6 Vorträge. Würzburg 1869.

des grofsen Rätsels der Weltbestimmung zwar ebenfalls unmöglich sein; die Bestimmung des Menschen wird ihm um so klarer vorschweben. Er wird sich sagen: Wenn dereinst die Erde das liebliche Gewand, in welches sie sich jetzt noch hüllt, abgelegt hat und eine leblose Schlacke geworden ist, dann hat sie, soweit wir es zu beurteilen vermögen, wenigstens dem herrlichen Zwecke gedient, eine Entwicklungsstätte zu sein für Geister, deren Leben ein ewiges ist. Wo dieses Leben stattfindet, das ist und bleibt uns Staubgeborenen verhüllt, solange wir uns hier auf dem grofsen Schauplatz der Vergänglichkeit bewegen. Aber die Thatsache desselben steht uns ebenso fest, als es neben der sinnlichen Welt noch eine Welt des Geistes gibt, die nicht wie jene ein Trümmerhaufen werden kann". Und Secchi, der grofse Astronom und geistreiche Jesuit, spricht: „Die wahre Wissenschaft wie die wahre Philosophie gibt uns stets mehr, als sie uns nimmt, und wenn wir von Welten sprechen, deren Herzschlag einst stille stehen wird, so zeigt sie uns zugleich, dafs die Kräfte, welche ihnen alle ihre Lebens- und Entwicklungsfähigkeiten gegeben haben, nicht in das Nichts zurückgeführt werden können. In der Natur kann nichts verloren gehen, und aus dem Tode mufs überall neues Leben erwachsen."

Darum gelobt sei der, der da spricht:

„*Siehe, ich mache alles neu. Ich bin das A und das Ω, der Anfang und das Ende, der da ist, und der da war, und der da kommt; der Allmächtige*".

(Offenbarung St. Johannis 21, 5. 1, 8).

IV. Teil.

Mathematische Geographie in Ziffern.

(Vierundzwanzig Tabellen.)

»Keine Mühe ist vergebens, die einem andern Mühe ersparen kann.«
Lessing.

IV. Teil.

Mathematische Geographie in Zahlen.

Einige Worte über das Rechnen mit Logarithmen.

Die Logarithmen erleichtern das Rechnungsgeschäft wesentlich. Denn bei dem Rechnen mit Logarithmen verwandelt sich das weitläufigere Multiplizieren in das kürzere Addieren, das Dividieren in Subtrahieren, das Potenzieren in Multiplizieren und das Radizieren in Dividieren; in Zeichen:

$$1.\quad a \cdot b = x; \quad \lg x = \lg a + \lg b;$$

$$2.\quad a : b = x; \quad \lg x = \lg a - \lg b;$$

$$3.\quad a^b = x; \quad \lg x = b \lg a;$$

$$4.\quad \sqrt[b]{a} = x; \quad \lg x = \frac{\lg a}{b}.$$

Die Brigg'schen Logarithmen sind Exponenten der Zahl 10. Der Logarithmus oder Exponent der Zahl 10 besteht aus zwei Teilen, nämlich aus Ganzen und Dezimalen. Jene heifsen die Kennziffer oder Charakteristik (k), diese die Mantisse (m). Die Bezeichnung

$$10 \lg z = n = k + m$$

lautet in Worten ausgedrückt also:

Der Logarithmus von der Zahl z in Beziehung auf den Grundfaktor 10 ist n d. i. bestehend aus einem Dezimalbruch mit Ganzen und Dezimalen, oder aber aus der Kennziffer k und der Mantisse m.

Da $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$*) u. s. f. ist, so ergeben sich für 10 und die Potenzen aus Zehn folgende Logarithmen:

$$0 = \lg 1;\ 1 = \lg 10;\ 2 = \lg 100;\ 3 = \lg 1000 \quad \text{u. s. f.}$$

Da ferner $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$ ist, so ist wiederum

$$-1 = \lg 0{,}1;\ -2 = \lg 0{,}01;\ -3 = \lg 0{,}001 \quad \text{u. s. f.}$$

Denken wir uns alle Zahlen aus 10 entsprungen, so erhalten wir eine unendliche Reihe von Dezimalen, welche den Zahlenraum

*) 10^0, 10^1, 10^2 ... lies: 10 hoch 0, 10 hoch 1, 10 hoch 2 u. s. f.

von 1 bis 10 auszufüllen haben. Durch Multiplikation mit 10, 100, 1000 u. s. f. vermögen wir die Dezimalen in mehrstellige ganze Zahlen zu verwandeln. Stellt nun z eine einstellige, $10 \cdot z$ eine zweistellige, $100 \cdot z$ eine dreistellige, $1000 \cdot z$ eine vierstellige ganze Zahl vor, so ist:

$$\begin{aligned}
\lg z &= & & 0+m \\
\lg 10z &= \lg 10 &+ \lg z = & 1+m \\
\lg 100z &= \lg 100 &+ \lg z = & 2+m \\
\lg 1000z &= \lg 1000 &+ \lg z = & 3+m \\
\lg z \cdot 0{,}1 &= \lg 0{,}1 &+ \lg z = & -1+m \\
\lg z \cdot 0{,}01 &= \lg 0{,}01 &+ \lg z = & -2+m \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Aus diesen Beispielen ist zu entnehmen, dafs

1. die Kennziffer von der Anzahl der Zifferstellen, die Mantisse von den Werten der einzelnen Ziffern abhängt und diese deshalb zu unendlich vielen Zahlen gehören kann;
2. die Charakteristik $n-1$ Ganze hat, wenn die gegebene Zahl aus n Zifferstellen besteht.

Ist sonach ein Logarithmus gegeben, so mufs der ihm zukommende Numerus $(n+1)$ Zifferstellen enthalten. Die Charakteristik eines echten Dezimalbruches ist negativ und zählt soviele negative Einheiten als der Bruch Nullen an der Spitze hat. Denn

$$\lg 0{,}045 = \lg 45 - \lg 1000 = 1{,}62839 - 3 = 0{,}62839 - 2.$$

Mithin verlangt eine negative Kennziffer einen Bruch mit sovielen Nullen an der Spitze, als sie negative Einheiten zählt. Die Charakteristiken bei den Winkelfunktionen sind meistenteils negativer Art. Sie drückt man nach S. 37 in anderer Weise als bei den gewöhnlichen Zahlen aus. Die Kennziffer 10 oder 0 ohne Dezimalbruch deutet nach derselben Seite auf 1, die Charakteristik 10 oder 0 mit einem Bruch entweder auf eine einstellige ganze Zahl oder auf einen unechten Dezimalbruch mit einer einstelligen ganzen Zahl. Die Kennziffer 11 oder 1 verlangt eine zweistellige ganze Zahl mit oder ohne Dezimalbruch. Hat man die Charakteristik 9 oder 8 oder 7 vor sich, so weifs man nach S. 37, dafs der Logarithmus einen echten Dezimalbruch zu bedeuten hat. Ergibt die Rechnung den Logarithmus m, so kann es vorkommen, dafs derselbe in den Tafeln nicht Ziffer für Ziffer zu finden ist. Er steht gleichsam in der Mitte zwischen einem kleineren und gröfseren Logarithmus. Bezeichnen wir den ersten mit m_1, den andern mit m_2, so ist

$$m_1 < m < m_2.$$

Fassen wir alle drei Werte als die Logarithmen der Dezimalbrüche z_1, z, z_2 auf, so können wir z_2 als den gekürzten Dezimalbruch, z als den ungekürzten Dezimalbruch ansehen. Aus z konnte nur deshalb z_2 werden, dafs die Endziffer weggelassen wurde und die Endziffer des Bruches z_1 um 1, d. i. um $^{10}/_{10}$, erhöht wurde.

Wenn nun die eine Differenz $m_2 - m_1$; die andere $m - m_1$ ist, so kommt man auf die fehlende oder weggelassene Endziffer e durch die Proportion

$$m_2 - m_1 : m - m_1 = 10 : e$$

$$e = \frac{10\,(m - m_1)}{m_2 - m_1}.$$

Mehr Stellen als zwei berechnen zu wollen, ist nicht ratsam, da schon die 3. Stelle nicht mehr genau wird.

Ist nun $m - m_1 = \mu$, so ist $m_1 + \mu = m$. In dem Fall nämlich, dafs der Logarithmus nicht für die Zahl z, sondern nur der für z_1 gegeben ist, bringt man in Ansatz

$$10 : e = m_2 - m_1 : \mu$$

$$\mu = \frac{e\,(m_2 - m_1)}{10}.$$

Die Addition μ zu m_1 führt auf den Logarithmus m der Zahl z.

Damit man von diesen Nebenrechnungen verschont bleibt, sind den Logarithmentafeln Differenztäfelchen, unter der Bezeichnung P. P. d. i. partes proportionales beigegeben. Darinnen ist $m_2 - m_1$ und e zu finden. Ist $m - m_1$ berechnet, so sucht man seinen Wert in dem Täfelchen P. P. unter $m_2 - m_1$ auf. Seine Stelle weist auf die nebenstehende Endziffer e, und e führt auch wieder auf $m - m_1$. Sollte endlich der eine Logarithmus vom andern sich nicht subtrahieren, oder die negative Kennziffer ohne Rest sich nicht teilen lassen, so addiert man zum Logarithmus die Differenz $a - a$. Einige Beispiele werden für die Exemplifizierung genügend sein.

1. Aufgabe:

$$26 \times 413 = x.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 26 + \lg 413 \\ &= 1{,}41\,497 \\ & \underline{2{,}61\,595} \\ & 4{,}03\,092. \end{aligned}$$

Dieser Logarithmus findet sich in der Tafel nicht. $\lg z_1 = 0{,}03\,060$; $\lg z_2 = 0{,}03\,100$. $m_2 - m_1 = 40$; $m - m_1 = 32$, folglich

$$e = \frac{10 \times 32}{40} = 8$$

(siehe Dr. O. Schlömilch, Brigg'sche Logarithmen S. 2 unter P. P.).

$\lg z_1$ hat Numerus 1,073
$\lg z$ „ „ 1,0738
$\lg z_2$ „ „ 1,074.

$$x = 1{,}0738 \times 10\,000 = 10\,738.$$

2. Aufgabe:

$$26 : 413 = x.$$

Lösung:

$$\lg x = \lg 26 - \lg 413$$
$$= 3{,}414973 - 2$$
$$- 2{,}615950$$
$$\overline{0{,}799023 - 2.}$$

$\lg z_1 = 0{,}79900$; $\lg z_2 = 0{,}79906$; $m_2 - m_1 = 6$; $m - m_1 = 2{,}3$;

folglich $$e = \frac{10 \times 2{,}3}{6} = 3{,}8\ldots$$

(siehe Tafel unter P. P. S. 19, wobei in Ansatz zu bringen ist $2{,}4 : 2{,}3 = 4 : x$).

$\lg z$ hat den Numerus 6,29538 ...

$$x = 6{,}29538\ldots \times 0{,}01 = 0{,}0629538\ldots$$

3. Aufgabe:

$$26^3 = x.$$

Lösung:

$$\lg x = 3 \lg 26$$
$$= 1{,}414973 \times 3 = 4{,}24492.$$

$\lg z_1 = 0{,}24477$; $\lg z_2 = 0{,}24502$; $m_2 - m_1 = 25$; $m - m_1 = 15$,

folglich $$e = \frac{10 \times 15}{25} = 6$$

(siehe Dr. O. Schlömilch, Brigg'sche Logarithmen S. 4 unter P. P.).

$\lg z$ hat Numerus 1,7576

$$x = 1{,}7576 \times 10\,000 = 17576.$$

4. Aufgabe:

$$\sqrt[3]{0{,}26} = x.$$

Lösung:
$$\lg x = \frac{\lg 0{,}26}{3}$$
$$= \frac{2{,}41497 - 3}{3} = 0{,}80499 - 1.$$

$\lg z_1 = 0{,}80496$; $\lg z_2 = 0{,}80502$; $m_2 - m_1 = 6$; $m - m_1 = 3$,

folglich
$$e = \frac{10 \times 3}{6} = 5$$
(siehe Dr. O. Schlömilch, Brigg'sche Logarithmen S. 19 unter P. P.).

$\lg z$ hat Numerus 6,3825

$$x = 6{,}3825 \times 0{,}1 = 0{,}63825.$$

5. Aufgabe:

$$\sqrt[3]{17\,576} = x.$$

Lösung:
$$\lg x = \frac{\lg 17\,576}{3}$$

$$\lg 1{,}757 = 0{,}24477;\ m_2 - m_1 = 25;\ e = 6,$$

folglich
$$\mu = \frac{6 \times 25}{10} = 15$$
(siehe Dr. O. Schlömilch, Brigg'sche Logarithmen S. 4 unter P. P.).

$$\lg 17\,576 = 4{,}24477 + 0{,}00015 = 0{,}24492,$$

folglich
$$\lg x = \frac{4{,}24492}{3} = 1{,}414973$$
$$x = 26.$$

6. Aufgabe:

$$0{,}63825^3 = x.$$

Lösung:
$$\lg x = 3 \lg 0{,}63825$$
$$\lg 0{,}6382 = 9{,}80496;\ m_2 - m_1 = 6;\ e = 5,$$

folglich
$$\mu = \frac{6 \times 5}{10} = 3$$
(siehe Dr. O. Schlömilch, Brigg'sche Logarithmen S. 19 unter P. P.).

$$\lg 0{,}63825 = 9{,}80496 + 0{,}00003 = 0{,}80499 - 1 \times 3 = 0{,}41497 - 1$$
$$x = 0{,}26.$$

7. Aufgabe:

$$0{,}026 \times 0{,}413 = x.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 0{,}026 + \lg 0{,}413 \\ &= 0{,}41497 - 2 \\ & \underline{0{,}61595 - 1} \\ & 1{,}03092 - 3 = \\ & 0{,}03092 - 2 \\ x &= 0{,}010738. \end{aligned}$$

8. Aufgabe:

$$26 : 0{,}0413 = x.$$

Lösung mit Beachtung der Regel von der Subtraktion einer Differenz $(c - x)$ von einer Zahl a siehe S. 159 oder S. 212:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 26 - \lg 0{,}0413 \\ &= 1{,}414973 \\ & \underline{-0{,}615959 + 2} \\ & 0{,}799023 + 2 = 2{,}799023 \\ x &= 629{,}538 \ldots \end{aligned}$$

Für unsern Zweck dürfte die vorliegende Darstellung genügend sein, eine genaue Einsicht in das Rechnen mit Logarithmen kann man sich nur durch ein arithmetisches Lehrbuch verschaffen. Die fünfstelligen Logarithmentafeln von Dr. O. Schlömilch sind schon auf S. 37 empfohlen worden; Vegas Logarithmentafeln, herausgegeben von Bremiker, geben siebenstellige Logarithmen.

Tabelle I.

Logarithmen oft vorkommender Zahlen.

Konstante	z	$\lg z$
lg nat. 10	2,30259	0,36222
π	3,14159	0,49715
$^1/_2\,\pi$	1,57079	0,19510
$^1/_4\,\pi$	0,78540	9,89509
$^1/_6\,\pi$	0,52360	9,71900
2π	6,28319	0,79818
π^2	9,86960	0,99430
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857
$\frac{\pi}{180}$	0,01745	8,24188
$\frac{180}{\pi}$	57,2958	1,75812
$\frac{360}{\pi}$	114,5916	2,05915
$\sqrt{2}$	1,41421	0,15051
Der Radius einer Kugel, die gleichen Inhalt mit der Erde hat, r	6370,284 km	3,80416
$r\sqrt{\pi}$	11291 „	4,05273
$r\sqrt{2}$	9009,1 „	3,95468
Ein Äquatorgrad	111,307 „	2,04652
Ein mittlerer Meridiangrad	111,121 „	2,04579
Eine geographische Meile = $^1/_{15}$ Äquatorgrad	7,4204 „	0,87043
Eine geographische Quadratmeile	55,063 qkm	1,74086
Eine Seemeile = $^1/_{60}$ Grad = 1′	1851,9 m	3,26761
Ein Pariser Fufs	0,32484 „	9,51167
Ein englischer Faden	1,82874 „	0,26216
Ein Sterntag	86164 s	4,93533

Tabelle II.

Die Längen- und Breitengrade der Gradabteilungen der Erde.

Erläuterungen S. 84 und 85.

(Nach den Bessel'schen Dimensionen berechnet von Bremiker.)

φ	1° Länge km	φ	1° Breite km	φ	1° Länge km	φ	1° Breite km
0	111,307	0—1	110,564	35	91,277	35—36	110,938
1	111,290	1—2	110,565	36	90,153	36—37	110,957
2	111,239	2—3	110,566	37	89,001	37—38	110,975
3	111,155	3—4	110,568	38	87,822	38—39	110,994
4	111,037	4—5	110,571	39	86,616	39—40	111,013
5	110,886	5—6	110,574	40	85,384	40—41	111,032
6	110,701	6—7	110,578	41	84,125	41—42	111,052
7	110,482	7—8	110,583	42	82,841	42—43	111,071
8	110,231	8—9	110,588	43	81,531	43—44	111,090
9	109,945	9—10	110,594	44	80,197	44—45	111,110
10	109,627	10—11	110,601	45	78,837	45—46	111,129
11	109,275	11—12	110,608	46	77,454	46—47	111,149
12	108,890	12—13	110,616	47	76,047	47—48	111,168
13	108,472	13—14	110,624	48	74,616	48—49	111,187
14	108,021	14—15	110,633	49	73,163	49—50	111,207
15	107,538	15—16	110,643	50	71,687	50—51	111,226
16	107,022	16—17	110,653	51	70,189	51—52	111,245
17	106,473	17—18	110,664	52	68,670	52—53	111,264
18	105,893	18—19	110,675	53	67,129	53—54	111,283
19	105,280	19—20	110,687	54	65,568	54—55	111,301
20	104,635	20—21	110,700	55	63,986	55—56	111,320
21	103,958	21—22	110,713	56	62,385	56—57	111,338
22	103,250	22—23	110,726	57	60,765	57—58	111,356
23	102,511	23—24	110,740	58	59,126	58—59	111,373
24	101,740	24—25	110,754	59	57,468	59—60	111,391
25	100,938	25—26	110,769	60	55,793	60—61	111,408
26	100,106	26—27	110,784	61	54,101	61—62	111,424
27	99,243	27—28	110,800	62	52,392	62—63	111,440
28	98,350	28—29	110,816	63	50,667	63—64	111,456
29	97,427	29—30	110,833	64	48,926	64—65	111,472
30	96,475	30—31	110,849	65	47,170	65—66	111,487
31	95,493	31—32	110,867	66	45,399	66—67	111,501
32	94,482	32—33	110,884	67	43,615	67—68	111,515
33	93,442	33—34	110,902	68	41,816	68—69	111,529
34	92,374	34—35	110,920	69	40,005	69—70	111,542

φ	1° Länge km	φ	1° Breite km	φ	1° Länge km	φ	1° Breite km
70	38,182	70 — 71	111,555	80	19,391	80 — 81	111,649
71	36,347	71 — 72	111,567	81	17,469	81 — 82	111,655
72	34,500	72 — 73	111,578	82	15,542	82 — 83	111,661
73	32,643	73 — 74	111,589	83	13,610	83 — 84	111,666
74	30,775	74 — 75	111,600	84	11,673	84 — 85	111,670
75	28,898	75 — 76	111,609	85	9,733	85 — 86	111,673
76	27,013	76 — 77	111,619	86	7,790	86 — 87	111,676
77	25,118	77 — 78	111,627	87	5,845	87 — 88	111,678
78	23,216	78 — 79	111,635	88	3,898	88 — 89	111,679
79	21,307	79 — 80	111,643	89	1,949	89 — 90	111,680
				90	0,000	0 — 90	10000,856

Anmerkung. Das Wachsen der Meridiangrade gegen die Pole zu, wie es aus vorstehender Tabelle zu ersehen ist, hat seinen Grund in der Abplattung der Erde an den beiden Polen, so dafs die Erde keine reine Kugelgestalt, sondern ein elliptisches Sphäroid bildet. Die Erklärung dieser Thatsache findet man auf S. 178. Die halbe grofse Achse a des Sphäroides mifst 6377,397 km und die halbe kleine Achse b = 6356,079 km. Die Abplattung oder das Verhältnis des Unterschiedes der halben Achsen zur halben grofsen Achse wird ausgedrückt durch $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$. Aus der halben grofsen Achse ergibt sich die Länge des Äquators und damit die eines Äquatorgrades von 111,307 km.

Tabelle III.

Geographische Längen und Breiten wichtiger Orte.

Erläuterung S. 85 bis 89.

Name des Ortes	Geogr. Breite	Geogr. Länge östl. v. Ferro	Name des Ortes	Geogr. Breite	Geogr. Breite östl. v. Ferro
Aachen	50° 46′ 34″	23° 44′ 17″	Brünn	49° 11′ 39″	34° 16′ 30′
Alexandrien . .	31 11 47	47 31 15	Brüssel	50 51 11	22 01 52
Altenburg	50 59 02	30 06 02	Calcutta	22 34 15	106 09 30
Altona	53 32 45	27 36 15	Chemnitz	50 49 32	30 35 15
Amsterdam . . .	52 22 30	22 32 54	Constantinopel .	41 01 27	46 35 15
Antwerpen . . .	51 13 15	22 03 55	Danzig	54 21 18	36 19 51
Augsburg	48 21 44	28 33 53	Darmstadt . . .	49 52 21	26 19 23
Barmen	51 16 20	24 51 50	Dessau	51 50 06	29 56 44
Basel	47 33 25	25 15 23	Dorpat	58 22 47	44 23 14
Berlin	52 30 17	31 03 30	Dresden	51 03 15	31 24 14
Bern	46 57 06	25 06 11	Dublin	53 23 13	11 19 15
Bonn	50 43 45	24 45 45	Düsseldorf . . .	51 13 42	24 26 14
Bremen	53 04 48	26 28 06	Eisenach	50 58 55	27 57 30
Breslau	51 06 56	34 42 03	Elberfeld	51 15 24	24 49 39

Name des Ortes	Geogr. Breite	Geogr. Länge östl. v. Ferro	Name des Ortes	Geogr. Breite	Geogr. Länge östl. v. Ferro
Erfurt	50°58′49″	28°42′15″	Madras	13°04′08″	97°54′01″
Erlangen	49 35 48	28 40 04	Madrid	40 24 57	13 52 30
Ferro	28 00 00	00 00 00	Magdeburg	52 08 04	29 18 30
Flensburg	54 47 00	27 05 40	Mailand	45 28 01	26 51 18
Florenz	43 46 41	28 55 30	Marseille	43 17 49	23 01 46
Frankfurt a. M.	50 06 43	26 21 00	Melbourne*	37 49 53	163 38 20
Frankfurt a. O.	52 22 08	32 13 00	Metz	49 07 14	23 50 23
Freiberg	50 55 00	31 00 20	Moskau	55 45 20	55 13 53
Freiburg i. B.	47 59 46	25 31 00	München	48 08 20	29 14 14
Fulda	50 33 44	27 20 09	Neapel	40 51 47	31 54 22
Fürth	49 28 35	28 39 00	New-York	40 43 48	303 40 30
Genf	46 11 59	23 49 03	Nürnberg	49 27 30	28 44 26
Genua	44 25 00	26 37 42	Odessa	46 28 55	48 23 49
Glasgow	55 52 43	13 21 45	Ofen	47 29 10	36 42 46
Gotha	50 56 37	28 22 32	Oxford	51 45 36	16 23 59
Göttingen	51 31 48	27 36 20	Palermo	38 06 44	31 01 02
Gratz	47 04 20	33 06 26	Paris	48 50 13	20 00 00
Greifswalde	54 15 04	31 35 25	Passau	48 34 38	31 07 51
Greenwich	51 28 38	17 39 45	Peking	39 54 13	134 07 30
Haag	52 04 40	21 58 25	Petersburg	59 56 30	47 58 02
Halle a. S.	51 29 38	29 37 30	Philadelphia	39 57 08	302 30 03
Hamburg	53 33 07	27 38 22	Prag	50 05 18	32 05 06
Hannover	52 22 20	27 24 09	Quito*	00 13 17	298 54 30
Heidelberg	49 24 40	26 22 20	Regensburg	49 00 53	29 46 00
Hildesheim	52 09 12	27 36 55	Rom	41 53 54	30 08 45
Innsbruck	47 16 10	29 03 44	Rotterdam	51 55 20	22 09 00
Jena	50 56 29	29 17 00	Schleswig	54 31 08	27 13 53
Jerusalem	31 46 34	53 00 00	Smyrna	38 28 07	44 46 30
Kairo	30 03 21	48 58 00	Stockholm	59 20 31	35 43 15
Karlsruhe	49 00 42	26 04 43	Strafsburg	48 34 57	25 24 54
Kassel	51 19 00	27 10 00	Stuttgart	48 46 56	26 50 31
Kiel	54 19 25	27 49 06	Sydney*	33 51 41	168 54 38
Koblenz	50 21 39	25 15 44	Trier	49 45 25	24 18 07
Köln	50 56 32	24 37 28	Triest	45 38 37	31 26 12
Königsberg	54 42 51	38 09 30	Turin	45 04 06	25 21 44
Kopenhagen	55 40 53	30 14 35	Ulm	48 23 56	27 39 27
Krakau	50 03 50	37 37 19	Upsala	59 51 50	35 18 00
Leipzig	51 20 06	30 03 16	Venedig	45 25 53	30 00 59
Lissabon	38 42 24	8 31 15	Warschau	52 13 06	38 41 25
Liverpool	53 24 48	14 39 40	Washington	38 53 39	300 56 41
London	51 30 49	17 34 13	Wien	48 12 36	34 02 42
Lübeck	53 51 31	28 20 30	Würzburg	49 46 06	27 35 15
Lyon	45 45 58	22 29 15	Zürich	47 22 33	26 11 15

* Ort südlicher Breite.

Anmerkung 1. Die geographischen Längen in vorstehender Tabelle sind in einer Richtung, der östlichen, gegeben. Scheidet man durch den Nullmeridian die Erde in eine östliche und westliche Hälfte, so gibt es eine Zählung nach Osten wie nach Westen bis zu 180^0. Die östliche Zählung bezeichnet man mit plus (+), die westliche mit minus (—). Mit der Vertauschung des Nullmeridians, wandelt sich auch das Vorzeichen. Ist ein Ort B von A um $+\lambda$ entfernt, so ist umgekehrt die Entfernung von A nach B $-\lambda$. Wenn die östliche Länge eines Ortes durch λ, seine westliche Länge durch $-\lambda'$ bezeichnet ist, so ist die Entfernung des Nullmeridians von diesem Ort $+\lambda'$. Beide Koordinaten ergänzen sich zu einem vollen Winkel; also ist $\lambda + \lambda' = 360^0$; mithin

$$\lambda = 360^0 - \lambda' \text{ und wiederum } \lambda' = 360^0 - \lambda.$$

Hieraus folgt, dafs man die östliche Länge findet, wenn man die westliche Länge von 360^0 in Abzug bringt und die westliche Länge, sobald man die östliche Länge von 360^0 subtrahiert. Als Beispiel diene New-York. Dessen geographische östliche Länge beträgt $303^0 40' 30''$; somit zählt es in westlicher Richtung

$$360^0 - (303^0 40' 30'') = 56^0 19' 30''.$$

Anmerkung 2. Hat in Bezug des Nullmeridians ein Tausch einzutreten, so ist damit eine Umrechnung der vorstehenden geographischen Längen verbunden. Bezeichnen wir kurz den bisherigen Anfangsmeridian mit A, den neuen Nullmeridian mit A', die bisherige östliche Länge A mit $+\lambda$, so ist

$$A = o;\quad A' = +\lambda \text{ und}$$
$$A' = o;\quad A = -\lambda.$$

Die auf den Meridian A bezogene Länge von B sei $\lambda_1 = \lambda + x$; die von G sei $\lambda_2 = \lambda - y$ und endlich die von N sei $o - \lambda_3 = \lambda - z$. Wechseln wir A mit A', so ist für $+\lambda$ stets $-\lambda$ zu setzen. Führen wir durch Addition zu beiden Seiten einer jeden Gleichung diese negativ gewordene Gröfse ein, so wandeln wir das auf den Meridian A bezogene System um auf den Meridian von A'. Es ist dann

$$\begin{aligned} B &= \lambda_1 - \lambda = \lambda + x - \lambda = x \\ G &= \lambda_2 - \lambda = \lambda - y - \lambda = -y \\ N &= o - (\lambda_3 + \lambda) = \lambda - z - \lambda = -z. \end{aligned}$$

Liegt A von A' um $-\lambda^0$ ab und ist $B = x = \lambda_1 - \lambda$; $G = -y = \lambda_2 - \lambda$; ferner $N = -z = -(\lambda_3 + \lambda)$, so wird die Umwandlung des Systems von A' auf A vorgenommen, wenn man auf beiden Seiten in jeder Gleichung, da λ aus der westlichen Richtung in die östliche übergeht, $+\lambda$ hinzuaddiert. Es ist dann

$$\begin{aligned} B &= x + \lambda = \lambda_1 - \lambda + \lambda = \lambda_1 \\ G &= \lambda - y = \lambda_2 - \lambda + \lambda = \lambda_2 \\ N &= \lambda - z = -\lambda_3 - \lambda + \lambda = -\lambda_3 \end{aligned}$$

Suchen wir diese Sätze durch einige Beispiele zu beleben und nehmen wir A' = Paris 20^0 östlich von Ferro, B = Berlin $31^0 3' 30''$ östlich von Ferro, G = Greenwich $17^0 39' 45''$ östlich von Ferro, N = New-York $56^0 19' 30''$ westlich von Ferro, so gelangen wir zu folgenden Pariser Längen:

1. Berlin ist östlich von Paris

$$x = (31^{\circ}\,3'\,20'' - 20) = 11^{\circ}\,3'\,20'';$$

2. Greenwich ist westlich von Paris

$$-y = (17^{\circ}\,39'\,45'' - 20^{\circ}) = -2^{\circ}\,20'\,15'';$$

3. New-York ist westlich von Paris

$$-z = -(20^{\circ} + 56^{\circ}\,19'\,30'') = -76^{\circ}\,19'\,30''.$$

Die Pariser Längen gestalten sich wieder zu Längen von Ferro, sobald wir zu ihnen 20° addieren. So ist

1. Berlin östlich von Ferro

$$\lambda_1 = (11^{\circ}\,3'\,30 + 20) = 31^{\circ}\,3'\,30'';$$

2. Greenwich östlich von Ferro

$$\lambda_2 = (-2^{\circ}\,20'\,15'' + 20) = 17^{\circ}\,39'\,45'';$$

3. New-York westlich von Ferro

$$-\lambda_3 = (-76^{\circ}\,19'\,30'' + 20) = -56^{\circ}\,19'\,30''.$$

Tabelle IV.

Erläuterung S. 98 und 99 (Orthographische Polarprojektion); S. 145 (Sanson-Flamsteed'sche Projektion); S. 148 (Cylinderprojektion mit rechteckigen Maschen) und S. 163 (Bonne'sche Kegelprojektion).

$$r' = 1 . \cos\lambda = 1 . \cos\varphi.$$

λ	z	lg z	λ	z	lg z
0	1,00000	0,00000	45	0,70711	9,84949
5	0,99619	9,99834	50	0,64279	9,80807
10	0,98481	9,99335	55	0,57358	9,75859
15	0,96593	9,98494	60	0,50000	9,69897
20	0,93969	9,97299	65	0,42262	9,62595
23° 27′ 30″	0,91730	9,96254	66° 32′ 30″	0,39810	9,59997
25	0,90631	9,95728	70	0,34202	9,53405
30	0,86603	9,93753	75	0,25882	9,41300
35	0,81915	9,91336	80	0,17365	9,23967
40	0,76604	9,88425	85	0,08716	9,94030
			90	0,00000	—

Anmerkung. Hat man für den Radius 1 wieder r*) einzusetzen, so ist

$$r' = r . z$$

$$\lg r' = \lg r + \lg z.$$

*) Ein für allemal sei bemerkt, dafs r als eine bestimmte Zahl, wie 10, 20, 30, 40 . . . anzusehen und für die Konstruktion als Basis anzunehmen ist. Es ist demnach $r . z$, wenn $r = 30^{\text{mm}}$ ist,

für $5^{\circ} = 30 \times 0{,}99619 = 29{,}8$ oder $\lg r = \lg 30 + \lg 0{,}99619$

das ist $\lg r = 1{,}47712 + 9{,}99834 = 1{,}47546$

und damit $r' =$ Numerus $29{,}8^{\text{mm}}$ u. s. f.

Bei kleinen Zahlen lohnt sich das Rechnen mit Logarithmen wenig, hier genügt die einfache Multiplikation.

Tabelle V.

Erläuterung S. 100 (Zentrale Polarprojektion); S. 152 und 153 (Kegelprojektion von Ptolemäus) und S. 162 (Bonne'sche Projektion).

$$r' = 1 \cdot \cot \varphi.$$

φ	z	lg z	φ	z	lg z
0	$+\infty$	—	45	1,00000	0,00000
5	11,4300	1,05805	50	0,83910	9,92381
10	5,6713	0,75368	55	0,70021	9,84523
15	3,7321	0,57195	60	0,57735	9,76144
20	2,7475	0,43893	65	0,46631	9,66867
23° 27′ 30″	2,3044	0,36256	66° 32′ 30″	0,43395	9,63744
25	2,1445	0,33133	70	0,36397	9,56107
30	1,7321	0,23856	75	0,26795	9,42805
35	1,4281	0,15477	80	0,17633	9,24632
40	1,1918	0,07619	85	0,08749	8,94195
			90	0,00000	—

Anmerkung. Ist der Radius statt 1 wieder r, so ist

$$r' = r \cdot z$$
$$\lg r' = \lg r + \lg z.$$

Tabelle VI.

Erläuterung S. 101 (Stereographische Polarprojektion).

$$r' = 1 \cdot \tan (45 - {}^1/_2\, \varphi).$$

φ	z	lg z	φ	z	lg z
0	1,00000	0,00000	50	0,36397	9,56107
10	0,83910	9,92381	60	0,26795	9,42805
20	0,70021	9,84523	66° 32′ 30″	0,20762	9,31727
23° 27′ 30″	0,54859	9,73925	70	0,17633	9,24632
30	0,57735	9,76144	80	0,08749	8,94195
40	0,46631	9,66867	90	0,00000	—

Anmerkung. Im Falle für 1 wieder r eintritt, ist

$$r' = r \cdot z$$
$$\lg r' = \lg r + \lg z.$$

Tabelle VII.

Erläuterung S. 102 und 103 (Orthographische Meridianprojektion).

a) $b = 1 \,.\, \sin\lambda = 1 \,.\, \cos(90 - \lambda) = 1 \,.\, \cos\varphi$.

λ	φ	z	lg z	λ	φ	z	lg z
0	90	0,00000	—	50	40	0,76604	9,88425
10	80	0,17365	9,23967	60	30	0,86603	9,93753
20	70	0,34202	9,53405	66°32′30″	23°27′30″	0,91730	9,96254
23°27′30″	66°32′30″	0,39810	9,59997	70	20	0,93969	9,97299
30	60	0,50000	9,69897	80	10	0,98481	9,99335
40	50	0,64279	9,80807	90	0	1,00000	0,00000

Anmerkung 1. Ist für 1 der Radius r zu nehmen, so ist

$$b = r \,.\, z$$
$$\lg b = \lg r + \lg z.$$

b) $y = 1 \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\varphi$.

z

λ	φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80
90	0	1,00000								
80	10	0,98481	0,96984							
70	20	0,93969	0,92542	0,88304						
60	30	0,86603	0,85287	0,81380	0,75000					
50	40	0,76604	0,75440	0,71985	0,66341	0,58681				
40	50	0,64279	0,63302	0,60403	0,55667	0,49240	0,41318			
30	60	0,50000	0,49240	0,46985	0,43301	0,38302	0,32140	0,25000		
20	70	0,34202	0,33682	0,32140	0,29620	0,26200	0,21985	0,17101	0,11698	
10	80	0,17365	0,16712	0,16318	0,15039	0,13302	0,11162	0,08682	0,05939	0,03015

lg z

λ	φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80
90	0	0,00000								
80	10	9,99335	9,98670							
70	20	9,97299	9,96634	9,94598						
60	30	9,93753	9,93088	9,91052	9,87506					
50	40	9,88425	9,87760	9,85724	9,82178	9,76850				
40	50	9,80807	9,80142	9,78106	9,74560	9,69232	9,61614			
30	60	9,69897	9,69232	9,67196	9,63650	9,58322	9,50705	9,39794		
20	70	9,53405	9,52740	9,50704	9,47158	9,41830	9,34212	9,23302	9,06810	
10	80	9,23967	9,22302	9,21266	9,17720	9,12392	9,04774	8,93862	8,77372	8,47934

Anmerkung 2. Die Kurve läuft horizontal bis an einen Absatz und dann senkrecht, z. B. Kurve $\lambda = 50$ geht von $\varphi = 40$ horizontal bis φ 40, in welcher Kolonne sie sich senkrecht fortbewegt, also horizontal: 0,76604; 0,75440; 0,71985; 0,66341; 0,58681; nun senkrecht: 0,49240; 0,38302; 0,26200; 0,13302.

Anmerkung 3. Beim Radius r ist

$$y = r \,.\, z$$
$$\lg y = \lg r + \lg z.$$

Tabelle VIII.

Erläuterung S. 107 bis 111 (Stereographische Meridianprojektion).

$$QN' = QS' = 2r = 1.$$

a) $x = 1 \,.\, \cot\lambda = PR = 1 \,.\, \cot\varphi$.

$\lambda = \varphi$	z	$\lg z$	$\lambda = \varphi$	z	$\lg z$
0	$+\infty$	—	50	0,83910	9,92381
10	5,6713	0,75368	60	0,57735	9,76144
20	2,7475	0,43893	66° 32′ 30″	0,43395	9,63744
23° 27′ 30″	2,3044	0,36256	70	0,36397	9,56107
30	1,7321	0,23856	80	0,17633	9,24632
40	1,1918	0,07619	90	0,00000	—

Anmerkung 1. Tritt für 1 wieder $2r$ ein, so ist

$$x = PR = 2r \,.\, z$$
$$\lg x = \lg 2r + \lg z.$$

b) $y = 1 \,.\, \operatorname{cosec}\varphi = MR = 1 \,.\, \operatorname{cosec}\lambda$.

$\lambda = \varphi$	z	$\lg z$	$\lambda = \varphi$	z	$\lg z$
0	∞	—	50	1,3054	0,11575
10	5,7588	0,76033	60	1,1547	0,06247
20	2,9238	0,46595	66° 32′ 30″	1,0901	0,03747
23° 27′ 30″	2,5121	0,40003	70	1,0642	0,02701
30	2,0000	0,30103	80	1,0154	0,00665
40	1,5557	0,19193	90	1,0000	0,00000

Anmerkung 2.
$$y = MR = 2r \,.\, z$$
$$\lg y = \lg 2r + \lg z.$$

Anmerkung 3. Bei Figur 113 S. 109 ist $2r = 26^{\text{mm}}$. Der Ort M ist von z 70 Grad entfernt, alsdann ist

$$x = 26 \times 0{,}36397 = 9{,}34^{\text{mm}} \text{ und } MR = 26 \times 1{,}0642 = 28{,}17^{\text{mm}}.$$

Für den Ort B, der auf dem 30. Parallel liegt, ist

$$y = 26 \times 2 = 52^{\text{mm}} \text{ und } PR = 26 \times 1{,}7321 = 45^{\text{mm}}.$$

Tabelle IX.

Erläuterung S. 114 bis 116 (Stereographische Horizontalprojektion).

$L = 50^\circ$ nördlicher Breite. $LZ' = 2r = 1$.

a) $p = 1 \,.\, \tan(\frac{1}{2}\varphi' - 25^\circ)$.

Nördlich von $L = 50^\circ$ n. Br.

φ	z	lg z	φ	z	lg z
50	0,00000	—	70	0,17633	9,24632
60	0,08749	8,94195	80	0,26795	9,42805
66° 32′ 30″	0,14536	9,16245	90	0,36397	9,56107

Südlich von $L = 50^\circ$ n. Br.

φ	z	lg z	φ	z	lg z
50	0,00000	—	0	0,46631	9,66867
40	0,08749	8,94195	10 s. B.	0,57735	9,76144
30	0,17633	9,24632	20	0,70021	9,84523
23° 27′ 30″	0,23585	9,37264	23° 27′ 30″	0,78893	9,89704
20	0,26795	9,42805	30	0,83910	9,92381
10	0,36397	9,56107	40	1,00000	0,00000
			50	1,19180	0,07619

Anmerkung 1. Tritt für 1 wieder $2r$ ein, so ist

$$p = 2r \,.\, z$$
$$\lg p = \lg 2r + \lg z.$$

b) $y = \frac{1}{2} \,.\, \cos 50 : [\sin(25 + \frac{1}{2}\varphi') \cos(\frac{1}{2}\varphi' - 25)]$.

φ	z	lg z	φ	z	lg z
90	0,36397	9,56104	20	0,58011	9,76351
80	0,36713	9,56482	10	0,68400	9,83506
70	0,37684	9,57616	0	0,83910	9,92381
66° 32′ 30″	0,38184	9,58188	10 s. B.	1,08500	0,03546
60	0,39386	9,59534	20	1,51590	0,18068
50	0,41955	9,62279	23° 27′ 30″	1,74690	0,24227
40	0,45616	9,65921	30	2,41610	0,38312
30	0,50771	9,70562	40	5,21490	0,71725
23° 27′ 30″	0,54306	9,73485	50	$-\infty$	—

Anmerkung 2. Sobald man für $\frac{1}{2} \times 1$ wieder r einsetzt, alsdann ist

$$y = r \,.\, z$$
$$\lg y = \lg r + \lg z.$$

c) $R = \frac{\sin 70}{\cos 50 \,.\, \cos 20}$

$z = 1{,}5557; \quad \lg z = 0{,}19193.$

Anmerkung 3. Ist $1 = 2r$, so ist

$$R = 2r \,.\, z$$
$$\lg R = \lg 2r + \lg z.$$

d) $x = \frac{1 \,.\, \cot \lambda \,.\, \sin 70}{\cos 50 \,.\, \cos 20}.$

λ	z	$\lg z$	λ	z	$\lg z$
0	∞	—	50	1,3054	0,11574
10	8,8229	0,94561	60	0,8982	9,95337
20	4,2743	0,63086	70	0,5663	9,75300
30	2,6946	0,43049	80	0,2743	9,43825
40	1,8540	0,26812	90	0,0000	—

Anmerkung 4. In gleicher Weise ist, bei Einstellung von $2r$ für 1

$$x = 2r \,.\, z$$
$$\lg x = \lg 2r + \lg z.$$

Tabelle X.

Erläuterung S. 120 bis 122 (Globularprojektion).

a) $MR = {}^1\!/_2 \sec \left(\tan \vartheta = \lambda \,.\, \frac{2}{\pi}\right) . \operatorname{cosec} \left(\tan \vartheta = \lambda \,.\, \frac{2}{\pi}\right)$

$$x = {}^1\!/_2 \sec \vartheta \,.\, \operatorname{cosec} \vartheta - \lambda \,.\, \frac{2}{\pi}.$$

λ	ϑ	$MR = z$	$\lg MR = \lg z$	$x = z$	$\lg x = \lg z$
0	0° 00′	∞	—	∞	—
5	3 11	9,2279	0,96510	9,1724	0,96248
10	6 20	4,5600	0,65901	4,4489	0,64725
15	9 28	3,0820	0,48883	2,9153	0,46468
20	12 32	2,3603	0,37297	2,1382	0,33005
25	15 31	1,9397	0,28774	1,6619	0,22061
30	18 26	1,6668	0,22188	1,3335	0,12499
35	21 15	1,5143	0,18022	1,1259	0,05150
40	23 38	1,3614	0,13399	0,9169	9,96234
45	26 33	1,2505	0,09708	0,7505	9,87535
50	29 3	1,1779	0,07111	0,6223	9,79403
55	31 26	1,1237	0,05063	0,5126	9,70978
60	33 41	1,0842	0,03511	0,4175	9,62068
65	35 50	1,0535	0,02263	0,3313	9,52022

λ	ϑ	$MR = z$	$\lg MR = \lg z$	$x = z$	$\lg x = \lg z$
70	37° 52′	1,0318	0,01360	0,2389	9,37825
75	39 48	1,0167	0,00720	0,1834	9,26330
80	41 38	1,0070	0,00301	0,1181	9,07229
85	43 22	1,0027	0,00071	0,0582	8,76530
90	45 00	1,0000	0,00000	0,0000	—

Anmerkung 1. Hat man den Radius r, so ist

$$MR = r\,.\,z;\quad \lg MR = \lg r + \lg z$$
$$x = r\,.\,z;\quad \lg x = \lg r + \lg z.$$

b) $PR = {}^1/_2 \cos\varphi\,.\,\sec\left[\tan\psi = \tan\varphi - \varphi\,.\left(\frac{2}{\pi}\sec\varphi\right)\right].\,\operatorname{cosec}\left[\tan\psi = \tan\varphi - \varphi\,.\left(\frac{2}{\pi}\sec\varphi\right)\right]$

$$y = {}^1/_2 \cos\varphi\,.\,\sec\psi\,.\,\operatorname{cosec}\psi + \varphi\,.\,\frac{2}{\pi}.$$

φ	ψ	$PR = z$	$\lg PR = \lg z$	$y = z$	$\lg y = \lg z$
0	0° 00′	∞	—	∞	—
5	1 50	15,5770	1,19249	22,8935	1,35971
10	3 38	7,7858	0,89130	7,8969	0,89745
15	5 27	5,1081	0,70826	5,2747	0,72219
20	7 15	3,7531	0,57439	3,9752	0,59936
23° 27′ 30″	8 2	3,3214	0,52132	3,5821	0,55414
25	9 2	2,9292	0,46675	3,1970	0,50474
30	10 54	2,3320	0,36773	2,6653	0,42575
35	12 42	1,9141	0,28097	2,3025	0,36220
40	14 31	1,5784	0,19822	2,0228	0,30595
45	16 20	1,3101	0,11730	1,8101	0,25770
50	18 8	1,0870	0,03608	1,6425	0,21551
55	19 56	0,89480	9,95173	1,5059	0,17779
60	21 45	0,72635	9,86115	1,3930	0,14395
65	23 32	0,57723	9,76135	1,2995	0,11377
66° 32′ 30″	24 5	0,55688	9,74576	1,2963	0,11271
70	25 20	0,44219	9,64560	1,2199	0,08635
75	27 8	0,33390	9,52359	1,1672	0,06715
80	28 55	0,20510	9,31204	1,0940	0,03901
85	30 43	0,09920	8,99668	1,0437	0,01858
90	∞	0,00000	—	1,0000	0,00000

Anmerkung 2. Hat man statt 1 den Radius r, so ist

$$PR = r\,.\,z;\quad \lg PR = \lg r + \lg z$$
$$y = r\,.\,z;\quad \lg y = \lg r + \lg z.$$

Tabelle XI.

Erläuterung S. 122 bis 126 und S. 144 (Merkators Projektion).

$$y = 1 \times 2{,}30259 \lg \tan (45 + {}^1\!/_2\, \varphi).$$

φ	z	$\lg z$	φ	z	$\lg z$
0	0,0000	—	45	0,8814	9,94517
5	0,0874	8,94151	50	1,0100	0,00432
10	0,1754	9,24403	55	1,1542	0,06228
15	0,2648	9,42292	60	1,3170	0,11959
20	0,3564	9,55194	65	1,5065	0,17797
23° 27′ 30″	0,4214	9,62469	66° 32′ 30″	1,5721	0,19648
25	0,4509	9,65408	70	1,7354	0,23940
30	0,5493	9,73981	75	2,0276	0,30698
35	0,6528	9,81478	80	2,4362	0,38671
40	0,7629	9,88247	85	3,1313	0,49573
			90	∞	—

Anmerkung 1. Die Berechnung beispielsweise von 5° geschieht in folgender Weise:

$$y = 2{,}30259 \lg \tan 47^\circ\, 30'.$$

Nun ist $\lg \tan 47^\circ\, 30' = 0{,}03795$ und dann

$$y = 2{,}30259 \times 0{,}03795$$

oder $\lg y = \lg 2{,}30259 + \lg 0{,}03795 = (0{,}36222 + 8{,}57921) = 8{,}94143$,

welcher lg auf die Zahl 0,087383 d. i. gekürzt auf 0,0874 führt.

Anmerkung 2. Hat man für 1 den Radius r, so ist

$$y = r \,.\, 0{,}0874 = r \,.\, z$$

$$\lg y = \lg r + \lg z.$$

In dem Falle, dafs die reduzierte Länge eines Äquatorgrades mit $\varkappa^{\mathrm{mm}}$ gegeben ist, so ist der Äquatorumfang $360^\circ \,.\, \varkappa^{\mathrm{mm}} = 2 r \pi$, der Radius

$$r = \frac{180}{\pi} \,.\, \varkappa^{\mathrm{mm}}$$

und die Ordinate $$y = \frac{180}{\pi} \,.\, \varkappa \,.\, z.$$

Mithin ist $$\lg y = \left(\lg \frac{180}{\pi} + \lg \varkappa\right) + \lg z.$$

Anmerkung 3. Wenn bei einer Karte auf einen Äquatorgrad $\varkappa^{\mathrm{mm}}$ treffen, alsdann ist der Äquatorialmafsstab $M = 111{,}3^{\mathrm{km}} : \varkappa^{\mathrm{mm}}$.

Tabelle XII.

Erläuterung S. 126 bis 130 und S. 150 und 151 (Stereographisch - äquivalente Projektion, modifiziert von E. Collignon).

$$y_1 = 1 - \sqrt{2}\ \sin(45^0 - {}^1/_2\,\varphi).$$

φ	y_1	lg z	x'	lg z
0	0,0000	—	1,0000	0,00000
5	0,0446	8,64933	0,9554	9,98019
10	0,0910	8,95904	0,9090	9,95856
15	0,1391	9,14333	0,8609	9,93495
20	0,1888	9,27600	0,8112	9,90913
23° 27′ 30″	0,2243	9,35083	—	—
25	0,2402	9,38057	0,7598	9,88070
30	0,2929	9,46672	0,7071	9,84948
35	0,3470	9,54033	0,6530	9,81491
40	0,4023	9,60455	0,5977	9,77648
45	0,4588	9,66162	0,5412	9,73336
50	0,5163	9,71290	0,4837	9,68458
55	0,5748	9,75952	0,4252	9,62859
60	0,6340	9,80209	0,3660	9,56348
65	0,6939	9,84130	0,3061	9,48586
66° 32′ 30″	0,7125	9,85278	—	—
70	0,7545	9,87766	0,2455	9,39005
75	0,8154	9,91137	0,1846	9,26623
80	0,8767	9,94285	0,1233	9,09096
85	0,9383	9,97234	0,0617	8,79029
90	1,0000	0,00000	0,0000	—

Anmerkung 1. Sobald für 1 der Wert $r\sqrt{\pi}$ d. i. irgend eine beliebige Gröfse eintritt, ist

$$y_1 = r\sqrt{\pi}\,.\,z$$
$$\lg y_1 = \lg r\sqrt{\pi} + \lg z.$$

Anmerkung 2. $y - y_1 = y' = x' = r\sqrt{\pi}\,.\,z$

$$\lg x' = r\sqrt{\pi} + \lg z.$$

Tabelle XIII.

Erläuterung S. 131 bis 136 (Mollweid'sche Projektion).

a) $y = 1\,.\,\sin\chi,$

Die nachstehenden Werte für $\sin\chi$, welche der Gleichung $\sin 2\chi + 2\chi = \pi \sin\varphi$ entsprechen, sind von Jules Bourdin berechnet.

φ	$\sin\chi$	lg z	φ	$\sin\chi$	lg z
0	0,0000	—	23° 27′ 30″	0,3183	9,50276
5	0,0685	8,83569	25	0,3385	9,52956
10	0,1368	9,13609	30	0,4040	9,60638
15	0,2047	9,31112	35	0,4682	9,67043
20	0,2720	9,43457	40	0,5310	9,72509

φ	$\sin\chi$	lg z	φ	$\sin\chi$	lg z
45	0,5921	9,77240	66° 32′ 30″	0,8291	9,91861
50	0,6512	9,81371	70	0,8619	9,93546
55	0,7081	9,85009	75	0,9061	9,95718
60	0,7624	9,88218	80	0,9454	9,97562
65	0,8138	9,91052	85	0,9784	9,99052
			90	1,0000	0,00000

Anmerkung 1. Im Falle für 1 der Wert $r\sqrt{2}$ d. i. irgend eine beliebige Zahl eingesetzt wird, ist

$$y = r\sqrt{2}\,.\,z$$
$$\lg y = \lg r\sqrt{2} + \lg z.$$

b) Kreisordinate $Y = 1\,.\,\sqrt{1 - \sin\chi^2}$

Ellipsenordinate für $y = 5\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin\chi^2}\right)$.

φ	$1\,.\,\sqrt{1-\sin\chi^2}$		$\frac{10}{\pi}\sqrt{1-\sin\chi^2}$		Vielfache von $\frac{1}{18} = \frac{10}{\pi}$	
	z	lg z	z	lg z	z	lg z
0	1,00000	0,00000	0,05556	8,74476	0	—
5	0,99765	9,99898	0,05543	8,74374	1	0,00000
10	0,99061	9,99590	0,05491	8,73965	2	0,30103
15	0,97881	9,99070	0,05438	8,73543	3	0,47712
20	0,96230	9,98331	0,05346	8,72803	4	0,60206
25	0,94096	9,97357	0,05228	8,71833	5	0,69897
30	0,91476	9,96131	0,05082	8,70604	6	0,77815
35	0,88360	9,94626	0,04909	8,69099	7	0,84510
40	0,84736	9,92807	0,04708	8,67284	8	0,90309
45	0,80586	9,90626	0,04477	8,65099	9	0,95424
50	0,75891	9,88019	0,04207	8,62397	10	1,00000
55	0,70612	9,84888	0,03923	8,59362	11	1,04139
60	0,64711	9,81098	0,03595	8,55570	12	1,07918
65	0,58099	9,76417	0,03227	8,50880	13	1,11394
70	0,50707	9,70507	0,02817	8,44979	14	1 14613
75	0,42305	9,62639	0,02350	8,37107	15	1,17609
80	0,32588	9,51306	0,01811	8,25791	16	1,20412
85	0,20664	9,31521	0,01148	8,05994	17	1,23045
90	0,00000	—	0,00000	—	18	1,25527

Anmerkung 2. Nimmt man $1 = r\sqrt{2}$, so ist

$$Y = r\sqrt{2}\,.\,z; \qquad \lg Y = \lg r\sqrt{2} + \lg z$$

und

$$y = b = r\sqrt{2}\,.\,z; \qquad \lg y = \lg r\sqrt{2} + \lg z$$
$$= 2r\sqrt{2}\,.\,z; \qquad = (\lg r\sqrt{2} + \lg 2) + \lg z$$
$$= 3r\sqrt{2}\,.\,z; \qquad = (\lg r\sqrt{2} + \lg 3) + \lg z \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung 3. Hat man die Ellipsenordinate für einen Gradabschnitt für φ, 2φ, 3φ ... berechnet, so trägt man diese Strecken auf die Parallelen φ, 2φ, 3φ ... so vielmal auf, als die Karte ihrer Ausdehnung nach erfordert.

Tabelle XIV.

Erläuterung S. 139 bis 141.

Die auf Millimeter reduzierten Bogenlängen von 1, 5, 15 Minuten; 1, 5, 10 und 20 Graden.

	Maſsstab	Reduzierte Länge
1′	100000	18,55 mm
	110...	16,81
	120...	15,40
	125...	14,80
	130...	14,23
	140...	13,21
	150...	12,33
	160...	11,56
	170...	10,88
	180...	10,27
	190...	9,76
	200...	9,27
5′	200...	46,37
	225...	41,22
	250...	39,10

	Maſsstab	Reduzierte Länge
5′	275000	33,72 mm
	280...	33,12
	300...	30,91
	320...	28,98
	350...	26,50
	400...	23,18
	450...	20,61
	500...	18,55
	600...	15,46
	700...	13,25
	800...	11,59
	900...	10,30
	1000...	9,27
15′	1000...	27,82
	1050...	26,50

	Maſsstab	Reduzierte Länge
15′	1100000	25,30 mm
	1125...	24,73
	1150...	24,19
	1200...	23,19
	1225...	22,72
	1250...	22,26
	1300...	21,40
	1350...	20,61
	1400...	19,87
	1500...	18,55
	1600...	17,39
	1700...	16,37
	1800...	15,45
	1900...	14,65
	2000...	13,91

	Maſsstab	Reduzierte Länge
1°	2000000	55,65 mm
	2100...	53,00
	2250...	49,47
	2500...	44,52
	2750...	40,48
	3000...	37,10
	3250...	34,25
	3500...	31,80
	4000...	27,83
	4500...	24,74
	5000...	22,26
	6......	18,55
	7......	15,90
	8......	13,91
	9......	12,37
	10......	11,13
	11......	10,12

	Maſsstab	Reduzierte Länge
1°	12000000	9,27 mm
5°	10......	55,65
	11......	50,60
	12......	46,37
	13......	42,81
	14......	39,75
	15......	37,10
	16......	34,78
	17......	32,74
	18......	30,92
	19......	29,29
	20......	27,82
	21......	26,50
	22......	25,30
	23......	24,20
	24......	23,19
	25......	22,26

	Maſsstab	Reduzierte Länge
5°	30000000	18,55 mm
	35......	15,90
	40......	13,91
	45......	12,37
	50......	11,13
10°	50......	22,26
	60......	18,55
	70......	15,90
	80......	13,91
	90......	12,37
	100......	11,13
	120......	9,27
20°	120......	18,54
	150......	14,84
	180......	11,28
	200......	11,13
	250......	8,90

Tabelle XV.

Erläuterung S. 146 bis 148 (Mollweid'sche Projektion).

$y = 1 \,.\, \sin\chi$

nach der Berechnung von Jules Bourdin.

$y = 1^0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \sin\chi^2}.$

φ	$\sin\chi$	lg z	$\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \sin\chi^2}$	lg z
0	0,00000	—	0,011111	8,04576
1	0,01371	8,13704	0,011111	8,04572
2	0,02741	8,43791	0,011107	8,04559
3	0,04112	8,61405	0,011099	8,04530
4	0,05482	8,73894	0,011094	8,04510
5	0,06851	8,83575	0,011085	8,04474
6	0,08219	8,91482	0,011074	8,04428
7	0,09586	8,98164	0,011060	8,04376
8	0,10953	9,03953	0,011044	8,04314
9	0,12318	9,09054	0,011026	8,04244
10	0,13681	9,13612	0,011006	8,04165
11	0,15043	9,17733	0,010985	8,04079
12	0,16403	9,21492	0,010960	8,03984
13	0,17761	9,24947	0,010934	8,03880
14	0,19118	9,28144	0,010905	8,03767
15	0,20472	9,31116	0,010875	8,03646
16	0,21823	9,33892	0,010844	8,03518
17	0,23172	9,36496	0,010809	8,03377
18	0,24518	9,38949	0,010772	8,03229
19	0,25861	9,41265	0,010733	8,03073
20	0,27202	9,43460	0,010697	8,02930
21	0,28538	9,45542	0,010624	8,02626
22	0,29872	9,47526	0,010604	8,02546
23	0,31202	9,49418	0,010556	8,02352
24	0,32528	9,51226	0,010506	8,02147
25	0,33851	9,52957	0,010455	8,01933
26	0,35169	9,54616	0,010401	8,01709
27	0,36483	9,56209	0,010345	8,01474
28	0,37792	9,57740	0,010289	8,01239
29	0,39097	9,59215	0,010229	8,00982
30	0,40397	9,60635	0,010164	8,00707

φ	$\sin\chi$	$\lg z$	$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\sin\chi^2}$	$\lg z$
31	0,41693	9,62006	0,010099	8,00429
32	0,42983	9,63330	0,010033	8,00140
33	0,44268	9,64609	0,009963	7,99840
34	0,45547	9,65846	0,009892	7,99527
35	0,46820	9,67043	0,009818	7,99202
36	0,48088	9,68204	0,009742	7,98865
37	0,49350	9,69329	0,009664	7,98515
38	0,50606	9,70420	0,009583	7,98152
39	0,51855	9,71471	0,009501	7,97778
40	0,53097	9,72507	0,009415	7,97384
41	0,54333	9,73506	0,009328	7,96979
42	0,55062	9,74085	0,009275	7,96732
43	0,56784	9,75423	0,009146	7,96123
44	0,57998	9,76341	0,009052	7,95672
45	0,59204	9,77235	0,008955	7,95204
46	0,60403	9,78106	0,008857	7,94729
47	0,61594	9,78954	0,008753	7,94217
48	0,62776	9,79779	0,008649	7,93697
49	0,63951	9,80585	0,008542	7,93156
50	0,65116	9,81369	0,008433	7,92596
51	0,66272	9,82133	0,008321	7,92016
52	0,67420	9,82879	0,008206	7,91414
53	0,68558	9,83606	0,008080	7,90739
54	0,69686	9,84315	0,007969	7,90140
55	0,70805	9,85006	0,007846	7,89466
56	0,71913	9,85681	0,007720	7,88761
57	0,73011	9,86339	0,007593	7,88039
58	0,74098	9,86981	0,007462	7,87282
59	0,75174	9,87607	0,007327	7,86494
60	0,76239	9,88218	0,007190	7,85673

Anmerkung. Hat man statt 1 den Radius $r\sqrt{2}$, so ist

a) die Ordinate

$$y = r\sqrt{2}\,.\,z; \quad \lg y = \lg r\sqrt{2} + \lg z,$$

b) die Ellipsenordinate

$$y = b = r\sqrt{2}\cdot z; \quad \lg y = \lg r\sqrt{2} + \lg z.$$

Tabelle XVI.

Erläuterung S. 153 bis 155 (Merkator's Kegelprojektion).

$$JA = \frac{1 \, . \cos \varphi}{\sin {}^1\!/_2 (\varphi + \varphi')}; \quad JB = \frac{1 \, . \cos \varphi'}{\sin {}^1\!/_2 (\varphi + \varphi')}$$

$$\lambda' = 1 \, . \sin {}^1\!/_2 (\varphi + \varphi').$$

Zone	Radien für die Begrenzungsparallelen der Zone						λ'	
φ bis φ'	φ	z	lg z	φ'	z	lg z	z	lg z
0 — 5	0	22,9250	1,36032	5	22,8380	1,35866	0,04362	8,63968
4 — 9	4	8,8121	0,94508	9	8,7249	0,94076	0,11320	9,05386
7 — 12	7	6,0137	0,77914	12	5,9264	0,77279	0,16505	9,21761
10 — 15	10	4,5500	0,65801	15	4,4627	0,64960	0,21644	9,33534
13 — 18	13	3,6460	0,56182	18	3,5589	0,55131	0,26724	9,42690
16 — 21	16	3,0294	0,48136	21	2,9422	0,46867	0,31730	9,50148
19 — 24	19	2,5798	0,41159	24	2,4926	0,39665	0,36650	9,56408
22 — 27	22	2,2358	0,34944	27	2,1486	0,33215	0,41469	9,61773
25 — 30	25	1,9673	0,29287	30	1,8755	0,27312	0,46175	9,66441
28 — 33	28	1,7396	0,24046	33	1,6524	0,21812	0,50754	9,70547
31 — 36	31	1,5530	0,19118	36	1,4658	0,16609	0,55194	9,74189
34 — 39	34	1,3937	0,14418	39	1,3065	0,11611	0,59482	9,77439
37 — 42	37	1,2556	0,09884	42	1,1683	0,06756	0,63608	9,80351
40 — 45	40	1,1339	0,05457	45	1,0467	0,01981	0,67559	9,82968
43 — 48	43	1,0254	0,01089	48	0,9382	9,97227	0,71325	9,85324
46 — 51	46	0,9275	9,96731	51	0,8403	9,92441	0,74896	9,87446
49 — 54	49	0,8383	9,92340	54	0,7511	9,87568	0,78261	9,89354
52 — 57	52	0,7562	9,87865	57	0,6690	9,82542	0,81412	9,91069
55 — 60	55	0,6801	9,83256	60	0,5928	9,77294	0,84339	9,92603
58 — 63	58	0,6089	9,78451	63	0,5216	9,71735	0,87036	9,93970
61 — 66*	61	0,5405	9,73276	66*	0,2800	9,44716	0,89704	9,95281

* Genau 66° 32′ 30″.

Anmerkung 1. Setzt man für 1 wieder r, so ist

$$JA = r \, . \, z; \quad \lg JA = \lg r + \lg z.$$
$$JB = r \, . \, z; \quad \lg JB = \lg r + \lg z.$$

Setzt man ferner für 1 wieder λ, alsdann ist

$$\lambda' = \lambda \, . \, z; \quad \lg \lambda' = \lg \lambda + \lg z.$$

Anmerkung 2. Der Dezimalbruch, welcher den Wert von λ' für 1° ausdrückt, kann auch in Minuten und Sekunden verwandelt werden. So ist z. B.

$$\lambda' = 0{,}04362^{\circ} = 2' \, 37''.$$

Anmerkung 3. Die Tabellen XIII und XIV sind so eingerichtet, dafs sie sich gegenseitig ergänzen, so dafs der Wert, welcher in der einen Tabelle fehlt, aus der andern sich mehrenteils entnehmen läfst.

Anmerkung 4. Selbstverständlich thut es der Richtigkeit des Verfahrens kaum einen Eintrag, wenn die Zone φ bis φ' auf einen oder zwei Grade nördlich wie südlich erweitert wird.

Tabelle XVII.

Erläuterung S. 157 bis 160 (Murdoch's Kegelprojektion).

$$JC = \frac{360}{\pi(\varphi'' - \varphi')} \,.\, \sin {}^1/_2 (\varphi'' - \varphi') \,.\, \cot {}^1/_2 (\varphi' + \varphi'')$$

$$\lambda' = 1 \,.\, \sin {}^1/_2 (\varphi' + \varphi'').$$

Zone φ' bis φ''	Radius für den Mittelparallel φ	z	lg z	λ'	
				z	lg r
$2^1/_2$ — $7^1/_2$	5	11,4280	1,05791	0,08716	8,94030
$7^1/_2$ — $12^1/_2$	10	5,6694	0,75354	0,17365	9,23967
$12^1/_2$ — $17^1/_2$	15	3,7309	0,57181	0,25882	9,41300
$17^1/_2$ — $22^1/_2$	20	2,7446	0,43879	0,34202	9,53405
21° 55′ — 25°	23° 27′ 30″	2,3044	0,36256	0,39808	9,59997
$22^1/_2$ — $27^1/_2$	25	2,1438	0,33119	0,42262	9,62595
$27^1/_2$ — $32^1/_2$	30	1,7315	0,23842	0,50000	9,69897
$32^1/_2$ — $37^1/_2$	35	1,4277	0,15463	0,57358	9,75859
$37^1/_2$ — $42^1/_2$	40	1,1914	0,07605	0,64279	9,80807
$42^1/_2$ — $47^1/_2$	45	0,9997	9,99986	0,70711	9,84949
$47^1/_2$ — $52^1/_2$	50	0,8388	9,92367	0,76604	9,88425
$52^1/_2$ — $57^1/_2$	55	0,7000	9,84509	0,81915	9,91336
$57^1/_2$ — $62^1/_2$	60	0,5772	9,76130	0,86603	9,93753
$62^1/_2$ — $67^1/_2$	65	0,4661	9,66843	0,90631	9,95728
63° 5′ — 70°	66° 32′ 30″	0,4335	9,63696	0,91736	9,96254
$67^1/_2$ — $72^1/_2$	70	0,3639	9,56093	0,93969	9,97299
$72^1/_2$ — $77^1/_2$	75	0,2679	9,42791	0,96593	9,98494
$77^1/_2$ — $82^1/_2$	80	0,1762	9,24618	0,98481	9,99335
$82^1/_2$ — $87^1/_2$	85	0,0891	8,94981	0,99619	9,99834
90	90	0,0000	—	1,00000	0,00000

Anmerkung 1. Tabelle XIII und XIV, wie oben schon bemerkt wurde, ergänzen sich.

Anmerkung 2. Ist der Radius r, so ist

$$JC = r \,.\, z$$

$$\lg JC = \lg r + \lg z.$$

Setzt man für 1 wieder λ, so ist

$$\lambda' = \lambda \,.\, z$$

$$\lg \lambda' = \lg \lambda + \lg z.$$

Anmerkung 3. Der Dezimalbruch, welcher den Wert von λ' für 1° ausdrückt, kann auch in Minuten und Sekunden verwandelt werden. So ist z. B.

$$\lambda' = 0{,}08716^{\circ} = 5'\ 14''.$$

Anmerkung 4. Der Richtigkeit des Verfahrens thut es kaum einen Eintrag, wenn die Zone φ' bis φ'' um einen oder zwei Grade sowohl nördlich wie südlich erweitert wird.

Tabelle XVIII.

Erläuterung S. 179 bis 181.

Winkel λ' für die Breite φ, für die Drehung während einer Stunde.

φ	λ	λ'	φ	λ	λ'
0	15	0° 00'	50	15	11° 28'
10	15	2 36	60	15	13 00
20	15	5 06	66° 32' 30"	15	13 46
23° 27' 30"	15	5 58	70	15	14 06
30	15	7 30	80	15	14 46
40	15	9 38	90	15	15 00

Tabelle XIX.

Erläuterung S. 207 bis 208 und 211 bis 213.

Die Dauer des Tages am 21. Juni für Orte unter verschiedenen Breiten a) nach den Ergebnissen der Konstruktion und b) nach denen der rechnenden Bestimmung.

φ	a) ζ	$2T = 12^h + \frac{0,4}{3}\zeta$	b) 180 — δ	$2T = \frac{0,4}{3}.(180-\delta)$	Sonnen-aufgang	Sonnen-untergang
0	0,00	$12^h\ 00^{min}$	90,00	$12^h\ 00^{min}$	$5^h\ 56,0^{min}$	$6^h\ 04,0^{min}$
10	4,10	12 33	94,40	12 35	5 38,5	6 21,5
20	9,05	13 12	99,09	13 13	5 19,5	6 40,5
23°27'30"	10,95	13 28	100,86	13 27	5 12,5	6 47,5
30	15,00	14 00	104,59	13 57	4 57,5	7 02,5
40	22,22	14 57	111,36	14 51	4 30,5	7 29,5
50	32,82	16 23	121,15	16 09	3 51,5	8 08,5
60	53,33	19 06	138,73	18 30	2 41,0	9 19,0
66°32'30"	90,00	24 00	180,00	24 00	12 nachts	12 nachts

Anmerkung. Der Tageslänge sind 8^{min} (S. 208) hinzuzuaddieren. Im Winter ist die längste Nacht gleichfalls der Bogen $2T$ dieser Tabelle. So ist die kürzeste Nacht und der kürzeste Tag $24^h - 2T$. (Thut man zum *SA* am 21. Juni 8^{min} hinzu, so hat man den *SU*, vom *SU* 8^{min} weg, dann den *SA* am 21. Dezember.)

Tabelle XX.

Erläuterung S. 208 bis 213.

Die Dauer der Dämmerung in den Äquinoktien und Solstitien für Orte unter verschiedenen Breiten.

φ	21. März. 22. Sept.	φ	21. Juni	φ	21. Dezember
0	$1^h\ 12^{min}\ 00^s$	0	$1^h\ 18^{min}\ 43^s$	0	$1^h\ 18^{min}\ 43^s$
10	1 13 10	10	1 21 23	10	1 19 12
20	1 16 48	20	1 28 00	20	1 22 37
23°27'30"	1 18 27	23°27'30"	1 31 32	23°27'30"	1 24 40
30	1 23 36	30	1 39 32	30	1 31 04

φ	21. März. 22. Sept.
40	$1^h\ 34^{min}\ 12^s$
50	1 54 55
66	2 32 42
66° 32′ 30″	3 23 10
70	4 18 30
72	6 00 00
80	helle Nacht
90	„ „

φ	21. Juni
40	$2^h\ 08^{min}\ 33^s$
48° 30′	4 03 00 *
50	helle Nacht
60	„ „
66° 32′ 30″	Tag 24^h
70	Tag einige Monate lang
80	
90	

φ	21. Dezember
40	$2^h\ 06^{min}\ 00^s$
50	2 20 28
60	2 58 15
66° 32′ 30″	5 24 36
70	(Dämmerung statt der Tageshelle)
80	
84° 30′	Kalotte ohne Dämmerung
90	

* Die Länge des Tages beträgt $15^h\ 54^{min}$, die übrige Zeit d. i. $8^h\ 06^{min}$ ist Dämmerung, somit dauert die Dämmerung die ganze Nacht hindurch.

Anmerkung 1. Nimmt man das Drittel von der astronomischen Dämmerung, so findet man die bürgerliche Dämmerung, da dieselbe zur ersten (annähernd) im Verhältnis 1 : 3 steht.

Anmerkung 2. In der Tropenzone, der sphära recta, sinkt die Sonne senkrecht oder nahezu senkrecht unter den Horizont hinab, in den höhern Breiten, der sphära obliqua, bewegt sie sich in einer zum Horizont geneigten Bahn, und es läfst sich deshalb leicht erklärlich finden, dafs die Dämmerung am Äquator am kürzesten, in den höhern Breiten viel länger dauert. Ja es kann daselbst vorkommen, dafs die Sonne auch um Mitternacht nicht 18° unter den Horizont hinabsinkt. Abend- und Morgendämmerung gehen dann in einander über und die Nächte bleiben durch den Dämmerschein hell. Wo nun die hellen Nächte auftreten und wann sie beginnen, diese beiden Fragen zu beantworten, hiezu werden Figur 169 S. 210 und die Tabelle XXI behilflich sein. Bei der Figur 169 ist NK' die untere Kulmination oder Mitternachtstiefe der Sonne. Der Bogen NK' ist ein Stück des Quadranten $A'P$, aus welchem er sich leicht bestimmen läfst, da $A'K' = d$ und $PN = \varphi$ ist. Setzen wir NK' zu 18°, so ist

$$18^0 = 90 - \varphi - d,$$

sodann $\varphi = 72 - d$ und $d = 72 - \varphi$,

welche beide Gleichungen nichts anderes sagen wollen, als: Wenn die $\frac{\text{geographische Breite}}{\text{Deklination der Sonne}}$ gleich der Differenz zwischen 72 und der $\frac{\text{Deklination der Sonne}}{\text{geographischen Breite}}$ wird, so fangen die hellen Nächte an.

Nach Tabelle XXI ist die Deklination der Sonne am 28. Januar — 18°. Es ist dann

$$-18 = 72 - 90 \quad \text{oder} \quad 90 = 72 - (0 - 18) = 72 + 18.$$

Folglich beginnen am Pol die hellen Nächte schon am 28. Januar und endigen erst am 14. November, da wiederum die Deklination der Sonne — 18° beträgt. Vom Frühling bis Herbst ($d = 72 - 72$) dauern nach Tabelle XXI die hellen Nächte am 72. Parallel (72 — 0), am 60. Parallel (72 — 12) vom 21. April bis 16. August ($d = 72 - 60$); am 50. Parallel (72 — 22) vom 31. Mai bis 12. Juli ($d = 72 - 50$). Die gröfste Deklination der Sonne ist 23 ½°.

Darnach ist die Grenze der Kalotte der hellen Nächte bezeichnet durch die Breite
$$\varphi = 72 - 23^1/_2 = 48^1/_2{}^0.$$

In Kürze läfst sich darum merken: Der Parallel $\varphi > 48^1/_2{}^0$ liegt innerhalb, der Parallel $\varphi < 48^1/_2{}^0$ dagegen aufserhalb der Kalotte der hellen Nächte. Bei letzterem Parallel treten Morgen- und Abenddämmerung, da die Mitternachtstiefe auch im Sommer mehr als 18^0 beträgt, gesondert auf.

Wenn im Winter in der Polarzone an einem Ort die Sonne mittags noch 18^0 unterm Horizont weilt, bleibt die Dämmerung ganz und gar aus. Der Stundenwinkel für dieselbe an diesem Ort ist Null und da $\cos 0 = 1$ ist, so können wir, um zu erfahren unter welchem Parallel eine ununterbrochene Nacht stattfindet, in Ansatz bringen
$$1 = \frac{\sin d \sin\varphi - \sin h}{\cos d \cos\varphi},$$
woraus folgt, dafs $\cos d \cos\varphi = \sin d \sin\varphi - \sin h$ ist.

Durch Transposition erhalten wir die Gleichung
$$\cos d \cos\varphi - \sin d \sin\varphi = -\sin h$$
oder
$$\cos(d + \varphi) = -\sin h.$$

Der negative Kosinus führt auf einen stumpfen Winkel, der dem Kosinus seines spitzen Nebenwinkels gleich ist. So ist $\cos 72 = \sin 18$. Die Gröfse des stumpfen Nebenwinkels ist alsdann $180^0 - 72^0 = 108^0$.

Mithin ist $d + \varphi = 108^0$, woraus folgt, dafs $\varphi = 84^1/_2{}^0$ beträgt.

Ein Ort am Polarkreis, der zu Mittag die Sonne im Horizont zu sehen bekommt, durchwandert noch einen vor- und nachmittägigen Dämmerungsbogen, ein Ort nördlich davon, wird eine um so kleinere Dämmerungszeit statt der Tageshelle haben, je weiter er vom Polarkreis entfernt ist. Am Parallelkreis $84^1/_2$ ($= 66^1/_2 + 18$) bleibt die Sonne auch zu Mittag noch 18^0 unterm Horizont. Kein Licht ist im Winter der Kalotte, welche dieser Parallel umfängt, beschieden, nicht einmal ein Dämmerschein, in finstere, eisige Nacht ist sie gehüllt.

Anmerkung 3. Alhazen, ein muhammedanischer Gelehrter, der ums Jahr 1000 lebte, hat Versuche gemacht, die Höhe der Atmosphäre aus den Dämmerungserscheinungen abzuleiten und gefunden, dafs dieselbe $^1/_{80}$ des Erdhalbmessers, d. i. 79^{km}, beträgt. Folgende Erwägung brachte ihn auf das mitgeteilte Resultat. Es sei nach Figur 186 Bu der Horizont des Ortes B; nt der Sonnenstrahl, welcher auf die Linie Bu bei t in einem Winkel von 18^0 stöfst. Für den Winkel BtS bleibt alsdann $180^0 - 18^0 = 162^0$. In dem gleichschenkligen Dreieck BtS teilt die Gerade tz den Winkel von 162^0 in zwei Hälften, so dafs der Winkel Btz 81^0 beträgt. Von dem Erdmittelpunkt z bis $o = r$ haben wir mit Einrechnung der Höhe der Atmosphäre $ot = h$ die Länge $r + h$.

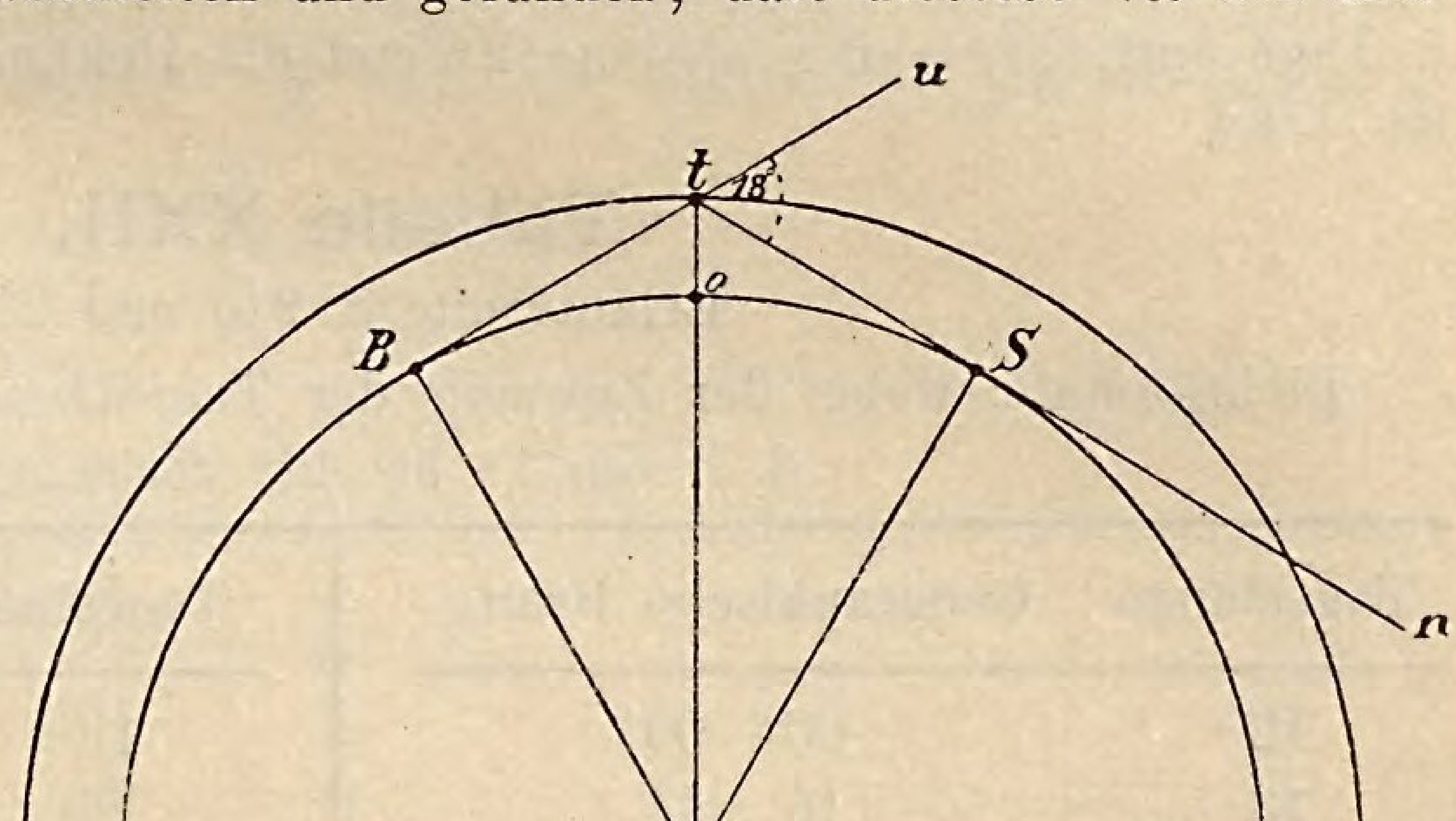


Fig. 186.

Es ist dann in dem bei B rechtwinkligen Dreieck zBt

$$r + h = r \operatorname{cosec} 81^0.$$

Hieraus resultiert, dafs die Höhe der Atmosphäre sein mufs:

$$h = r(\operatorname{cosec} 81^0 - 1) = r \,.\, 0{,}0124$$
$$= 6370{,}284 \times 0{,}0124 = 79^{km}.$$

Tabelle XXI.

Erläuterung S. 214.

Die Deklination der Sonne für die einzelnen Tage des Jahres*.

Datum	Deklination	Datum	Deklination	Datum	Deklination
Januar 1	— 23°	Mai 1	+ 15°	September 8	+ 6°
„ 11	— 21	„ 11	+ 18	„ 18	+ 2
„ 21	— 20	„ 21	+ 20	„ 28	— 2
„ 31	— 17	„ 31	+ 22	Oktober 8	— 6
Februar 10	— 14	Juni 10	+ 22	„ 18	— 9
„ 20	— 11	„ 20	+ 23° 28′	„ 28	— 13
März 2	— 7	„ 30	+ 23	November 7	— 16
„ 12	— 3	Juli 10	+ 22	„ 17	— 19
„ 22	+ ½	„ 20	+ 21	„ 27	— 21
April 1	+ 4	„ 30	+ 19	Dezember 7	— 23
„ 11	+ 8	August 9	+ 16	„ 17	— 23
„ 21	+ 12	„ 19	+ 13	„ 27	— 23° 28′
		„ 29	+ 9		

* Entnommen aus dem astronomischen Handwörterbuch von Hermann J. Klein.

Anmerkung. Handelt es sich darum, die Deklination für einen andern Datum, als den in der Tabelle angeführten zu wissen, so führt eine einfache Manipulation darauf. Es sei z. Ex. die Deklination der Sonne am 6. April anzugeben. In der Tabelle findet man dieselbe zwischen dem 1. und 11. April. Der Unterschied beträgt auf 10 Tage 4°, auf 5 Tage (der 6. April ist vom 1. April 5 Tage entfernt) treffen alsdann 2° und die Deklination der Sonne am 6. April ist + 6°.

Tabelle XXII.

Erläuterung S. 215 und 216.

Lichtklimate, wobei der Zuwachs der Tageslänge von Stunde zu Stunde d. i. von 1^h bis 12^h fortschreitet.

Tageslänge	Geographische Breite	Tageslänge	Geographische Breite
12^h	00° 00′	19^h	61° 19′
13	16 44	20	63 23
14	30 48	21	64 50
15	41 24	22	65 48
16	49 03	23	66 22
17	54 31	24	66 32
18	58 28	6 Monate	90 00

Tabelle XXIII.

Erläuterung S. 221 und 222.

Verhältniszahlen zur Bestimmung des mathematischen Klimas.

φ	Frühling Herbst	Sommer	Winter	φ	Frühling Herbst	Sommer	Winter
$-23^1/_2$	0,92	0,68	1,00	60	0,50	0,80	0,11
0	1,00	0,92	0,92	$66^1/_2$	0,40	0,73	—
10	0,98	0,97	0,83	70	0,34	0,69	—
20	0,93	0,99	0,73	80	0,17	0,55	—
$23^1/_2$	0,92	1,00	0,68	90	—	0,40	—
30	0,87	0,99	0,59	100	—	0,23	—
40	0,76	0,96	0,45	110	—	0,06	—
50	0,64	0,89	0,28	$113^1/_2$	—	0,00	—

Anmerkung. Diese Verhältniszahlen lassen sich für die Zeit der Äquinoktien auch aus der Tabelle II finden. Denn die Parallelgrade sind Produkte aus dem Äquatorgrad in den Kosinus der Breite. Für 40° Breite ist sonach in Ansatz zu bringen

$$111{,}3 : 85{,}38 = 1 : x$$

woraus für x sich ergibt $x = 0{,}76.$

Tabelle XXIV.

Erläuterung S. 230 bis 233.

Entfernungen entsprechend den Parallaxen von 1″ bis 0,1″.

1″ = 206265	6″ = 34377	0,1″ = 2062648	0,6″ = 343770
2 = 103130	7 = 29466	0,2 = 1031896	0,7 = 294660
3 = 68755	8 = 25783	0,3 = 687550	0,8 = 257830
4 = 51566	9 = 22918	0,4 = 515660	0,9 = 229180
5 = 41253	10 = 20626	0,5 = 412530	1,0 = 206265

Nachtrag.

A. Horizontalprojektion in einfacher Konstruktionsweise.

Nach den Grundsätzen der Globularprojektion läfst sich in einfacher Weise nur nach dem Konstruktionsverfahren ein Kartennetz in der Horizontalprojektion gewinnen. Die Parallelen teilen nach S. 117 den Mittelmeridian und die Meridiane den Äquator in gleiche Teile. Der Horizont oder Begrenzungskreis ist ein Grofskreis, dessen sphärischer Radius 90 Grade zu umfassen hat. Verlegt man den Ort m (Fig. 117 S. 119) in den Mittelpunkt der Karte, so rückt der Äquator gegen den südlichen Horizont hinab, der Parallel von m kann vollständig in der Karte erscheinen, er wird den Nullmeridian in gleichen Abständen vom Pol oberhalb wie unterhalb desselben schneiden. Nicht anders kann es mit einem nördlichern Parallel geschehen. Beide bilden und ihnen analog alle Parallelen konzentrische Kreise oder wenigstens Bogen konzentrischer Kreise, deren gemeinsames Zentrum der Pol ist. Ist nun r (Fig. 187) der Kartenmittelpunkt, $Pa = 90^0$, so zeichnet man einesteils mit diesem Radius den Horizontal- oder Begrenzungskreis, anderenteils teilt man diese Strecke in n gleiche Teile und führt durch die Teilpunkte vom Pole P aus konzentrische Kreise oder Bogen konzentrischer Kreise. Weil aber die Meridiane den Äquator nach S. 117 wie die Parallelen den Mittelmeridian in gleiche Teile zu bringen haben, so teilt man den Äquatorquadranten, der 90^0 vorzustellen hat, ebenfalls in n gleiche Teile. Zu einer bequemen Teilung verhilft der Transporteur. Durch ihn erforscht man den Winkel aPc und damit den Bogen ac.

Bezeichnet man denselben mit ψ, den Radius Pa mit $n\varkappa$, so ergibt die Proportion

$$360 : \psi = 2n\varkappa\pi : \text{arc}\, ac,$$

dafs $\text{arc}\, ac = n\varkappa\pi \cdot \frac{\psi}{180}$ und $\frac{\text{arc}\, ac}{n} = \varkappa\pi \cdot \frac{\psi}{180}$ ist.

Den letzten Betrag, nämlich $\varkappa \pi \frac{\psi}{180}$, trägt man von a auf beide Äquatorquadranten ab und verbindet die Teilpunkte durch gerade Linien mit dem Pole P, durch welchen alle Meridiane ihren

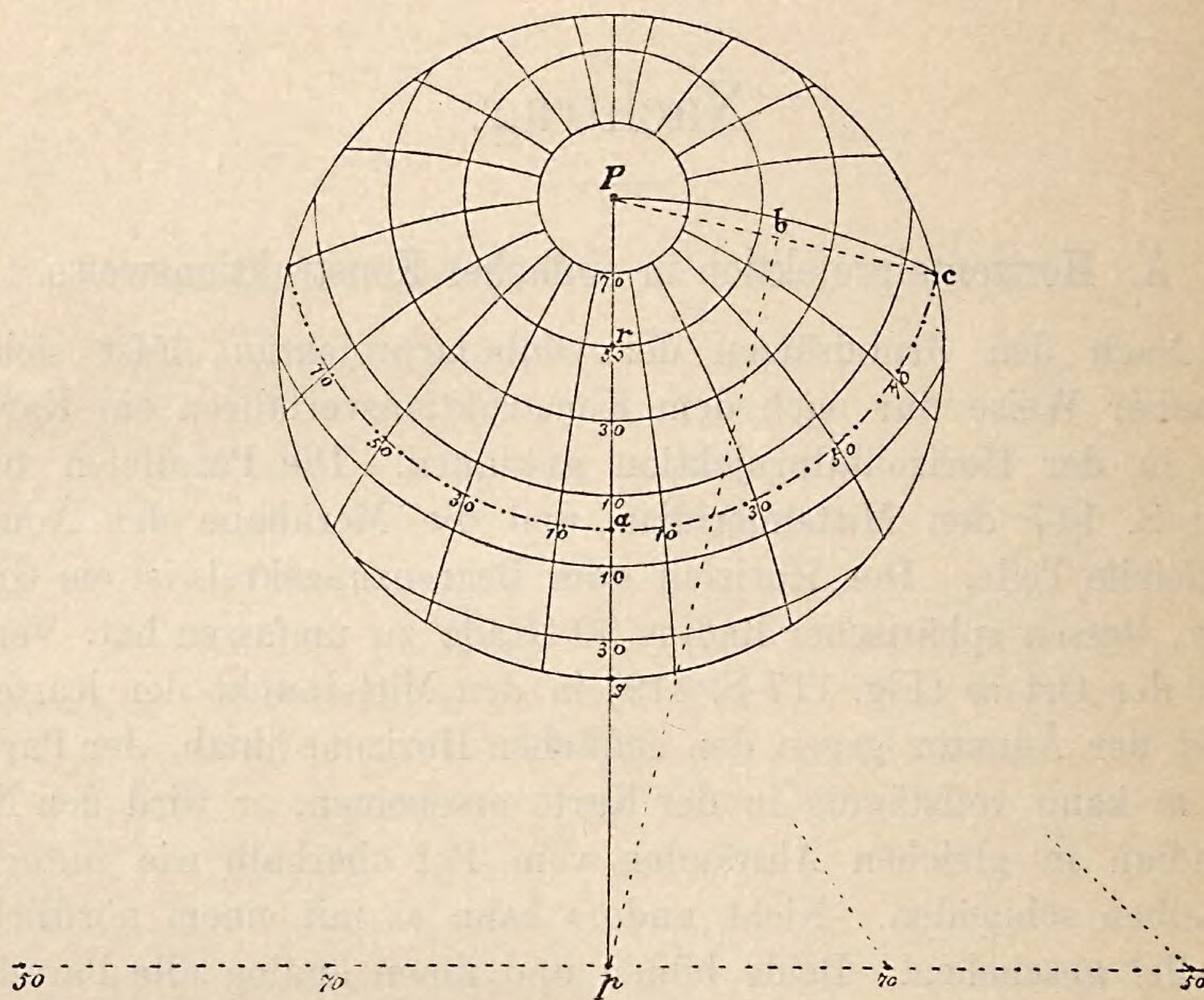


Fig. 187.

Weg zu nehmen haben. Das Perpendikel bp, errichtet im Halbierungspunkt b der Sehne Pc, führt auf den Punkt p. Er ist der Mittelpunkt für den 90. Meridian und zugleich jene Stelle, an welcher die Zentrale aller Meridianmittelpunkte den Nullmeridian rechtwinklig schneidet. Von den gefundenen Schnittpunkten 70, 50 . . . öffnet man wie von p aus den Zirkel gegen P und beschreibt mit den jeweiligen Zirkelöffnungen die begehrten Meridiane. Dieses einfache Verfahren kann zur raschen Erstellung einer Hemisphäre in der Horizontalprojektion leicht in Anwendung gebracht werden. Zirkel, Lineal und Transporteur sind die alleinigen Hilfsmittel, deren man benötigt ist. Bemerkt sei, dafs bei der vorstehenden Figur die Strecke zwischen den Meridianen 50 und 70 durch ein Versehen etwas zu klein genommen wurde.

B. Konstruktion der Kreisbogen ohne Zirkel für die auf Seite 108 bis 122 besprochenen Hemisphären.

Für den Fall, dafs bei den Hemisphären der stereographischen und Globularprojektion die Bogenelemente nach dem auf S. 56 und 57 bezeichneten Verfahren zu berechnen wären, ist noch notwendig darauf hinzuweisen, durch welche Punkte die Abszissenachse zu legen ist und welche Radien für die Bogenkonstruktion in Betracht zu ziehen sind.

1. Die stereographische Meridianprojektion.

Nach Figur 113 S. 109 ist der Radius $PM = 2r \operatorname{cosec} \lambda$ für den Meridian von M. Die Strecke $Pz = x = 2r \cot \lambda$. Demzufolge ist $Mz = PM - Pz$ oder auch $Mz = 2r(\operatorname{cosec} \lambda - \cot \lambda) = 2r\left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda}\right)$. Nun ist nach S. 110 der Meridianradius $PM = MR = y$ und der Parallelradius $PR = x$. Deshalb ist, wenn man Mz allgemein durch x' bezeichnet, der Punkt, durch welchen die Abszisse zu legen ist, für jeden Meridianbogen in der Gleichung gegeben

$$x' = y - x = 2r\left(\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda}\right).$$

Die Ordinate y gibt den Parallelmittelpunkt und x zugleich den Parallelradius an. Der Punkt, durch welchen die Abszissenachse für irgend einen Parallelkreis zu gehen hat, wird in analoger Weise von x' also zu bezeichnen sein

$$y' = y - x = 2r\left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right).$$

Die Meridian- und Parallelradien hat man in der Tabelle VIII und die Zentriwinkel für die zu konstruierenden Kreisbogen nimmt man nach S. 57 allgemein λ, 2λ ...

2. Die stereographische Horizontalprojektion.

Der Radius für den Meridian $N'vS'$ (Fig. 114 S. 112), der von Q um 90^0 entfernt ist, schneidet auf der Geraden $B'c$ von B aus nach S. 116 die Länge $R = \frac{2r \sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\cos(45 - \frac{1}{2}\varphi) \cos \varphi}$ ab. Der Schnittpunkt ist der Punkt, durch welchen die Abszissenachse zu zeichnen ist, um auf ihr die Bogenelemente für die Zentriwinkel λ, 2λ ... nach der Gleichung für den Kreisbogen S. 57 zu suchen.

Der Meridian von C (Fig. 114 S. 112) hat den Radius $N'm$. Nach S. 116 schliefsen R und $N'm$ den Winkel $90 - \lambda$ ein. Es ist dann $N'm = R' = R \sec(90 - \lambda) = R \operatorname{cosec} \lambda$ oder auch $R' = R \cdot \frac{1}{\sin \lambda}$.
Substituieren wir für R den oben angeführten Wert, so ist

$$MR' = \frac{2r \sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\sin\lambda \cos\varphi \cos(45 - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Den Wert für R, wenn man die Gleichung $R \operatorname{cosec} \lambda$ zu berechnen hat, findet man in der Tabelle IX S. 267, bei welcher $\varphi = 50$ n. Br. angenommen ist.

Die Gerade Bc wird in einer bestimmten Entfernung von B, welche Entfernung wir mit x' bezeichnen wollen, geschnitten. Die Strecke $B'm + x'$ mufs dem Radius vom Meridian $N'CS'$ also R' gleich sein. Nun ist $B'm = x$, folglich

$$x' = R' - x.$$

Führen wir für R' wie für x (S. 117) die numerischen Werte ein, so wird x' durch die Gleichung erhalten

$$x' = \frac{2r \sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\sin\lambda \cos\varphi \cos(45 - \frac{1}{2}\varphi)} - \frac{2r \cos\lambda \sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)}{\sin\lambda \cos\varphi \cos(45 - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Da beide Brüche gleichnamig sind, so läfst sich die Gleichung auch also schreiben

$$x' = \frac{2r \sin(45 + \frac{1}{2}\varphi)(1 - \cos\lambda)}{\sin\lambda \cos\varphi \cos(45 - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Die Peripheriepunkte, welche nördlich wie südlich vom Kartenmittelpunkt zu liegen kommen, sind auf S. 114 in der Gleichung ausgesprochen

$$p = 2r \tan \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi).$$

Die Entfernung des Parallelmittelpunktes vom Kartenmittelpunkt gibt nach S. 115 die Ordinate y, welche in der Tabelle IX S. 266 in Bezug auf den 50. Parallel berechnet zu finden ist. Diese Ordinate, wenn sie für einen Parallel nördlich vom Kartenmittelpunkt gilt, besteht aus dem Parallelradius R_n und der Strecke p. Mithin ist in diesem Fall

$$R_n = y - p.$$

Hat man den Parallelradius für einen Parallel, der vom Kartenmittelpunkt aus südwärts läuft, aus der Ordinate zu bestimmen, alsdann hat man zu ihr die Strecke p hinzu zu addieren. Es ist somit

$$R_s = y + p.$$

Nun ist nach S. 115 $y = r\,[\cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') + \tan {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)]$. In dem einen Fall erhalten wir, wenn $p = 2\,r \tan {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)$ ist,

$$R_n = r\,[\cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') - \tan {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)],$$

im andern Fall, da $\varphi' < \varphi$ und die Tangente negativ wird

$$R_s = r \cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') - r \tan {}^1\!/_2\,(\varphi - \varphi') + 2\,r \tan {}^1\!/_2\,(\varphi - \varphi') = r\,[\cot {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') + \tan {}^1\!/_2\,(\varphi - \varphi')].$$

Beide Gleichungen lassen nach der Anmerkung auf S. 115 eine Vereinfachung zu, und da der gleiche negative Winkel gleichen positiven Kosinus hat, so können wir allgemein für den Parallelradius setzen:

$$PR' = \frac{r \cos \varphi'}{\sin {}^1\!/_2\,(\varphi + \varphi') \cos {}^1\!/_2\,(\varphi' - \varphi)}.$$

Die Zentriwinkel für die Bogenkonstruktion sind auch hier wieder allgemein λ, $2\,\lambda$. . .

3. Globularprojektion.

Hier gestaltet sich die Sache für den Meridian- wie Parallelradius höchst einfach. Durch die gleichheitliche Teilung von dem Nullmeridian und Äquator sind die Entfernungen vom Kartenmittelpunkt in den Gleichungen ausgesprochen:

$$x' = r\,\lambda\,\frac{2}{\pi}; \qquad y' = r\,\varphi\,\frac{2}{\pi}.$$

Den Wert für den Meridianradius MR und den Parallelradius PR findet man S. 121, sodann numerisch in der Tabelle X S. 267 und 268.

Die Zentriwinkel für die Bogenkonstruktion sind λ, $2\,\lambda$. . .

Nicolosi veröffentlichte auch Darstellungen der verschiedenen Erdteile in der Globularprojektion.

Sollte der Begrenzungskreis in irgend einem der dargelegten Fälle rechnend zu bestimmen sein, so bietet hiezu die Kreisordinate, über deren Behandlung auf S. 55, 56, 65 und 67 Näheres zu finden ist, das passendste Mittel.

Noch sei beigefügt, daſs man bei der Bonne'schen Projektion, bei der es nur auf die Erstellung eines Kreisbogens, nicht aber auf Bogen, die λ', $2\,\lambda'$. . . zu entsprechen haben, ankommt, allgemein nach S. 57 auch setzen kann

$$x = r \cot \varphi \sin \lambda$$
$$y = r \cot \varphi \sin \lambda \tan {}^1\!/_2\,\lambda.$$

C. Äquinoktialpunkte. Solstitialpunkte. Kolur der Solstitien.

Zu S. 191. Die Punkte der Ekliptik, an welchen die Sonne bei ihrem scheinbaren jährlichen Umlauf den Himmelsäquator schneidet, nennt man, da dies zur Zeit der Äquinoktien stattfindet, Nachtgleichen- oder Äquinoktialpunkte. In Mitte beider oder in einer Entfernung von 90° von ihnen liegen der nördlichste und südlichste Punkt der Ekliptik; jenen erreicht scheinbar die Sonne am 21. Juni, diesen am 21. Dezember. Befindet sie sich in diesen Punkten selbst oder in deren Nähe, so ändert sich ihre Mittagshöhe, ihre Morgen- und Abendweite, ihre Tageslänge einige Tage hindurch unmerklich, so dafs man meint, es sei in ihrem Lauf ein Stillstand eingetreten. Eben deshalb führen beide Punkte den Namen Sonnenstillstands- oder Solstitialpunkte. Ein gröfster Kreis am Himmel, der durch die beiden Solstitialpunkte und die Himmelspole geht, wird der Kolur der Sonnenwenden oder der Solstitien genannt.

Alphabetisches Register.

Abenddämmerung 208. 209. 278.
Abendstern 238.
Abendweite 211. 218.
Aberration des Lichtes 185. 186.
Aberrationsellipse 186.
Aberrationswinkel 186.
Abnehmender Mond 224.
Abplattung der Erde 178.
Abszisse 54.
Abszissenachse 54.
Abweichung der Schwingungsebene 180. 277.
Achse 82.
— grofse 58. 259.
— kleine 58. 259.
Achsendrehung der Erde 178.
— des Mondes 225.
— der Sonne 239.
Achsendreieck 70.
Aërolithe 242.
Alhazen 279.
Anaximander 149.
Anfangsmeridian 83. 117.
Antipassat 181.
Antipoden 112. 199.
Antipodenhalbkugel 117.
Anziehungskraft 187.
Äquator der Erde 82.
— des Himmels 191. 196.
Äquatorgrad 90. 257. 259.
Äquatorhöhe 196. 210. 214. 217.
Äquatorialprojektion 97. 98.
Äquinoktialpunkte 288.
Äquinoktien 207. 210.
Äquivalenz 126. 162.
Aphel 187. 191.
Apianus Petrus 161.
Apogäum 226.
Archimedes 35.
Aristarch 177.
Asterioden 240. 242.
Asymptoten 69.
Atmosphäre der Erde 208.
— des Mondes 223.
— der Sonne 239.
Attraktionskraft siehe Anziehungskraft.
Aufsteigung, gerade 197.
Augenpunkt 94.
Ausschnitt 16.
Azimut 198.

Bahn der Erde 189.
— des Mondes 226.
Bär grofser 85.
— kleiner 86.
Beleuchtungsskala 168.
Bergstrich 167.
Berlin 83. 261. 262.
Berührende 17.
Bessel 85. 258.
Bestimmungslinien 83.
Biela 242.
Bildfläche 93.
Bonne Rigobert 161. 162.
Bonne'sche Kegelprojektion 161. 262. 363.
Bradley James 184.
Breite geographische 83. 196. 259.
— — Bestimmungen 86. 202. 204. 205. 214. 217.
Breitenkreise der Erde 83.
Bremiker 85. 258.
Brennpunkt 58.

Brennpunkt der Ellipse 58.
— der Hyperbel 68.
— der Parabel 70.
Brorsen 242.

Cäsar Julius 200.
Centaur 243.
Charakteristik 251. 252.
Chausseelinien 165.
Chromosphäre der Sonne 240.
Cicero 183.
Collignon 126. 127. 150.
Cylinder 27.
Cylinderprojektion 122. 181. 262.
— mit quadratischen Maschen 143.
— mit rechteckigen Maschen 148. 262.
— Merkators Projektion 122. 144. 269.

Dämmerung 208.
— astronomische 209.
— bürgerliche 209.
— ihre Dauer in den Äquinoktien und Soltitien 277.
— statt der Tageshelle 278.
D'Arrest 242.
Datumsgrenze 89.
Deklination 196. 197. 214. 217.
— der Sonne 214. 280.
Deklinationsskreise 197.
De L'Isle Joseph Niklas 157. 161.
Diagonale 14.
Diameter 15.
— sphärischer 87. 112.
Dichte der Sonne und Planeten 236.
Direktrix 28. 70.
Donatischer Komet 241.
Dreieck im allgemeinen 6. 84.
— Ähnlichkeit 8.
— gleichschenkliges 8.
— gleichseitiges 8.
— rechtwinkliges 7.
— rechtwinkliges sphärisches 49.
— schiefwinkliges sphärisches 51.
— stumpfwinkliges 7.
— spitzwinkliges 7.
Dunsthülle 208.
Durchmesser 15.
— der Planeten und Sonne 236.

Ebbe 234.
Ecklinie 14.
Eigenbewegung der Sonne 239.
— der Fixsterne 243.
Einschattige 199.
Ekliptik 190.
— Einteilung 190.
— nördlichste Punkt 288.
— Lage 190.
— Pole 191.
— Schiefe 191. 214. 217.
— südlichste Punkt 288.
Ekphantos 183.
Ellipse 57. 70. 241.
— Entstehung und Eigenschaften 57.
— Flächenberechnung 67.
— Gleichung 59.
— Konstruktion 61—67.
Ellipsograph 67.
Enckes Komet 242.
Entfernung der Sonne und des Mondes von der Erde 229. 231.
— — Bestimmung 229.
— der Fixsterne von der Sonne 233. 281
Erdachse 82.
— Lage 193.
Erdbahn 189.
— Lage 190.
— Gröfse 231. (186 Weg der Erde in 1″.)
Erde 236. Abplattung 178.
— Achsendrehung 177. 178. Beweise 178—183.
— Bewegung jährliche 184. 200.
— — tägliche 178. 201.
— Entferung von der Sonne 231.
— Gestalt 78.
— Kubikinhalt 92.
— Kugelform 78. Beweise 79—82.
— Oberfläche 92.
Erdradius 90. 257.
Erstes Viertel 223.
Exzentrizität 59.

Faden, englischer 257.
Falb Rudolf 241. 245. 246.
Faye 241. 242.
Ferro 83. 261. 262.
Feuerkugeln 242.

Fick Adolf 246.
Finäus Orontius 161.
Finsternisse des Mondes 227. 229.
— der Sonne 227. 228.
Fixsterne 243
— Eigenbewegung 243.
— Entfernung 233.
— Parallaxe 233.
Flächeninhalt ebener Figuren 23—25.
— der Ellipse 67.
— des gleichschenkligen Dreiecks 46.
— des rechtwinkligen Dreiecks 46.
— eines Segmentes 47.
Flächenmafsstab 141.
Flufslinien 165.
Flut 234.
Foucault 178. 179. 180. 181. 184.
Frühling 192. 193. 202.
Frühlingsäquinoktium 193. 202.
Frühlingspunkt 195. 197.
— Bewegung 195.
Fufs, Pariser 257.
Fufspunkt 76.

Gegenfüfsler 199.
Gegenschattige 199.
Gegenwechselwinkel 6.
Gegenwinkel 6.
Gegenwohner 199. 200.
Geometrie, analytische 53.
— ebene 3.
Gesichtspunkt 94.
Gleicher 82.
Gleichliegende Winkel 6.
Globularprojektion 117—122. 267. 287.
Gnomon 77.
Gonnella 171.
Grade der Parallelkreise 85.
— Gröfse derselben 85.
Gradmefsung 178.
Gradnetz 94. 97.
Gravitation 82.
Gregor XIII. 200.
Greenwich 83. 261. 262.

Halbkugel 32.
Hälfte südliche, nördliche, östliche, westliche 76. 82.
Halleyscher Komet 242.
Hauptkreis 31. 82.
Helle Nächte 278.
Hemisphäre, östliche, westliche, südliche, nördliche 82.
Heraklides 183.
Herbst 192. 193. 202.
Hermann J. M. 171.
Hiketas 183.
Himmels- oder Weltachse 191. 196.
Himmelsäquator 191. 196. 210.
Himmelsgegenden (Weltgegenden) 76. 77.
Himmelsglobus 198.
Himmelskarten 199.
Himmelspole (Weltpole) 82. 191. 196.
Himmelswagen 85.
Hipparch 183. 195.
Höhe der Atmosphäre 279. 280.
Höhe eines Sternes 198. 211. 216.
Höhenparallaxe 232.
Horizont 75.
— Gröfse 80.
— scheinbarer, wahrer 78.
Horizontalen 166.
— äquidistante 166.
Horizontalparallaxe 230.
Horizontalprojektion 97. 111.
— in einfacher Konstruktionsweise 283.
— stereographische 111—116. 266.
Hyperbel 68. 70. 241.
Hypotenuse 22.

Jahr 200.
— platonisches 195.
— Schalt- 200.
— tropisches 200.
Jahreszeiten der Erde 194.
— ungleiche Dauer 189. 191.
— der verschiedenen Zonen 191.
Inhalt siehe Flächeninhalt.
Isorachien 236.
Isothermen 223.
Jupiter 236. 238.
Jupitermonde 236.

Kalender 200.
— gregorianischer 201.
— julianischer 200.

Kalotte 32. 83.
— der hellen Nächte 279.
— ohne Dämmerung 278. 279.
Kartenebene 93.
Kartenmafsstab 138.
Katheten 22. 37.
Kegel 28. 29.
Kegelprojektion 152. 181.
— von Bonne 161. 262. 263.
— von Merkator 153. 275.
— von Murdoch 157. 276.
— von Ptolemäus 153. 263.
Kegelschnitte 70.
Kennziffer 251. 252.
Kepler 177. 187. 188.
Kepler'sche Gesetze 188.
Klima, mathematisches 221. 281.
— örtliches oder wirkliches 222.
Knoten der Mondbahn 226.
Kolur der Nachtgleichen oder Äquinoktien-Kolur 197.
— der Solstitien oder Sonnenwenden 288.
Kometen 240. 243.
Kompafslinien 124.
Konjunktion 223.
Koordinaten 54.
Koordinatenachsen 53.
Koordinaten, geographische 83. 85.
— sphärische 197.
Kopernikanisches System 184.
Kopernikus 177. 183. 184. 186. 187.
Korona 240.
Korrespondierende Winkel 6.
Körperoberflächen 26.
Körperlicher Inhalt 34.
Kosinus 36.
— eines stumpfen Winkels 42.
— eines negativen Winkels 43.
Kosinusregel 45. 53.
Kosmos 243.
Kotangente 39. 40. 41.
Krebs 192.
Kreis im allgemeinen 15. 55. 70. 71. 105.
— gröfster 31.
Kreisbogen 56.
— zur Bonne'schen Kegelprojektion 164. 287.
Kreisbogen zur Globularprojektion 287.
— zur Merkators Kegelprojektion 157.
— zur Murdoch'schen Kegelprojektion 161.
— zur stereographischen Horizontalprojektion 285. 286.
— zur stereographischen Meridianprojektion 285.
Kreisumfang 21.
Kremer siehe Merkator
Kubikinhalt siehe Volumen.
Kugel 30.
Kugelabschnitt 32.
Kugelausschnitt 31.
Kugelbilder 93.
Kugelgestalt der Erde 78. Beweise 79—82.
Kugelgürtel 32.
Kugelhaube 32. 83.
Kugeloberfläche 32. 33.
Kugelschicht 32.
— Höhe 32.
Kugelsegment 32. 83.
Kugelzweieck 31.
Kulmination 196. 213.
— obere 86. 196. 213. 217.
— untere 87. 196. 278.
Kürzeste Nacht 277.
Kürzester Tag 277.

Länge, geographische 83. 259.
— Bestimmung 87.
Längengrade 85.
Längenmafsstab 138.
Längste Nacht 277.
Längster Tag 277.
Lehmann 166.
Leitlinie 28. 70.
Leitstrahl 58.
Le Testu Guillaume 161.
Letztes Viertel 244.
Lichtgeschwindigkeit 185. 186.
Lichtgestalten des Mondes 223.
Lichthülle 240.
Lichtklimate 215. 218. 280.
Linie 82.
— gerade 54. 124.
— des schiefen Laufes 124.

Logarithmen, das Rechnen damit 251 — 256.
Loxodromie 124.

Magelhaen Ferdinand 81.
Mantisse 251 252.
Mars 236. 238.
Maschen 83.
Masse der Planeten 236.
Meere des Mondes 223.
Meile, geographische 257.
Meridian 76.
— Anfangs-, Null- 83. 117.
Meridiangrad 257.
Meridianinstrument 203.
Meridianprojektion 97. 102.
— orthographische 102. 264.
— stereograpische 104. 265.
Merkator 122. 144. 153. 157. 161.
Merkators Projektion 122. 144. 269.
— Kegelprojektion 153. 275.
Merkur 236. 238.
Meteorite 242.
Meteorsteine 242.
Milchstrafse 243. 244.
Mittagshöhe der Sonne 202.
Mittagskreis 76.
Mittagslinie 76. 77.
Mittelmeridian 102. 110. 112. 117. 130. 145. 146. 149. 151. 154. 160. 162. 163. 164.
Mittelparallel 144. 153. 157. 160. 162.
Mittelpunkt, spärischer 97. 99. 221.
— des Gradnetzes 97.
Mitternachtstiefe der Sonne 278.
Mollweid'sche Projektion 130. 146. 270. 273.
Monat 224.
— siderischer 224.
— synodischer 224.
Mond 223.
— doppelte Bewegung 225.
— Entfernung von der Erde 232.
— Gröfse 233. 234.
— Masse und Dichtigkeit 223.
— Phasen 223.
— Revolution (Umlauf um d. Erde) 223.
— Rotation 225.
Mondbahn 226. 227.
— Form 226.
— Knoten 226.
— Lage zur Ekliptik 226.
Monde der Planeten 236.
Mondfinsternisse 227.
Morgendämmerung 209. 278.
Morgenstern 238.
Morgenweite 211. 218.
München 218.
Murdoch 157.
Murdochs Kegelprojektion 157. 276.

Nachtbogen 203. 210.
Nachtgleichenpunkte 288.
Nadir 76. 196. 210.
Nadirflut 235.
Nebenwinkel 4.
Nebenwohner 199. 200.
Neigung der Bahnen 191. 193. 226.
Neptun 236. 238.
Netz 83.
Neumond 223.
Newton 82. 178. 187. 188.
Nicolosi 117. 287.
Nippflut 235.
Nordgegend 76.
Nordpol der Erde 82.
— des Himmels 196.
Nordpunkt 76. 196.
Nullmeridian 83. 117. 146.
Nutation 195.

Oberfläche eines Cylinders 27.
— der Erde 92.
— einer Kalotte 33.
— eines Kegels 28. 29.
— eines abgestumpften Kegels 30.
— einer Kugel 34.
— des Mondes 234.
— eines Prismas 27.
— einer Pyramide 27.
— der Sonne 234.
— einer Zone 33.
Oppikofer 171.
Opposition 224.
Ordinate 54.
Ordinatenachse 54.

Orientieren 77.
Ortsmeridian 102. 107.
Ortspunkte 166.
Ostgegend 76.
Ostpunkt 76.
Parabel 69. 70. 241.
Parallaxe 186. 230.
— Höhen- 232.
— Horizontal 230. 232.
— jährliche 232.
— tägliche 232.
Parallelkreise 31.
— der Erde 83.
— des Himmels 196.
Parallellinien 5.
Parallelogramm 13.
Paralleltrapez 14.
Paris 261. 262.
Partes proportinales (P. P.) 253.
Passat 181.
Pendel 178. 181.
— Versuch Foucaults 179.
Penumbra 238.
Perigäum 226.
Perihel 187. 191.
Peripherie 15.
Peripheriewinkel 15. 18.
Perpendikel 8.
Peschel Oskar 161. 241. 244. 246.
Phasen des Mondes 223.
Philolāos 183.
Photosphäre der Sonne 240.
Planeten 184. 236. 243.
— Beschreibung 238.
— Einteilung 237.
Planetensystem 236.
Planetoiden 236. 237.
Planimeter 171.
Plato 177. 178.
Platonisches Jahr 195.
Plutarch 183.
Polarkreise der Erde 197. 204. 221.
— des Himmels 197.
Polarkarten 181.
Polarplanimeter 172.
Polarprojektion 97. 98.
— globulare 119.
— orthographische 98. 262.
Polarprojektion stereographische 101. 263.
— zentrale 99. 263.
Polarstern 86.
Poldistanz 197.
Pole 31.
— sphärische Mittelpunkte 99. 100. 221.
— der Ekliptik 191.
— der Erde 82. 203.
— des Himmels 191. 196.
Polhöhe 86. 210.
— Bestimmung 87.
— gleich der geogr. Breite 86.
Posidonius 199.
Position der Sterne 196.
— Bestimmung 197.
Präzession der Nachtgleichen 195.
Prisma 27.
Profilsdreieck 167.
Projektion der scheinbaren Sonnenbahn oder der Erdbahn 190.
— mit quadratischen Maschen 143.
— mit rechteckigen Maschen 148. 262.
— mit trapezförmigen Maschen 149.
— nicht perspektivische 94. 117—138.
— orthographische 94.
— perspektivische 94—117.
— stereographische 95.
— stereographisch äquivalente 126. 150. 270.
— von Mollweide 130. 146. 270. 273.
— von Merkator 122. 144. 269.
— von Nicolosi 117. 267.
— von Sanson-Flammsteed 144. 262.
— zentrale 95. 263.
Proportionale, mittlere 22. 56.
Proportionalität der Dreiecksseiten 9.
Protuberanzen der Sonne 240.
Ptolemäus Claudius 149. 153. 161. 183
Pyramide 27.
Pythagoräischer Lehrsatz 23.

Quadrant 4.
Quadrat 13.
Quadrate 83.
Quadratmeile, geographische 257.
Quadraturen 224.

Radius 15.
— der Erde 90. 257.
— des Mondes 234.
— der Sonne 234.
— sphärischer 99. 100. 101.
— vector 58.
Raupen 166.
Raute 13. 127.
Refraktion 208.
Rektaszension 197.
Revolution der Erde 184.
— des Mondes oder seine Bewegung um die Erde 223. 224. 225.
Rhombus 13. 127.
Richer 178.
Richtlinie 28.
Ringgebirge des Mondes 223. 225.
Römer Olaf 185.
Rotation der Erde 178. Beweise 178–183.
— des Himmels 178.
— des Mondes 225.
— der Sonne 239.
Rotationskreis 211.
Rotationsgeschwindigkeit der Erde 181.

Sanson-Flamsteed'sche Projektion 144. 262.
Saturn 236. 238.
— Monde 236. 238.
— Ringe 238.
Schatten 11. 77. 78. 203.
— der Erde bei Mondfinsternissen 227—229.
— des Mondes bei Sonnenfinsternissen 227—229.
Schattenwurf 199.
Scheitel eines Kegels 28.
— eines Winkels 3.
Scheitelkreise 76.
Scheitellinie 75.
Scheitelpunkt 75.
Scheitelwinkel 4. 5.
Schenkel 3.
Schiefe der Ekliptik 191. 214. 217.
Schneidelinie 15.
Schnitt, antiparalleler 72. 105.
Schraffe 167.
Schweifstern 240.
Schwungkraft (Zentrifugalkraft) 178.
Secchi 246. 247.
Seemeile 257.
Segment 16.
Sehne 15.
Sekante 15.
Sekantenwinkel 15. 17. 19. 154. 155.
Sektor 16.
Sekunde 4. 88.
Senkrechte 8.
Sinus 36.
— negativ 43.
— eines spitzen Winkels 36. 38.
— eines stumpfen Winkels 42.
Sinusregel 44. 51.
Snellius Willebrord 13.
Solstitialpunkte 288.
Sommer 192. 193. 202. 205.
Sommersolstitium 193. 203.
Sonne 236. 238.
— scheinbare Bewegung 189. 197.
— — in der Ekliptik 189. 190.
— schraubenförmige Bewegung in der Sphära parallela 198.
— Eigenbewegung 239.
— Gröfse 233. 234.
— Masse und Dichtigkeit 236. 238.
Sonnenabstand, mittlerer 236.
Sonnenaufgang 207. 210. 216. 218. 277.
Sonnenäquator 239.
Sonnenfackeln 239.
Sonnenferne 187. 191.
Sonnenflecken 238. 245.
Sonnennähe 187. 191.
Sonnenstillstandspunkte 288.
Sonnensystem 238. 240.
Sonnentag 201.
— mittlerer 202.
— ungleiche Dauer 202.
Sonnentemperatur 238.
Sonnenumhüllungen 239.
Sonnenuntergang 207. 277.
Sonnenzeiger 77.
Spektralanalyse des Fixsternen- und Planetenlichtes 242.
— der Sonne 240.
Sphära recta, obliqua, parallela 198. 199.
Späroid, elliptisches 259.

Stabens Johann 161.
Starke 172.
Steinbock 192.
Stereographisch-äquivalenteProjektion 126. 150. 270.
Stereographische Horizontalprojektion 111. 266. 285.
— Meridianprojektion 104. 265. 285.
— Polarprojektion 101. 263.
— Projektion 95.
Stereometrie 26.
Sternbilder des Tierkreises 190. 192.
Sterne als Bergzeichen 166.
— Arten ders. 243.
— Bestimmung der Position ders. 197.
Sternkarten (Himmelskarten) 199.
Sternprojektion 137.
Sternschnuppen 242.
Sterntag 201. 257.
Sternweite 233.
Strahlenbrechung 208.
Stundenkreis 198.
Stundenwinkel 198. 211. 216.
Sturmflut 235.
Südgegend 76.
Südpol 82. 196.
Südpunkt 76. 196.
Südweite 198.
Syzygien 224.

Tafel 93.
Tag, astronomischer (Sterntag) 201.
— bürgerlicher 202.
— 24 Stunden 278. 280.
— einige Monate 278. 280.
Tagbogen 203. 207. 210—213.
Tageslänge 202. 207. 211. 277.
— Bestimmung 207. 211. 212. 213. 217.
Tageszeiten der Erde (Entstehung von Tag und Nacht) 177. 178.
Tag- und Nachtgleiche 192. 193. 203. 210.
Tangente 17. 21. 39. 40. 41. 106. 109.
— der Ellipse 67.
Tangentialwinkel 17. 19. 105. 113.
Telegraph als Mittel der Längenbestimmung 88.
Temperatur der Sonne 238.
Temperaturverhältnisse 221.
Terrainbilder 165.
Thales 149.
Theodolith 203.
Tierkreis 190.
Tierkreislicht 242.
Transporteur 4.
Transversalmafsstab 10. 11.
Trapez 14. 84.
Trapezoid 14.
Triangulation 13.
Trigonometrie 36.

Uferränder 165.
Umfang 15. 21. 84. 90.
— der Erde 90.
— des Mondes 234.
— eines Parallelkreises 84.
— der Sonne 234.
Umlauf der Planeten 236.
Umschattige 199.
Umschiffung der Erde (Weltumseglung) 81. 89.
Universalinstrument 197.
Universum 243.
Unschattige 199.
Uranus 236. 238.
— Monde 236.

Venus 236. 238.
Venusdurchgänge 231.
Verfinsterung partiale 229.
— totale 229.
Vertikalkreis 4.
— erster 76.
Vertikallinie 75.
Vico 242.
Viereck 13.
Viertel, erstes 223.
— letztes 224.
Vollmond (Opposition) 224.
Volumen eines Cylinders 34.
— der Erde 92.
— eines Kegels 34.
— einer Kugel 35.
— des Mondes 234.
— eines Prismas 34.

Volumen einer Pyramide 34.
— der Sonne 234.
Vorrücken der Nachtgleichen 195.

Wage 192.
Wagen, grofser 85.
Wärme der Sonne 238.
Wärmezonen 221.
Wechselschnitt 72. 105.
Wechselwinkel 6.
Weltachse 177. 191. 193.
Weltall 243.
Weltgebäude 243.
Weltgegenden 76. 77.
Weltmittelpunkt 75. 196.
Weltpole 86. 191. 196.
Weltumseglungen 81. 89.
Wendekreise der Erde 197. 205. 206. 221.
— des Himmels (des Krebses und des Steinbocks) 197.
Wendekreis des Krebses 203. 211.
Westgegend 76.
Westpunkt 76.
Wetli 172.
Widder 192.
Winkel, Entstehung 3.
— flach, gestreckt 3. 4. 22.
— gleichliegender 6.
— korrespondierender 6.
— rechter 4. 22.
— sphärischer 31.
— spitz 4.
— stumpf 4.
Winkel, voll 4. 22.
Winter 192. 202. 204. 206.
Wintersolstitium 204.

Zeichen der Ekliptik 190.
— konventionelle oder übliche 165.
Zeichenebene 93.
Zeit, mittlere 202.
Zeiteinteilung 200.
Zeitgleichung 202.
Zeitrechnung 200.
Zeitunterschied 87.
— Mittel zur Bestimmung der geogr. Länge 87.
Zenit 75. 196. 210.
Zenitdistanz 232.
Zenitflut 235.
Zentrifugalkraft 178.
Zentripetalkraft 178.
Zentriwinkel 15. 17.
Zentrum 15.
— (Mittelpunkt) des Gradnetzes 97.
— sphärisches 100.
Zirkumpolarsterne 86. 196.
Zodiakallicht 240. 243.
Zodiakus 190.
Zone 32. 83. 221.
— Mantelfläche 33.
Zonenbilder 138 — 165.
Zuglinie 58.
Zunehmender Mond 223.
Zweieck, sphärisches 31. 83.
Zweischattige 199.

Berichtigungen.

S. 3 Z. 13 v. o. Die Parenthese (Zeichen $\sphericalangle$) sollte nach den Worten: „Scheitel des Winkels genannt“ folgen.

S. 11 Z. 11 v. u. ist „Hundertstel“ statt „Hundertel“ zu lesen.

S. 43 Z. 8 v. o. Statt

$$\cos 140^0 = -\cos(180 - 40) = -\cos 40$$

oder allgemein $\cos\alpha = -\cos(180 - \beta) = -\cos\beta$

hat zu stehen $\cos 140^0 = \cos(180 - 40) = -\cos 40$

oder allgemein $\cos\alpha = \cos(180 - \beta) = -\cos\beta.$

S. 60 Z. 3 v. u. Die rechte Seite der Gleichung 15 ist also zu lesen:

$$a^2 x^2 - b^2 x^2 + a^4.$$

S. 115 Z. 5 v. u. sollte statt $r\,2\tan\varphi$ stehen $2\,r\tan\varphi$.

S. 120 Z. 6 v. u. Der Wert für die Abszisse x in gekürzter Form ist

$$x = r\left(\tfrac{1}{2}\sec\vartheta\operatorname{cosec}\vartheta - \lambda\frac{2}{\pi}\right).$$

S. 121 Z. 4 v. u. Der Wert für die Ordinate y in gekürzter Form ist:

$$y = kg + Zg = r\left(\tfrac{1}{2}\cos\varphi\sec\psi\operatorname{cosec}\psi + \varphi\frac{2}{\pi}\right).$$

S. 125 Z. 5 v. u. Vor der Klammer $\left(\pi\frac{\varphi_1}{180}\right)$ hat r zu stehen. In der betreffenden Gleichung sollte dieser Faktor also geschrieben sein:

$$r\left(\pi\frac{\varphi_1}{180}\right).$$

S. 153 Z. 1 v. u. ist statt $\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ zu lesen $\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')$.

S. 159 Z. 2 v. u. ist für $\sin\frac{m-2}{2}$ zu setzen $\sin\frac{m-n}{2}$.

S. 167 Z. 8 v. u. Für „Aus Tabelle V etc.“ ist zu lesen „In der Tabelle V etc.“

S. 186 Z. 15 v. o. lies Parallaxe statt Parallelaxe und Z. 13 v. u. 934 statt 394.

S. 189 ist in beiden Rechnungen für $148\,344\,000^{km}$ die Zahl 148,67 Mill.^{km} in Ansatz zu bringen. Die Resultate, welche hiedurch sich ergeben, sind sonach a) 57,6 Mill.^{km} b) 779,24 Mill.^{km}.

S. 190 fehlt bei Fig. 157 links das Zeichen ♑.

S. 193 Z. 18 v. o. Der Satz: „dafs die Neigung der Erdachse zur Erdbahn uns ein E n t g e g e n k o m m e n und E n t f e r n e n der Sonne glauben liefs" ist also zu lesen: „dafs die Neigung der Erdachse zur Erdbahn uns ein S t e i g e n und S i n k e n der Sonne glauben liefs".

S. 202 Z. 17 v. u. Für 148,64 Mill.$^{\text{km}}$ ist zu setzen 148,67 Mill.$^{\text{km}}$.

S. 211 Z. 15 v. o. ist zu lesen $ZP = 90 - \varphi$.

S. 215 soll bei der Figur die Nummer 170 statt 143 stehen.

S. 224 Z. 6 v. o. Nach dem Worte Opposition und dem Zeichen (☍) ist der Satz einzuschalten: „In der Stellung *V. M.* haben wir Vollmond."

S. 266 hat Anmerkung 2 also zu heifsen:
Sobald man für $^1/_2$ wieder $r = {}^1/_2 \times 2r$ einsetzt, alsdann ist

$$y = 2r \,.\, z; \quad \lg y = \lg 2r + \lg z.$$

S. 268. In der Tabelle X$^{\text{b}}$ ist unter $y = z$ für 22,8935 zu setzen: 15,6325 und unter $\lg y = \lg z$ für 1,35971 sodann 1,19403.

Rohmeder, Dr. W., Schulrat und G. **Wenz**, Lehrer an der höheren Töchterschule in München. **Methodischer Schulatlas für bayerische Schulen.** gr. 4.

I. Lieferung. **Süddeutschland.** 8 Karten in Farbendruck. In Umschlag geheftet 50 Pf.

Inhalt: 1. Die kartographischen Darstellungsmittel für den elementaren Unterricht. — 2. München und Umgegend. — 3. Südbayern. — 4. Nordbayern. — 5. Rheinbayern und die Landschaften des Oberrheins. — 6. Süddeutschlands Flufsgebiete. — 7. Oro-hydrographische Karte von Süddeutschland. — 8. Süddeutschland, politisch.

II. Lieferung. **Mitteleuropa.** 4 Doppelkarten in Farbendruck. In Umschlag geheftet 50 Pf.

Inhalt: 9 u. 10. Mitteleuropa, physikalisch. 11 u. 12. Das Alpenland. 13 u. 14. Das Deutsche Reich, Belgien und die Niederlande, politisch. 15 u. 16. Österreich-Ungarn, politisch.

III. Lieferung. **Das übrige Europa.** 6 einfache und 1 Doppelkarte in Farbendruck. In Umschlag geheftet 50 Pf.

Inhalt: 17. Frankreich und die Pyrenäenhalbinsel. 18. Italien und die Balkanhalbinsel. 19. Die Britischen Inseln. 20. Skandinavien und Dänemark. 21. Europäisches Rufsland. 22 u. 23. Die Staaten Süd-, West- und Nord-Europas. 24. Europa.

IV. Lieferung. **Aussereuropäische Länder.** 8 Karten in Farbendruck.

(Zur Zeit noch unter der Presse.)

Inhalt: 25 u. 26. Asien. 27. Afrika. 28. Nordamerika. 29. Südamerika. 30. Australien. 31 u. 32. Erdkarte in der Projektion von Mollweide. 33. Völker und Religionskarte der Erde.. 34. Zur mathematischen Geographie.

Wenz, G., Lehrer an der höheren Töchterschule in München. **Materialien für den Unterricht in der Geographie nach der konstruktiven Methode.**

Methodischer Leitfaden für den Lehrer. In 3 Lieferungen. 8^0.

I. Lieferung. 112 S. brosch. M. 1. 60 Pf.
II. Lieferung. 136 S. brosch. M. 2. 20 Pf.
III. Lieferung (erscheint im Laufe dieses Jahres).

50 Kärtchen als Mustervorlagen für die Tafelvorzeichnung des Lehrers. In Karton M. 2. 50 Pf.

62 Kartennetze. In 4 Lieferungen. Quer-Folio.

I. Lieferung (12 Blatt) geheftet 40 Pf.
II. Lieferung (18 Blatt) „ 58 Pf.
III. Lieferung (15 Blatt) „ 48 Pf.
IV. Lieferung (17 Blatt) „ 54 Pf.
Preis eines Blattes 3 Pf.

Im gleichen Verlage erschienen:

Peschel, Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. Humboldt und Karl Ritter. Herausgeg. von Prof. Dr. Ruge. 2. Aufl., 2 Abteilungen. Mit Karten und Holzschnitten. 1877. 8. geh. M. 12. — Pf.

Ratzel, Dr. Friedr., Prof. an der technischen Hochschule zu München, **Die Vereinigten Staaten von Nord-Amerika.** 2 Bände, deren jeder auch einzeln käuflich ist.

I. Band: Physikalische Geographie und Naturcharakter der Staaten von Nord-Amerika. 1878. Lex. 8. (XIV u. 667 S.). Mit 12 Holzschnitten und 5 Karten in Farbendruck.

Preis geh. M. 14., in eleg. Original-Leinwandband M. 16.

II. Band: Kulturgeographie der Vereinigten Staaten von Nord-Amerika unter besonderer Berücksichtigung der wirtschaftlichen Verhältnisse. 1880. Lex. 8. (XVI u. 762 S.)

Preis geh. M. 18., in eleg. Original-Leinwandband M. 20.

Geistbeck, Dr. M., kgl. Seminarlehrer in Freising. **Leitfaden der Geographie für Latein-, Real- und Präparandenschulen.** In 4 Teilen. 12⁰.

I. Teil: Geographische Grundbegriffe. Übersicht über die Erdoberfläche. Das Königreich Bayern. Mit 12 Kärtchen und 15 Figuren in Holzschnitt. Dritte umgearbeitete Auflage. 76 S. geb. 50 Pf.

II. Teil: Geographie von Deutschland, Österreich-Ungarn und der Schweiz. Mit 13 Kärtchen und 9 Figuren in Holzschnitt. Dritte umgearbeitete Auflage. 88 S. geb. 50 Pf.

III. Teil: Geographie von Europa. Mit 8 Kärtchen und 1 Figur in Holzschnitt. IV u. 96 S. geb. 50 Pf.

IV. Teil: Die aufsereuropäischen Erdteile. Mit 27 Figuren in Holzschnitt. 120 S. geb. 60 Pf.

— do. — **Geographie des Königreichs Bayern.** Für die Mittelklassen der Volksschulen. Mit 7 Kärtchen. Zweite Auflage. 12⁰. 56 S. geb. 32 Pf.

— do. — **Geographie von Deutschland.** Für die Oberklassen der Volksschulen. Mit 6 Kärtchen in Holzschnitt. Zweite Auflage. 12⁰. 60 S. geb. 32 Pf.

— do. — **Geographie von Europa und den fremden Erdteilen, nebst den Elementen der allgemeinen Geographie.** Für die oberen Klassen der Volksschule. 12⁰. 28 S. geb. 25 Pf.

— do. — **Das Königreich Bayern** in geographisch-statistischer Beziehung. Mit 36 Kärtchen und 16 Holzschnitten. 8. VIII und 246 S. brosch. M. 3. — Pf.

J. Gruber,

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wenz, Gustav.

Die mathematische Geographie in Verbindung mit der Landkarten-Projektion fü
r Schulen und zum Selbstunterricht bearb

München 1883

Math.a. 253 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650585-1